ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ
1ο Φύλλο Ασκήσεων

1. Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} y + x\sin\dfrac{1}{y}, & \text{για } y \neq 0, \\ 0, & \text{για } y = 0. \end{cases}$$

(α) Να αποδειχθεί οτι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
(β) Να αποδειχθεί οτι το $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$ δεν υπάρχει.

2. Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}, & \text{όταν } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{όταν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(α) Για κάθε $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ με $(u,v) \neq (0,0)$ να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{t\to 0} f(tu,tv)$.
(β) Είναι η f συνεχής στο σημείο $(0,0)$;

3. Εστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$ και την ιδιότητα $f(tx) = tf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $t > 0$. Να αποδειχθεί οτι υπάρχουν a, $b > 0$ τέτοια ώστε $a\|x\| \leq f(x) \leq b\|x\|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

4. Να αποδειχθεί οτι αν A, $B \subset \mathbb{R}^n$ είναι δύο κλειστά και ξένα μεταξύ τους σύνολα, τότε υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ τέτοια ώστε $f^{-1}(0) = A$ και $f^{-1}(1) = B$.

5. Να αποδειχθεί οτι για κάθε κλειστό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ και κάθε συνεχή συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, που επεκτείνει την f, δηλαδή τέτοια ώστε $F(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ
2ο Φύλλο Ασκήσεων

1. Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $f(x, y) = x^2 + xy + 2$. Αν $v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ και $p = (1, 1)$, να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος $f'(p; v)$.

2. Να υπολογιστεί σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της η παράγωγος της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(y) = \int_0^{y^2} e^{-x^2y^2}\,dx.$$

3. Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ υπάρχουν για κάθε $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Αν επιπλέον οι συναρτήσεις $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι τοπικά φραγμένες, να αποδειχθεί οτι η f είναι συνεχής.

4. Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{όταν } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{όταν } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(α) Να αποδειχθεί οτι για κάθε $v \in \mathbb{R}^2$ υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $f'((0, 0); v)$.
(β) Να αποδειχθεί οτι υπάρχουν v, $u \in \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε

$$f'((0, 0); v) + f'((0, 0); u) \neq f'((0, 0); v + u).$$

5. Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{όταν } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{όταν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

και $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $g(x, y) = (x, y + x^2)$.
(α) Να αποδειχθεί οτι οι κατευθυνόμενες παράγωγοι των f, g υπάρχουν παντού.
(β) Να αποδειχθεί οτι υπάρχει $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, τέτοιο ώστε η κατευθυνόμενη παράγωγος $(f \circ g)'((0, 0); v)$ δεν υπάρχει.

6. Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{όταν } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{όταν } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(α) Είναι η f συνεχής στο σημείο $(0,0)$;
(β) Είναι η f διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$;

7. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ στο σημείο $(0,0)$, αν υπάρχει, που δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2y^2\log(x^2+y^2), & \text{όταν } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{όταν } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

8. Εστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με την ιδιότητα $|f(x)|\leq\|x\|^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$. Να αποδειχθεί οτι η f είναι διαφορίσιμη στο 0.

9. Εστω $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση με $Df(0,\pi,1)=(2,1,7)$. Αν $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με $h(t)=f(\cos t,2t,\sin t)$, να υπολογιστεί η παράγωγος $h'(\frac{\pi}{2})$.

10. Εστω οτι $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση για την οποία $Df(0,0,0)=(-1,1,1)$. Αν $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με τύπο

$$h(x,y,z)=f(x+2y-z,-x+3y+z,x-y+z),$$

να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι της h στο σημείο $(0,0,0)$.

11. Εστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ μία ομογενής συνάρτηση βαθμού p, δηλαδή έχει την ιδιότητα $f(tx)=t^px$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ και $t\in\mathbb{R}$. Αν η f είναι διαφορίσιμη ατο σημείο $x\in\mathbb{R}^n$, να αποδειχθεί οτι $Df(x)x=pf(x)$.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ
3ο Φύλλο Ασκήσεων

1. Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{όταν } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{όταν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(α) Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι της f σε κάθε σημείο διαφορετικό από το $(0,0)$.
(β) Να αποδειχθεί οτι $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
(γ) Να αποδειχθεί οτι $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ και $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$. Πώς εξηγείται αυτό;

2. Εστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ η απεικόνιση με τύπο $f(x) = \|x\|^2 x$.
(α) Να αποδειχθεί οτι η $f|_{B(0,1)} : B(0,1) \to B(0,1)$ είναι ομοιομορφισμός.
(β) Να αποδειχθεί οτι, αν και η f είναι C^∞, η $(f|_{B(0,1)})^{-1}$ δεν είναι διαφορίσιμη στο 0.

3. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} x + x^2 \cos \dfrac{1}{x}, & \text{όταν } x \neq 0, \\ 0, & \text{όταν } x = 0. \end{cases}$$

(α) Να αποδειχθεί οτι η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$ και ειδικά $f'(0) = 1$.
(β) Να αποδειχθεί οτι η f δεν αντιστρέφεται διαφορίσιμα σε καμμία περιοχή του 0. Τί συμπέρασμα προκύπτει από αυτό;

4. Εστω $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η C^∞ απεικόνιση με

$$g(x,y) = (2ye^{2x}, ye^x)$$

και η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με

$$f(x,y) = (3x - y^2, 2x + y, 2y + y^2).$$

(α) Να αποδειχθεί οτι υπάρχει μία ανοιχτή περιοχή U του σημείου $(0,1)$ τέτοια ώστε το $g(U)$ είναι ανοιχτή περιοχή του σημείου $(0,2)$ και η $g|_U : U \to g(U)$ είναι C^∞ αμφιδιαφόριση.
(β) Να υπολογιστεί η παράγωγος $D(f \circ (g|_U)^{-1})(2,0)$.

5. Να αποδειχθεί οτι υπάρχει μία ανοιχτή περιοχή U της ταυτοτικής γραμμικής απεικόνισης $I_n \in GL(n, \mathbb{R})$ τέτοια ώστε για κάθε $T \in U$ υπάρχει $S \in GL(n, \mathbb{R})$ με $S^2 = T$.

6. Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f : A \to \mathbb{R}^n$ μία C^1 απεικόνιση τέτοια ώστε η παράγωγος $Df(x)$ είναι γραμμικός ισομορφισμός για κάθε $x \in A$. Να αποδειχθεί οτι το $f(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

7. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία C^1 συνάρτηση για την οποία υπάρχει $0 < c < 1$ ώστε $|f'(t)| \leq c$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$F(x, y) = (x + f(y), y + f(x))$$

είναι C^1 αμφιδιαφόριση.
(Υπόδειξη: Μιμηθείτε την απόδειξη του θεωρήματος της αντίστροφης συνάρτησης.)

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ
4ο Φύλλο Ασκήσεων

1. Εστω $I = [0, 1] \times [0, 1]$ και $f : I \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{όταν ο } x \text{ ή ο } y \text{ είναι άρρητος ή } y = 0, \\ \dfrac{1}{q}, & \text{όταν } x,\, y \in \mathbb{Q} \text{ με } y > 0 \text{ και } y = \dfrac{p}{q}, \text{ όπου } p,\, q \in \mathbb{N}, \text{ μ.κ.δ.}(p, q) = 1. \end{cases}$$

(α) Να αποδειχθεί οτι $\displaystyle\int_I f = 0$.

(β) Να αποδειχθεί οτι το ολοκλήρωμα Riemann $\displaystyle\int_0^1 f(x, y)dx$ δεν υπάρχει, όταν ο y είναι ρητός.

2. Εστω $a,\, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μία γνήσια αύξουσα συνάρτηση.

(α) Αν $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, να αποδειχθεί οτι $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathcal{O}(f, x_k) < f(b) - f(a)$.

(β) Να αποδειχθεί οτι για κάθε $\epsilon > 0$ το σύνολο $A_\epsilon = \{x \in [a, b] : \mathcal{O}(f, x) > \epsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

(γ) Να αποδειχθεί οτι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.

3. Εστω $I \subset \mathbb{R}^n$ ένα παραλληλεπίπεδο και $f,\, g : I \to \mathbb{R}$ δύο φραγμένες συναρτήσεις ώστε το σύνολο $D = \{x \in I : f(x) \neq g(x)\}$ να έχει n-διάστατο περιεχόμενο 0. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann, να αποδειχθεί ότι και η g είναι.

4. Εστω $I \subset \mathbb{R}^n$ ένα παραλληλεπίπεδο και $f : I \to \mathbb{R}$ μία μη-αρνητική και ολοκληρώσιμη κατά Riemann συνάρτηση. Αν $\displaystyle\int_I f = 0$, να αποδειχθεί οτι το σύνολο $D = \{x \in I : f(x) \neq 0\}$ έχει n-διάστατο μέτρο 0.

5. Αν $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα φραγμένο σύνολο με n-διάστατο περιεχόμενο 0, να αποδειχθεί οτι και η κλειστότητα $\overline{A}$ του A έχει n-διάστατο περιεχόμενο 0. Ισχύει το αντίστοιχο για φραγμένα σύνολα n-διάστατου μέτρου 0;

6. Εστω $I \subset \mathbb{R}^n$ ένα παραλληλεπίπεδο και $f : I \to \mathbb{R}$ μία φραγμένη και ολοκληρώσιμη κατά Riemann συνάρτηση. Να αποδειχθεί οτι το γράφημα

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in I\}$$

της f έχει $(n + 1)$-διάστατο περιεχόμενο 0.

7. Εστω $I \subset \mathbb{R}^n$ ένα παραλληλεπίπεδο και $\phi,\, \psi : I \to \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις ώστε $\psi(x) \leq \phi(x)$ για κάθε $x \in I$. Εστω

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \psi(x) \leq y \leq \phi(x), \quad x \in I\}$$

και $f : B \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση.
(α) Να αποδειχθεί οτι η συνάρτηση $g : I \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(x,y)dy$ είναι συνεχής.
(β) Να αποδειχθεί οτι

$$\int_B f = \int_I \left(\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

8. Αν $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y,\ 0 \leq y \leq 1\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_B e^{-(x-1)^2} dxdy.$$

9. Εστω A, $B \subset \mathbb{R}^n$ δύο Jordan μετρήσιμα σύνολα.
(α) Να αποδειχθεί οτι τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$ και $A \setminus B$ είναι επίσης Jordan μετρήσιμα.
(β) Να αποδειχθούν οι ισότητες $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ και $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$.

10. Εστω $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία συμπαγών Jordan μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Αν $\lim\limits_{n \to +\infty} \mu(C_n) = 0$, να αποδειχθεί οτι το σύνολο $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ έχει n-διάστατο μέτρο 0.

11. Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα Jordan μετρήσιμο σύνολο.
(α) Να αποδειχθεί οτι το εσωτερικό A° του A είναι επίσης Jordan μετρήσιμο σύνολο και $\mu(A^\circ) = \mu(A)$.
(β) Να αποδειχθεί οτι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα συμπαγές Jordan μετρήσιμο σύνολο $K \subset A$ τέτοιο ώστε $\mu(A \setminus K) < \epsilon$.

12. Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα Jordan μετρήσιμο σύνολο ώστε $A = B \cup C$, όπου τα B, C είναι Jordan μετρήσιμα σύνολα με $B^\circ \cap C^\circ = \varnothing$. Αν η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann, να αποδειχθεί οτι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στα B, C και

$$\int_A f = \int_B f + \int_C f.$$

13. Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα Jordan μετρήσιμο σύνολο και f, $g : A \to \mathbb{R}$ δύο φραγμένες και ολοκληρώσιμες κατά Riemann συναρτήσεις με $g \geq 0$. Αν $m = \inf\{f(x) : x \in A\}$ και $M = \{f(x) : x \in A\}$, να αποδειχθεί οτι υπάρχει $n \leq \lambda \leq M$ τέτοιο ώστε

$$\int_A f \cdot g = \lambda \cdot \int_A g.$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ
5ο Φύλλο Ασκήσεων

1. Εστω οτι $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy + 2y^2 \leq 1\}$.
(α) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του K.
(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_K xydxdy$.

2. Θέτουμε $D_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$, για κάθε $a > 0$.
(α) Να αποδειχθεί οτι

$$\int_{D_a} e^{-x^2-y^2} dxdy = \pi(1 - e^{-a^2}).$$

(β) Να αποδειχθεί οτι

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim_{a\to+\infty} \int_{D_a} e^{-x^2-y^2} dxdy = \pi.$$

Συνεπώς, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

3. Αν $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση και

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\},$$

να αποδειχθεί οτι

$$\int_B f(x+y)dxdy = \int_{-1}^{1} f(t)dt.$$

(Υπόδειξη: Θεωρείστε τον μετασχηματισμό $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $g(x,y) = (x+y, y-x)$ και βρείτε το χωρίο $g(B)$.)

4. Εστω $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ μία βάση του $\mathbb{R}^n$ και

$$P = \{t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n : 0 \leq t_1, t_2, ..., t_n \leq 1\}$$

το πλάγιο παραλληλεπίπεδο του παράγουν. Να αποδειχθεί οτι ο n-διάστατος όγκος του P είναι $\mu(P) = |\det(x_1, x_2, ..., x_n)|$, όπου $(x_1, x_2, ..., x_n)$ είναι ο πίνακας με στήλες $x_1, x_2, ..., x_n$.

5. Αν $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι μία ευκλείδεια ισομετρία, να αποδειχθεί οτι $\mu(g(K)) = \mu(K)$ για κάθε συμπαγές Jordan μετρήσιμο σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$.

6. Να αποδειχθεί οτι ο n-διάστατος όγκος του standard n-simplex

$$\Delta_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 1, \quad 0 \leq x_1, x_2, ..., x_n \leq 1\}$$

είναι $\mu(\Delta_n) = \dfrac{1}{n!}$.
(Υπόδειξη: Θεωρείστε το μετασχηματισμό $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με τύπο

$$g(x_1, x_2, ..., x_n) = (1 - x_1, x_1(1 - x_2), ..., x_1 \cdots x_{n-1}(1 - x_n).)$$

7. Εστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και $\phi : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ μια C^∞ συνάρτηση με $\phi(x) = 0$, όταν $\|x\| > 1$ και $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την συνάρτηση $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x + \frac{y}{k})\phi(y)dy.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι η f_k είναι C^∞ στο $\mathbb{R}^n$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
(β) Να αποδειχθεί οτι $f = \lim\limits_{k \to +\infty} f_k$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ
6ο Φύλλο Ασκήσεων

1. Να υπολογιστεί το $d\omega$ όταν
(α) $\omega = x^2 y dy - xy dx$,
(β) $\omega = f(x, y)dx$, όπου $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μία λεία συνάρτηση,
(γ) $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, όπου οι P, Q, $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι λείες συναρτήσεις.

2. Αν $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i$ και $\beta = \sum_{i=1}^n \beta_i dx^i$ στον $\mathbb{R}^n$, δείξτε οτι

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{i<j} (\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i) dx^i \wedge dx^j.$$

3. Να υπολογιστεί το $d\omega$, όταν $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$.

4. Αν $\rho = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x^j dx^1 \wedge ... \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge ... \wedge dx^n$ στον $\mathbb{R}^n$, να αποδειχθεί οτι $d\rho = dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$.

5. Εστω $M \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $\omega \in A^1(M)$. Αν υπάρχει $f \in C^\infty(M)$ τέτοια ώστε $f(p) \neq 0$ για κάθε $p \in M$ και η $f\omega$ να είναι κλειστή, να αποδειχθεί οτι $\omega \wedge d\omega = 0$.

6. Εστωσαν $M \subset \mathbb{R}^m$ και $N \subset \mathbb{R}^n$ δύο ανοιχτά σύνολα, όπου $m \geq n$ και $f : M \to N$ μία submersion επί του N. Να αποδειχθεί οτι η $f^* : A(N) \to A(M)$ είναι γραμμικός μονομορφισμός.

7. Να αποδειχθεί οτι $H^1(\mathbb{R}) = 0$.

8. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια λεία, περιοδική συνάρτηση με περίοδο 1, δηλαδή $f(x+1) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί οτι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ και μια λεία, περιοδική συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με περίοδο 1, ώστε $fdx = \lambda dx + dg$ στο $\mathbb{R}$.

9. Στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ θεωρούμε την διαφορική 1-μορφή

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

(α) Να αποδειχθεί οτι η ω είναι κλειστή, αλλά δεν είναι ακριβής.

(β) Εστω $F : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ η λεία τοπική αμφιδιαφόριση (εκθετική απεικόνιση) με τύπο

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta).$$

Να αποδειχθεί οτι $F^*\omega = d\theta$.

(γ) Εστω η μια κλειστή, διαφορική 1-μορφή στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Να αποδειχθεί οτι υπάρχουν $\lambda \in \mathbb{R}$, μια λεία, περιοδική συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με περίοδο 2π και μια λεία συνάρτηση $h : (0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $h(\rho, \theta + 2\pi) = h(\rho, \theta)$ για κάθε $\rho > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, ώστε

$$F^*\eta = dh + \lambda d\theta + g'(\theta)d\theta$$

στο $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$.

(δ) Να αποδειχθεί οτι $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \cong \mathbb{R}$.

(Υπόδειξη : Για το (γ) χρησιμοποιείστε την άσκηση 8 και για το (δ) την άσκηση 6.)

10. Εστω $M \subset \mathbb{R}^3$ ένα ανοικτό σύνολο. Για κάθε $\alpha \in A^1(M)$ υπάρχουν μοναδικές $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in C^\infty(M)$, ώστε $\alpha = \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2 + \alpha_3 dx^3$. Η $\phi : \mathcal{X}(M) \to A^1(M)$ με

$$\phi(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x^3}) = \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2 + \alpha_3 dx^3$$

είναι ισομορφισμός. Για κάθε $\theta \in A^2(M)$ υπάρχουν μοναδικές $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in C^\infty(M)$ ώστε $\theta = \beta_1 dx^2 \wedge dx^3 + \beta_2 dx^3 \wedge dx^1 + \beta_3 dx^1 \wedge dx^2$ και η $\psi : \mathcal{X}(M) \to A^2(M)$ με

$$\psi(\beta_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \beta_3 \frac{\partial}{\partial x^3}) = \theta$$

είναι ισομορφισμός. Τέλος, η $\mu : C^\infty(M) \to A^3(M)$ με $\mu(f) = f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ είναι ισομορφισμός. Να αποδειχθεί οτι $\phi(\xi) \wedge \phi(\zeta) = \psi(\xi \times \zeta)$ και $\phi(\xi) \wedge \psi(\zeta) = \mu(\langle \xi, \zeta \rangle)$ για κάθε ξ, $\zeta \in \mathcal{X}(M)$, όπου $\times$ είναι το εξωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$ και $\langle , \rangle$ είναι το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο και οτι το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccccccc}
C^\infty(M) & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathcal{X}(M) & \xrightarrow{\text{curl}} & \mathcal{X}(M) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(M) \\
\downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\
C^\infty(M) & \xrightarrow{d} & A^1(M) & \xrightarrow{d} & A^2(M) & \xrightarrow{d} & A^3(M)
\end{array}$$

11. Εστω $M \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $\omega \in A^1(M)$, ώστε $\omega \wedge dx^1 \wedge ... \wedge dx^k = 0$, όπου $k < n$. Να αποδειχθεί οτι υπάρχουν $f_1, ..., f_k \in C^\infty(M)$ ώστε

$$\omega = f_1 dx^1 + ... + f_k dx^k.$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ
7ο Φύλλο Ασκήσεων

1. Εστω $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ και $\omega \in A^1(M)$ με τύπο

$$\omega = (xy - \sin z)dx + (\frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z})dy + (\frac{e^y}{z^2} - x\cos z)dz.$$

(α) Υπάρχει $f \in C^\infty(M)$ τέτοια ώστε $df = \omega$; Αν ναί, να ευρεθεί μία τέτοια f.
(γ) Αν $\gamma : [0,1] \to A$ είναι ένας οποιοσδήποτε C^∞ 1-κύβος με $\gamma(0) = (0,0,1)$ και $\gamma(1) = (0,1,1)$, να υπολογιστεί ολοκλήρωμα $\int_\gamma \omega$.

2. Δίνεται στον $\mathbb{R}^3$ η διαφορική 2-μορφή

$$\omega = 2xzdy \wedge dz + dz \wedge dx - (z^2 + e^x)dx \wedge dy.$$

Υπάρχει διαφορική 1-μορφή η στον $\mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $d\eta = \omega$; Αν ναί, να ευρεθεί μία τέτοια η.

3. Εστω $M \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $\gamma : [0,1]^k \to M$ ένας C^∞ k-κύβος. Εστω U, V δύο ανοιχτές περιοχές του $[0,1]^k$ στον $\mathbb{R}^k$ και $F : U \to V$ μία C^∞ αμφιδιαφόριση με $\det DF(x) > 0$ για κάθε $x \in U$. Να αποδειχθεί οτι

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma \circ F} \omega.$$

4. Εστω $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ ένα μιγαδικό πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$. Για κάθε $R > 0$ ορίζεται ο C^∞ 1-κύβος $\gamma_{R,n} : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ με τύπο

$$\gamma_{R,n}(s) = (R\cos 2\pi ns, R\sin 2\pi ns).$$

Θέτουμε $\gamma_{R,f} = f \circ \gamma_{R,1}$ και θεωρούμε τον C^∞ 2-κύβο $\gamma : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$με τύπο

$$\gamma(s,t) = t\gamma_{R^n,n}(s) + (1-t)\gamma_{R,f}(s).$$

(α) Να αποδειχθεί οτι $\partial\gamma = \gamma_{R,f} - \gamma_{R^n,n}$.
(β) Εστω

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Αν $f(z) \neq 0$ για κάθε $|z| \leq R$, να αποδειχθεί οτι

$$\int_{\gamma_{R,f}} \omega = 0.$$

(γ) Να αποδειχθεί το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αλγεβρας: Κάθε μιγαδικό πολυώνυμο θετικού βαθμού έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{C}$.

5. Εστω $M \subset \mathbb{C}$ ένα ανοιχτό σύνολο. Μία μιγαδική διαφορική k-μορφή είναι της μορφής $\omega + i\theta$, όπου $i = \sqrt{-1}$ και οι ω, θ είναι διαφορικές k-μορφές στο M, $k = 0, 1, 2$. Ορίζουμε

$$(\omega + i\theta) \wedge (\eta + i\zeta) = (\omega \wedge \eta - \theta \wedge \zeta) + i(\theta \wedge \eta + \omega \wedge \zeta),$$

$$d(\omega + i\theta) = d\omega + id\eta,$$

$$\int_\gamma \omega + i\theta = \int_\gamma \omega + i \int_\gamma \theta$$

για κάθε C^∞ k-κύβο γ στο M. Θέτουμε επίσης $dz = dx + idy$.
(α) Να αποδειχθεί οτι μία C^∞ συνάρτηση $f : M \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη τότε και μόνο τότε όταν $d(fdz) = 0$.
(β) Εστω $f : M \to \mathbb{C}$ μία ολόμορφη συνάρτηση και $\gamma : [0, 1] \to M$ ένας C^∞ 1-κύβος για τον οποίο υπάρχει κάποιος C^∞ 2-κύβος σ στο M ώστε $\gamma = \partial\sigma$. Να αποδειχθεί οτι

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

(γ) Εστω $z_0 \in M$ και $R > 0$ τέτοιο ώστε $\overline{B(z_0, R)} \subset M$. Αν η συνάρτηση $f : M \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη, να αποδειχθεί οτι

$$\int_{\partial B(z_0,R)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

για κάθε $0 < r \leq R$ και

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,R)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Να αποδειχθεί επίσης ότι

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,R)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

(δ) Να αποδειχθεί το Θεώρημα του Liouville: Κάθε φραγμένη ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι σταθερή.
(ε) Να αποδειχθεί το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αλγεβρας.