.

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

# ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΧΩΡΙΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΕΙΚΑΣΙΑ ΤΟΥ SEIFERT

ΕΛΕΝΗ ΜΕΝΙΟΥΔΑΚΗ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2000

.

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία έγινε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης και κατατέθηκε τον Οκτώβριο του 2000. Επιβλέπων ήταν ο Κ. Αθανασόπουλος.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι Κ. Αθανασόπουλος, Δ. Γατζούρας και Χ. Κουρουνιώτης.

.

...στους γονείς μου και στη Βιβή...

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

# Εισαγωγή

Το θέμα αυτής της εργασίας είναι η κατασκευή δυναμικών συστημάτων στην 3-σφαίρα, χωρίς περιοδικές τροχιές και χωρίς σταθερά σημεία. Όπως είναι γνωστό, σε άλλες συμπαγείς 3-πολλαπλότητες χωρίς σύνορο, όπως για παράδειγμα στον 3-torus $T^3$, υπάρχουν τέτοια δυναμικά συστήματα. Το 1950 ο H. Seifert απέδειξε ότι κάθε $C^1$ διανυσματικό πεδίο στην $S^3$, του οποίου τα διανύσματα σχηματίζουν αρκετά μικρές γωνίες με το διανυσματικό πεδίο που εφάπτεται της Hopf fibration, έχει τουλάχιστον μία περιοδική τροχιά. Ταυτόχρονα διατύπωσε το ερώτημα, αν κάθε διανυσματικό πεδίο στην $S^3$ χωρίς σταθερά σημεία, έχει τουλάχιστον μία περιοδική τροχιά. Από τότε έγιναν προσπάθειες απόδειξης της εικασίας, για ειδικές κλάσεις διανυσματικών πεδίων, αλλά και αρνητικής απάντησής της. Το πρώτο αντιπαράδειγμα δόθηκε από τον P. Schweitzer [Sch] το 1974, που ήταν όμως μόνο $C^1$ και δεν μπορεί να γίνει περισσότερο λείο. Το 1988 δόθηκε $C^2$ αντιπαράδειγμα από την J. Harrison. Το $C^\infty$ αντιπαράδειγμα δόθηκε το 1994 από την K. Kuperberg [KuK]. Η κατασκευή του αντιπαραδείγματος αυτού στηρίζεται στην ιδέα του Schweitzer και χρησιμοποιεί τη μέθοδο των plugs.

Στο αντιπαράδειγμα του P. Schweitzer, ξεκινάμε με ένα μη-μηδενιζόμενο $C^\infty$ διανυσματικό πεδίο $X_1$ στην $S^3$ με μία μόνο περιοδική τροχιά. Στόχος είναι να «σπάσουμε» αυτήν την τροχιά, χωρίς όμως να δημιουργηθούν καινούριες περιοδικές τροχιές. Θεωρούμε μία αμφιδιαφόριση Denjoy στον κύκλο. Πρόκειται για μία $C^1$ αμφιδιαφόριση $f : S^1 \to S^1$ που διατηρεί τον προσανατολισμό και έχει ένα μη-τετριμμένο ελάχιστο σύνολο $L$, ομοιομορφικό με το σύνολο του Cantor. Με τη μέθοδο της ανάρτησης κατασκευάζεται ένα $C^1$ διανυσματικό πεδίο στον mapping torus της $f$. Καθώς αυτός είναι $C^1$ αμφιδιαφορίσιμος με τον torus $T^2$, παίρνουμε ένα $C^1$ διανυσματικό πεδίο $\mathcal{V}$ στον $T^2$. Το $\mathcal{V}$ έχει ένα μη-τετριμμένο ελάχιστο σύνολο $\mathcal{M}$ και καμία σταθερή, περιοδική ή πυκνή τροχιά στον $T^2$. Η κατασκευή αυτή παρουσιάζεται αναλυτικά στο κεφάλαιο II.

Στο κεφάλαιο III, αφού παρουσιάσουμε τις βασικές έννοιες της θεωρίας των plugs, περιγράφουμε λεπτομερώς το αντιπαράδειγμα του Schweitzer. Ορίζουμε στην $3-$πολλαπλότητα $T^2 \times [-1,1]$ ένα $C^1$ διανυσματικό πεδίο $\mathcal{E}$, το οποίο έχει μοναδικό ελάχιστο σύνολο το $\mathcal{M} \times \{0\}$ και κατασκευάζουμε μία plug $\Phi$ που έχει βάση τον $T^2 \setminus \{\text{εσωτερικό ενός δίσκου}\}$ και δεν έχει περιοδικές τροχιές. Εισάγουμε τότε την $\Phi$ σε ένα flow box γύρω από ένα σημείο της περιοδικής τροχιάς του $X_1$, που αντιστοιχεί σε σημείο του συνόλου $\mathcal{M} \times [-1,1]$. Ετσι παίρνουμε ένα $C^1$ διανυσματικό πεδίο $\mathcal{S}$ στην $S^3$, χωρίς περιοδικές τροχιές και χωρίς σταθερά σημεία. Το $\mathcal{S}$ δεν επιδέχεται βελτίωση στο βαθμό διαφορισιμότητάς του, διότι η κατασκευή του στηρίζεται στην αμφιδιαφόριση Denjoy, που είναι μόνον $C^1$, αφού δεν υπάρχουν $C^2$ αμφιδιαφορίσεις Denjoy.

Η K. Kuperberg ξεκινά με το $X_1$ στην $S^3$ και με μία plug $\mathcal{W}$, «τύπου» Wilson. Η $\mathcal{W}$, η οποία έχει φορέα τον στερεό torus $W = \{(r,\theta,z) : r,z \in [-1,1], \theta \in \mathbb{R}/10\mathbb{Z}\}$, έχει ακριβώς δύο περιοδικές τροχιές $T_1, T_2$ σταθερής ακτίνας $r=0$, στα επίπεδα $z = -\frac{1}{2}$ και $z = +\frac{1}{2}$. Κάνοντας εισαγωγή της $\mathcal{W}$ στην περιοδική τροχιά $L$ του $X_1$, δημιουργείται ένα νέο πεδίο στην $S^3$ όπου η $L$ έχει καταστραφεί, αλλά έχουν δημιουργηθεί δύο καινούριες περιοδικές τροχιές, οι $T_1, T_2$. Η ιδέα της Kuperberg ήταν, πριν κάνει εισαγωγή της $\mathcal{W}$ στην $S^3$, να κάνει πρώτα εισαγωγή της $\mathcal{W}$ στον εαυτό της, ώστε να σπάσει τις περιοδικές της τροχιές. Έτσι δημιουργείται μία καινούρια plug $\mathcal{K}$, χωρίς περιοδικές τροχιές, η οποία εισάγεται πλέον σε ένα flow box γύρω από ένα σημείο της τροχιάς $L$ του $X_1$, που αντιστοιχεί σε σημείο της μορφής $(0,\theta,-1)$. Το αποτέλεσμα είναι ένα $C^\infty$ διανυσματικό πεδίο στην $S^3$, χωρίς σταθερά σημεία και χωρίς περιοδικές τροχιές.

# I. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

## 1. Διανυσματικά πεδία σε πολλαπλότητες.

Θεωρούμε μια $C^\infty$ $n$-πολλαπλότητα $M$ και $1 \leq k \leq \infty$. Ένα $C^k$ *διανυσματικό πεδίο στην* $M$ είναι μία $C^k$ απεικόνιση $\xi : M \to TM$, τέτοια ώστε για κάθε $p \in M$ το $\xi(p)$ είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της $M$ με σημείο εφαρμογής το $p$. Μία $C^k$ καμπύλη $\gamma : I \to M$, όπου το $I \subset \mathbb{R}$ είναι ένα ανοικτό διάστημα, λέγεται *ολοκληρωτική καμπύλη του* $\xi$, αν $\dot{\gamma}(t) = \xi(\gamma(t))$ για κάθε $t \in I$. Η απόδειξη του ακόλουθου Θεωρήματος βρίσκεται στο [Boo], Ch. IV, Theorem 4.2.

**Θεώρημα 1.1.** *Έστω $\xi$ ένα $C^k$ διανυσματικό πεδίο, $1 \leq k \leq \infty$, στην πολλαπλότητα $M$. Τότε για κάθε $p \in M$ υπάρχουν μία ανοικτή περιοχή $V$, ένα $\epsilon > 0$ και μία $C^k$ απεικόνιση $\phi^V : (-\epsilon, \epsilon) \times V \to M$, ώστε*

$$\frac{\partial \phi^V}{\partial t}(s,q) = \xi(\phi^V(s,q))$$

*για κάθε $(s,q) \in (-\epsilon,\epsilon) \times V$ και $\phi^V(0,q) = q$ για κάθε $q \in V$. Επιπλέον, για κάθε ολοκληρωτική καμπύλη $\gamma : I \to M$ του $\xi$, με $\gamma(0) = q \in V$, ισχύει $\phi^V(\cdot,q)|_{I\cap(-\epsilon,\epsilon)} = \gamma|_{I\cap(-\epsilon,\epsilon)}$. Ειδικά, η $\phi^V$ είναι μοναδική, δηλαδή αν $\epsilon', V'$ είναι ένα άλλο τέτοιο ζεύγος που αντιστοιχεί στο $p \in M$, τότε $\phi^V = \phi^{V'}$ στο $((-\epsilon,\epsilon) \times V) \cap ((-\epsilon',\epsilon') \times V')$.*

Η $\phi^V$ λέγεται *τοπική ροή του $\xi$ γύρω από το $p$*. Στη συνέχεια, υποθέτουμε πάντα ότι το $\xi$ είναι ένα $C^k$ διανυσματικό πεδίο στην $C^\infty$ $n$-πολλαπλότητα $M$, $1 \leq k \leq \infty$.

**Πρόταση 1.2.** *Για κάθε $p \in M$ υπάρχει ένα μοναδικό ανοικτό διάστημα $I_p = (a_p, b_p)$ που περιέχει το $0$, με τις ακόλουθες ιδιότητες*

*α) Υπάρχει μία ολοκληρωτική καμπύλη $\gamma : I_p \to M$ του $\xi$, με $\gamma(0) = p$.*

*β) Αν $g : I \to M$ είναι μία οποιαδήποτε άλλη ολοκληρωτική καμπύλη του $\xi$ με $g(0) = p$, τότε $I \subset I_p$ και $g = \gamma|I$.*

Δηλαδή για κάθε $p \in M$ υπάρχει μία μέγιστη ολοκληρωτική καμπύλη $\phi_p : I_p \to M$ με αρχική συνθήκη $\phi_p(0) = p$. (Βλ. [Boo], Ch. IV, Theorem 4.3.)

**Λήμμα 1.3.** *Έστω $p \in M$, $t \in I_p$ και $q = \phi_p(t)$. Τότε $I_q = I_p - t = (a_p - t, b_p - t) = (a_q, b_q)$ και $\phi_q(s) = \phi_p(t+s)$ για κάθε $s \in I_q$.* (Βλ. [Boo], Ch. IV, Corollary 4.4.)

Θέτουμε τώρα $D(\xi) = \{(t,p) \in \mathbb{R} \times M : t \in I_p\}$. Το $D(\xi)$ περιέχει μία ανοικτή περιοχή του $\{0\} \times M$. Η καλώς ορισμένη απεικόνιση $\phi : D(\xi) \to M$ με τύπο $\phi(t,p) = \phi_p(t)$ λέγεται *ροή του* $\xi$ και ικανοποιεί

ι) $\phi(0,p) = p$ για κάθε $p \in M$.

ιι) $\phi(t, \phi(s,p)) = \phi(t+s, p)$ οποτεδήποτε κάποιο από τα δύο μέλη ορίζεται, οπότε ορίζεται και το άλλο και είναι ίσα από το Λήμμα 1.3.

**Θεώρημα 1.4.** *Το $D(\xi)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R} \times M$ και η ροή $\phi$ είναι $C^k$ απεικόνιση.* (Βλ. [Boo], Ch. IV, Theorem 4.5.)

Το $I_p$ ενδέχεται να μην είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$, δηλαδή $D(\xi) \subsetneqq \mathbb{R} \times M$ εν γένει. Αν $D(\xi) = \mathbb{R} \times M$, τότε το $\xi$ λέγεται *πλήρες διανυσματικό πεδίο.* Κάθε διανυσματικό πεδίο που ορίζεται σε συμπαγή πολλαπλότητα, είναι πλήρες. (Βλ. [Boo], Ch.IV, Corollary 5.6). Αν $\phi : D \to M$ είναι μία λεία ροή, ορίζεται το λείο διανυσματικό πεδίο $\xi : M \to TM$ με τύπο $\xi(p) = \dfrac{\partial \phi}{\partial t}(0,p)$. Το $\xi$ λέγεται *απειροστικός γεννήτορας της $\phi$.* Η τοπική ροή γύρω από ένα σημείο στο οποίο το $\xi$ δε μηδενίζεται, περιγράφεται από το ακόλουθο.

**Θεώρημα 1.5. (Ύπαρξης flow box)** *Έστω $\xi$ ένα λείο διανυσματικό πεδίο στην $n$-πολλαπλότητα $M$ και $p \in M$. Αν $\xi(p) \neq 0$, τότε υπάρχει ένας χάρτης $(U, \sigma)$ με $p \in U$, ώστε $\xi|_U = \dfrac{\partial}{\partial x^1}$.* (Βλ. [Boo], Ch. IV, Theorem 3.14.)

Η συμπεριφορά αυτή, είναι ειδική περίπτωση της έννοιας της foliation. Θεωρούμε μία $C^\infty$ $n$-πολλαπλότητα $M$, με ή χωρίς σύνορο και

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \psi_i) : i \in I\}$$

έναν $C^r$ άτλαντα της $M$, $0 \leq r \leq \infty$. Έστω $\mathcal{F} = \{L_j : j \in J\}$ μία οικογένεια συνεκτικών κατά τόξα υποσυνόλων της $M$. Θα λέμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι μία $k$-διάστατη $C^r$ foliation της $M$, αν

1) $L_j \cap L_m = \varnothing$ για κάθε $j, m \in J$ με $j \neq m$.

2) $\bigcup_{j \in J} L_j = M$.

3) για κάθε $p \in M$ υπάρχει χάρτης $(U_i, \psi_i) \in \mathcal{A}$ γύρω από το $p$, τέτοιος ώστε για κάθε $L_j \in \mathcal{F}$ με $U_i \cap L_j \neq \varnothing$, $j \in J$, κάθε συνεκτική κατά τόξα συνιστώσα του $\psi_i(U_i \cap L_j)$ είναι της μορφής $\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \psi_i(U_i) : x_{k+1} = c_{k+1}, x_{k+2} = c_{k+2}, ..., x_n = c_n\}$, όπου οι $c_{k+1}, c_{k+2}, ..., c_n$ είναι σταθερές που ορίζονται από την συνεκτική κατά τόξα συνιστώσα. Δηλαδή μία $k$ -foliation $\mathcal{F}$, είναι ένας άτλας χαρτών στο $\mathbb{R}^n$ που διατηρούν τη διαμέριση του $\mathbb{R}^n$ σε κόπιες του $\mathbb{R}^k$, η οποία αποτελεί την *τετριμμένη* $k$ -foliation του $\mathbb{R}^n$.

Ονομάζουμε το $L_j$ *φύλλο της* foliation $\mathcal{F}$, που είναι προφανώς immersed υποπολλαπλότητα της $M$. Μία πολλαπλότητα $M$ εφοδιασμένη με μία foliation $\mathcal{F}$, ονομάζεται foliated *πολλαπλότητα.* Ένας χάρτης $(U_i, \psi_i) \in \mathcal{A}$ που ικανοποιεί την ιδιότητα 3) ονομάζεται foliated *χάρτης* ή foliated *περιοχή.* (Βλ. [Tam], Ch. IV, §16). Από το Θεώρημα ύπαρξης flow box, προκύπτει ότι κάθε $C^k$ διανυσματικό πεδίο που δε μηδενίζεται πουθενά, ορίζει μία 1-διάστατη $C^k$ foliation, με φύλλα τις εικόνες των ολοκληρωτικών καμπυλών του πεδίου.

Έστω τώρα $M$ μία $n$-πολλαπλότητα, $\mathcal{F}$ μία $k$-foliation στην $M$ και $N$ μία $j$-υποπολλαπλότητα της $M$ με $j + k \geq n$. Οι $N$ και $\mathcal{F}$ *τέμνονται εγκάρσια στο* $p \in M$ αν υπάρχει χάρτης $(U, \psi)$ του $p$ στην $M$, ώστε η $\mathcal{F}|_U$ να απεικονίζεται μέσω της $\psi$ σε παράλληλα $k$-επίπεδα που τέμνουν το $j$-επίπεδο $\psi(U \cap N) \subset \mathbb{R}^n$ σε $(j + k - n)$-επίπεδα. Δηλαδή ισχύει $T_pM = T_pN + T_pL_j$ για κάθε $j \in J$ με $p \in L_j$.

Μία *$n$-πολλαπλότητα με ο-γωνίες* είναι ένας συμπαγής 2ος αριθμήσιμος χώρος Hausdorff, που είναι τοπικά ομοιομορφικός με κάποιο ανοικτό υποσύνολο του

$$O = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k \geq 0 \text{ για κάθε } k = 1, 2, ...n\}.$$

Στην εργασία αυτή θα θεωρήσουμε $C^\infty$ $n$-πολλαπλότητες με ο-γωνίες, που ορίζονται με εντελώς ανάλογο τρόπο όπως οι $C^\infty$ πολλαπλότητες με σύνορο. Προφανώς κάθε $C^\infty$

πολλαπλότητα με σύνορο, είναι $C^\infty$ πολλαπλότητα με ο-γωνίες. Όμως ένα παραλληλεπίπεδο, για παράδειγμα, είναι $C^\infty$ πολλαπλότητα με ο-γωνίες, αλλά όχι $C^\infty$ πολλαπλότητα με σύνορο. Βέβαια κάθε πολλαπλότητα με ο-γωνίες είναι τοπολογική πολλαπλότητα με σύνορο.

Μία foliation σε μία $C^\infty$ $n$-πολλαπλότητα με ο-γωνίες $M$ είναι μία foliation του εσωτερικού της $M$, που επεκτείνεται σε μία foliation μίας ανοικτής $C^\infty$ $n$-πολλαπλότητας που περιέχει την $M$.

## 2. Δυναμικά συστήματα.

Ένα $C^k$ *δυναμικό σύστημα*, $0 \leq k \leq \infty$, *με συνεχή χρόνο σε μία πολλαπλότητα*, είναι ένα ζεύγος $(M, \Phi)$, όπου $M$ είναι μία πολλαπλότητα και $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ μία $C^k$ απεικόνιση που ικανοποιεί

ι) $\Phi(0, x) = x$ για κάθε $x \in M$.

ιι) $\Phi(t+s, x) = \Phi(s, \Phi(t, x))$ για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$ και για κάθε $x \in M$.

Η πολλαπλότητα $M$ ονομάζεται *χώρος φάσεων του συστήματος* και η απεικόνιση $\Phi$ λέγεται ροή. Συχνά, όμως, δε γίνεται διαχωρισμός των εννοιών της ροής και του δυναμικού συστήματος. Ολοκληρώνοντας ένα πλήρες λείο διανυσματικό πεδίο, παίρνουμε ένα δυναμικό σύστημα στην $M$. Αντίστροφα, αν $\Phi$ είναι ένα $C^\infty$ δυναμικό σύστημα, ο τύπος $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}(0, x) = \mathcal{V}(x)$ ορίζει ένα $C^\infty$ διανυσματικό πεδίο στην $M$. Αν στον παραπάνω ορισμό αντικαταστήσουμε το $\mathbb{R}$ με το $\mathbb{Z}$, έχουμε τον ορισμό ενός *δυναμικού συστήματος με διακριτό χρόνο.* Στην περίπτωση αυτή, υπάρχει μία $C^k$ αμφιδιαφόριση $f : M \to M$, τέτοια ώστε $\Phi(k, x) = f^k(x)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και $x \in M$. Οι παρακάτω ορισμοί έχουν νόημα για δυναμικά συστήματα με συνεχή, αλλά και διακριτό χρόνο.

Το σύνολο $C(x) = \{\Phi(t, x) : t \in \mathbb{R}\}$ ονομάζεται *τροχιά του σημείου* $x \in M$, το σύνολο $C^+(x) = \{\Phi(t, x) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *θετική ημιτροχιά του* $x$, ενώ το σύνολο $C^-(x) = \{\Phi(t, x) : t \in \mathbb{R}^-\}$ *αρνητική ημιτροχιά του* $x$. Ένα σύνολο $A \subset M$ ονομάζεται *θετικά αναλλοίωτο,* αν $C^+(x) \subset A$ για κάθε $x \in A$ και *αρνητικά αναλλοίωτο,* αν $C^-(x) \subset A$ για κάθε $x \in A$. Το $A$ λέγεται *αναλλοίωτο,* αν $C(x) \subset A$ για κάθε $x \in A$.

**Λήμμα 2.1.** *Έστω $A \subset M$ ένα αναλλοίωτο σύνολο. Τότε και τα $\overline{A}$, $M \setminus A$ είναι αναλλοίωτα σύνολα.* (Βλ. [Sib], Ch.1, Theorem 4.4, Theorem 4.5.)

Έστω $(M, \Phi)$ ένα δυναμικό σύστημα. Για κάθε $x \in M$ ορίζεται η συνεχής και επί απεικόνιση $\Phi_x : \mathbb{R} \to C(x) \subset M$ με τύπο $\Phi_x(t) = \Phi(t, x)$. Το σύνολο $C_x = \Phi_x^{-1}(x) = \{t \in \mathbb{R} : \Phi(t, x) = x\}$ είναι κλειστή προσθετική υποομάδα του $\mathbb{R}$ και ονομάζεται *ομάδα ισοτροπίας του σημείου* $x$. Το ακόλουθο Λήμμα αποδεικνύεται εύκολα.

**Λήμμα 2.2.** *Έστω $H$ μία κλειστή υποομάδα του $\mathbb{R}$. Τότε ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω.*

*α)* $H = \mathbb{R}$.

*β) Υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $H = \lambda\mathbb{Z}$.*

*γ)* $H = \{0\}$.

Αν για κάποιο $x \in M$ ισχύει $C_x = \mathbb{R}$, τότε $C(x) = \{x\}$ και το $x$ λέγεται *σταθερό σημείο,* ενώ αν $C_x = \lambda\mathbb{Z}$, τότε το $x$ λέγεται *περιοδικό σημείο,* η τροχιά του $C(x)$ *περιοδική τροχιά* και είναι ομοιομορφική με τον $S^1$. Αν τώρα $C_x = \{0\}$, τότε η $\Phi_x : \mathbb{R} \to C(x)$

είναι μία συνεχής, 1-1 και επί συνάρτηση και ισχύουν τα ακόλουθα.

**Λήμμα 2.3.** *Έστω $x \in M$ με $C_x = \{0\}$. Τότε η τροχιά $C(x)$ είναι ομοιομορφική με το $\mathbb{R}$, αν και μόνο αν η $\Phi_x$ είναι ομοιομορφισμός.* (Βλ. [Sib], Ch. II, Corollary 2.11)

**Θεώρημα 2.4.** *Έστω $x \in M$ με $C_x = \{0\}$. Τότε η τροχιά $C(x)$ δεν είναι ομοιομορφική με το $\mathbb{R}$, αν και μόνο αν υπάρχει μία ακολουθία $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{R}$ που αποκλίνει θετικά ή αρνητικά, ώστε $\Phi(t_n, x) \to x$ στην $M$.* (Βλ. [Sib], Ch. II, Corollary 1.11)

Θεωρούμε πάλι ένα δυναμικό σύστημα $(M, \Phi)$. Ονομάζουμε *θετικό οριακό σύνολο του σημείου* $x \in M$, το σύνολο $L^+(x) = \{y \in M : \text{υπάρχουν } t_n \to +\infty \text{ με } \Phi(t_n, x) \to y\}$, ενώ το $L^-(x) = \{y \in M : \text{υπάρχουν } t_n \to -\infty \text{ με } \Phi(t_n, x) \to y\}$ λέγεται *αρνητικό οριακό σύνολο του* $x \in M$. Το ακόλουθο Θεώρημα βρίσκεται στο [Bh-Sz], Ch.2, Theorem 3.4.

**Θεώρημα 2.5.** *Έστω $(M, \Phi)$ ένα δυναμικό σύστημα και $x \in M$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.*

*α) $\overline{C^{\pm}(x)} = C^{\pm}(x) \cup L^{\pm}(x)$.*

*β) Τα $L^+(x), L^-(x)$ είναι κλειστά και αναλλοίωτα σύνολα.*

Ένα σύνολο $K \subset M$ ονομάζεται *ελάχιστο,* αν είναι μη-κενό, κλειστό, αναλλοίωτο και κανένα γνήσιο υποσύνολό του δεν έχει τις ίδιες ιδιότητες. Από το Λήμμα του Zorn προκύπτει ότι κάθε δυναμικό σύστημα σ' έναν συμπαγή χώρο έχει ελάχιστα σύνολα. Το ελάχιστο σύνολο $K$ θα λέγεται *τετριμμένο,* αν είναι ένα σταθερό σημείο ή μία περιοδική τροχιά ή $K = M$. Ένας χρήσιμος χαρακτηρισμός των ελάχιστων συνόλων δίνεται από τα Θεωρήματα 2.6 και 2.7, η απόδειξη των οποίων βρίσκεται στο [Bh-Sz], Ch.3, Theorem 3.2, Theorem 3.4.

**Θεώρημα 2.6.** *Ένα μη-κενό σύνολο $K \subset M$ είναι ελάχιστο, αν και μόνο αν για κάθε $x \in K$ ισχύει $\overline{C(x)} = K$.*

**Θεώρημα 2.7.** *Έστω $K \subset M$ ένα μη-κενό, συμπαγές σύνολο. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

*α) Το $K$ είναι ελάχιστο.*

*β) $\overline{C(x)} = K$ για κάθε $x \in K$.*

*γ) $\overline{C^+(x)} = K$ για κάθε $x \in K$.*

*δ) $\overline{C^-(x)} = K$ για κάθε $x \in K$.*

*ε) $L^+(x) = K$ για κάθε $x \in K$.*

*στ) $L^-(x) = K$ για κάθε $x \in K$.*

Στην παρούσα εργασία θα μας απασχολήσουν ελάχιστα σύνολα στον $S^1$ και στον torus $T^2$. Για το λόγο αυτό αναφέρουμε τα παρακάτω Θεωρήματα.

**Θεώρημα 2.8. (Denjoy)** *Αν η $f : S^1 \to S^1$ είναι μία $C^2$ αμφιδιαφόριση που διατηρεί τον προσανατολισμό, τότε η $f$ δεν έχει κανένα μη-τετριμμένο ελάχιστο σύνολο.* (Βλ. [Tam], Ch.1, Theorem 1.7.)

**Θεώρημα 2.9.** **(Schwartz)** *Έστω $M$ μία 2-πολλαπλότητα και $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ μία $C^2$ ροή στην $M$. Αν το $A \subset M$ είναι ένα συμπαγές ελάχιστο σύνολο, τότε είτε το $A$ είναι σταθερό σημείο, είτε είναι μία περιοδική τροχιά, είτε $A = M$.* (Βλ. [Schw].)

Τα ελάχιστα σύνολα διακριτών δυναμικών συστημάτων του $S^1$ που διατηρούν τον προσανατολισμό, καθορίζονται από τον *αριθμό στροφής του* Poincaré.

**Θεώρημα 2.10.** **(Poincaré)** *Έστω $f : S^1 \to S^1$ ένας ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό. Τότε το όριο*

$$\rho(f) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\tilde{f}^n(t) - t}{n}$$

*υπάρχει για κάθε $t \in \mathbb{R}$, είναι ανεξάρτητο του $t$ και ανεξάρτητο* (mod 1) *από την ανύψωση $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ του $f$. Ο $\rho(f)$ ονομάζεται αριθμός στροφής του Poincaré.* (Βλ. [Ar-Be-Zh], Ch.5, §1).

**Θεώρημα 2.11.** **(Poincaré)** *Έστω $f : S^1 \to S^1$ ένας ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό.*

*α) Αν ο $\rho(f)$ είναι ρητός, τότε κάθε ελάχιστο σύνολο του $f$ είναι σταθερό σημείο ή περιοδική τροχιά.*

*β) Αν ο $\rho(f)$ είναι άρρητος, τότε ο $f$ έχει ένα μοναδικό ελάχιστο σύνολο $K \subset S^1$ και είτε $K = S^1$, είτε το $K$ είναι ένα σύνολο Cantor και $L^+(x) = L^-(x) = K$ για κάθε $x \in S^1$.* (Βλ. [Ar-Be-Zh], Ch.5, §1.)

Ο αριθμός στροφής Poincaré είναι ανεξάρτητος από ημισυζυγίες, όπως δείχνει το ακόλουθο.

**Θεώρημα 2.12.** *Έστω $\mathcal{D}$ το σύνολο των αυξόντων ομοιομορφισμών του $\mathbb{R}$, της μορφής $\Phi + id$, όπου η $\Phi$ είναι περιοδική συνάρτηση του $\mathbb{R}$ με περίοδο 1. Έστω επίσης $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση της μορφής $H = \psi + id$, όπου η $\psi$ είναι συνεχής και περιοδική συνάρτηση περιόδου 1. Αν οι $F, G \in \mathcal{D}$ ικανοποιούν την $H \circ F = G \circ H$, τότε $\rho(F) = \rho(G)$, όπου $\rho$ είναι ο αριθμός στροφής του Poincaré.* (Βλ. [Ar-Be-Zh], Ch.5, Lemma 1.5.)

# II. ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΤΟΥ DENJOY

## 1. Αναρτήσεις

Στο κεφάλαιο αυτό θα κατασκευάσουμε ένα διανυσματικό πεδίο στον torus, χωρίς σταθερά σημεία, χωρίς περιοδικές τροχιές και χωρίς τροχιές πυκνές στον torus, οπότε το πεδίο θα έχει ένα μη-τετριμμένο ελάχιστο σύνολο. Από το Θεώρημα I.2.9 γνωρίζουμε ότι ένα τέτοιο πεδίο μπορεί να είναι το πολύ $C^1$. Για το λόγο αυτό, θα περιγράψουμε μία γενική κατασκευή συνεχούς ροής από μία διακριτή ροή.

Έστω $N$ μία $C^\infty$ $n-$πολλαπλότητα και $f : N \to N$ μία $C^r$ αμφιδιαφόριση, $r \geq 0$. Στο καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R} \times N$ ορίζουμε την απεικόνιση $g : \mathbb{R} \times N \to \mathbb{R} \times N$ με τύπο

$$g(s,x) = (s-1, f(x)),$$

που είναι $C^r$ αμφιδιαφόριση του $\mathbb{R}\times N$ επί του εαυτού του. Στο $\mathbb{R}\times N$ ορίζεται η διακριτή ροή $\pi : \mathbb{Z} \times (\mathbb{R} \times N) \to \mathbb{R} \times N$ με τύπο

$$\pi(k,(s,x)) = g^k(s,x) = (s-k, f^k(x)).$$

Η παραπάνω δράση του $\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{R} \times N$ με γεννήτορα $g$ είναι γνήσια ασυνεχής. Πράγματι, για κάθε $(s,x) \in \mathbb{R} \times N$, επιλέγουμε περιοχή $U = (s-\epsilon, s+\epsilon) \times N$, με $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Τότε $g^k(U) \cap U = \varnothing$, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$.

Στο σύνολο $\mathbb{R} \times N$, ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας $(s,x) \sim_g (s',x')$ αν και μόνο αν υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$,τέτοιο ώστε $(s',x') = g^k(s,x)$, δηλαδή $s' = s-k$ και $x' = f^k(x)$, ή ισοδύναμα τα $(s,x)$ και $(s',x')$ ανήκουν στην ίδια $g$-τροχιά. Έστω $M = \mathbb{R} \times N/\sim_g$ ο χώρος των $g$ τροχιών και $p : \mathbb{R}\times N \to M$ η απεικόνιση πηλίκο. Ο $M$ ονομάζεται mapping torus της $f$. Αφού η δράση του $\mathbb{Z}$ επί του $\mathbb{R} \times N$ με γεννήτορα $g$ είναι γνήσια ασυνεχής, ο $M$ γίνεται $C^r$ $(n+1)$-πολλαπλότητα και η προβολή $p : \mathbb{R} \times N \to M$ είναι κανονική απεικόνιση επικάλυψης με ομάδα των covering transformations την $\{g^k : k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$ (Βλ. [Mas], Ch. 5, Proposition 8.2).

Στο $\mathbb{R} \times N$, η $C^\infty$ ροή $\tilde{\phi} : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times N) \to \mathbb{R} \times N$ με τύπο $\tilde{\phi}(t,(s,x)) = (t+s,x)$ έχει απειροστικό γεννήτορα το $C^\infty$ διανυσματικό πεδίο $\zeta = (\frac{d}{dt}, 0)$.

Στην $M$ ορίζεται η $C^r$ ροή $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ με τύπο

$$\phi(t, p(s,x)) = p(t+s, x).$$

Η $\phi$ ορίζεται καλώς. Πράγματι, αν $(t_1, p(s_1,x_1)), (t_2, p(s_2,x_2)) \in \mathbb{R} \times M$, έχουμε $(t_1, p(s_1,x_1)) = (t_2, p(s_2,x_2))$, τότε και μόνο τότε όταν $t_1 = t_2$ και $p(s_1,x_1) = p(s_2,x_2)$, δηλαδή $t_1 = t_2$ και υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $s_2 = s_1 - k$ και $x_2 = f^k(x)$, οπότε $\phi(t_2, p(s_2,x_2)) = p(t_2+s_2, x_2) = p(t_1+s_1-k, f^k(x_1)) = p(g^k(t_1+s_1,x_1)) = p(t_1+s_1,x_1) = \phi(t_1, p(s_1,x_1))$. Η ροή $(M,\phi)$ ονομάζεται *ανάρτηση της διακριτής ροής* $(\mathbb{R} \times N, \pi)$.

Αν $r \geq 1$, ο απειροστικός γεννήτορας της $\phi$ στην $M$, είναι το $C^r$ διανυσματικό πεδίο $\xi$ με τύπο

$$\xi(p(s,x)) = p_{*(s,x)}(\zeta(s,x)).$$

Κατ' αρχήν, το $\xi$ είναι καλά ορισμένο. Πράγματι, έστω ότι $p(s,x) = p(s',x')$. Ισοδύναμα, $(s',x') = g^k(s,x) = (s-k, f^k(x))$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$. Αφού η $p : \mathbb{R} \times N \to M$ είναι απεικόνιση επικάλυψης, κάθε $p(s,x) \in M$ έχει μία συνεκτική ανοιχτή περιοχή $U \subseteq M$, τέτοια ώστε $p^{-1}(U) = \bigcup_{j\in J} V_j$, με $V_j \subset \mathbb{R}\times N$ και $V_i \cap V_j = \varnothing$ για κάθε $i \neq j$ και η $p$ περιορισμένη στο $V_j$ να είναι ομοιομορφισμός επί του $U$ για κάθε $j \in J$. Έστω λοιπόν $(s,x) \in V_i$ και $g^k(s,x) \in V_j$. Τότε $(p\mid_{V_j})^{-1} \circ p\mid_{V_i} = g^k : V_i \to V_j$, επειδή η $g$ δρα γνήσια ασυνεχώς και $g^k(s,x) \in V_j$. Όμως

$$(g^k)_* \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (f^k)_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \\ 0 \end{pmatrix},$$

δηλαδή $g^k_*\zeta = \zeta$ και επομένως

$$(p_{*g^k(s,x)})^{-1} \circ (p_{*(s,x)})[(\frac{d}{dt},0)(s,x)] = (\frac{d}{dt},0)(g^k(s,x)),$$

ή ισοδύναμα

$$p_{*(s,x)}(\zeta(s,x)) = p_{*g^k(s,x)}(\zeta(g^k(s,x)).$$

Αρα

$$\xi(p(s,x)) = \xi(p(s',x')).$$

Το $\xi$ δε μηδενίζεται πουθενά στο $M$, διότι η $p$ είναι τοπική $C^r$ αμφιδιαφόριση, επομένως η $p_{*(s,x)}$ είναι ισομορφισμός για κάθε $(s,x) \in \mathbb{R}\times N$.

Το $\xi$ έχει τώρα ροή την $\phi$, διότι $\frac{\partial\phi}{\partial t}(0,p(s,x)) = p_{*(s,x)}(\zeta(s,x)) = \xi(p(s,x)) = \xi(\phi(0,p(s,x)))$.

Έστω τώρα $N_0 = \{0\}\times N \subset \mathbb{R}\times N$. Για κάθε $x,y \in N$, έχουμε $p(0,x) = p(0,y)$ αν και μόνο αν υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$, τέτοιο ώστε $(0,y) = g^k(0,x) = (-k, f^k(x))$, ισοδύναμα $k=0$ και $x=y$, δηλαδή η $p\mid_{N_0}: N_0 \to p(N_0)$ είναι $C^r$ αμφιδιαφόριση του $N_0$ επί της εικόνας του, αφού η $p$ είναι τοπική αμφιδιαφόριση. Για το $p(N_0)$ ισχύει το ακόλουθο.

**Λήμμα 1.1.** *(α) Το $p(N_0)$ είναι κλειστό στην $M$ και εγκάρσιο στις τροχιές του $\xi$.*
*(β) Κάθε τροχιά του $\xi$ τέμνει το $p(N_0)$.*
*(γ) $\phi(1,p(0,x)) = p(1,x) = p(0,f(x))$.*

*Απόδειξη.* α) Έχουμε ότι $p^{-1}(M \setminus p(N_0)) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{(k,k+1)\times N\}$, που είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}\times N$, επομένως το $p(N_0)$ είναι κλειστό στην M. Επίσης, αφού η $p$ είναι τοπική αμφιδιαφόριση, $p_*\zeta = \xi$ και

$$< \zeta(0,x) > + T_{(0,x)}N_0 = T_{(0,x)}(\mathbb{R}\times N) = T_{(0,x)}N,$$

έχουμε

$$p_{*(0,x)}\zeta + T_{p(0,x)}p(N_0) = T_{p(0,x)}M,$$

δηλαδή

$$< \xi(p(0,x)) > + T_{p(0,x)}p(N_0) = T_{p(0,x)}M,$$

επομένως το $p(N_0)$ είναι εγκάρσιο στις τροχιές του $\xi$.

β) Από τον τύπο της ροής $\phi$ του $\xi$ έχουμε ότι αν $p(s,x) \in M$, τότε $\phi(-s,p(s,x)) = p(0,x) \in p(N_0)$, δηλαδή η τροχιά του $\xi$ που περνά από το σημείο $p(s,x)$ της $M$, τέμνει σε χρόνο $-s$ το $p(N_0)$.

γ) Για τις ροές $\tilde{\phi}$ και $\phi$ των πεδίων $\zeta$ και $\xi$ αντίστοιχα, ισχύει ότι $\phi(t,p(s,x)) = p(t+s,x)$, άρα $\phi(1,p(0,x)) = p(1,x) = p(0,f(x))$. $\square$

Επομένως, η δυναμική των τροχιών του $\xi$ περιγράφεται πλήρως από τη δυναμική συμπεριφορά της $f$. Για παράδειγμα, το $\xi$ έχει μία περιοδική τροχιά που περνά από το $p(0,x)$, τότε και μόνον τότε όταν το $x$ είναι περιοδικό σημείο της $f$.

**Πρόταση 1.2.** *Έστω $N$ μία $C^\infty$ πολλαπλότητα, $f : N \to N$ μία $C^r$ αμφιδιαφόριση και $M$ ο mapping torus της $f$. Αν η $f$ είναι $C^r$ ισοτοπική με την $id_N$, τότε υπάρχει μία $C^r$ αμφιδιαφόριση $B : M \to S^1 \times N$, όπου $S^1$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος.*

*Απόδειξη.* Έστω $F : [0,1] \times N \to N$ η $C^r$ ισοτοπία $f \simeq id_N$ με $F(0,x) = x$, $F(1,x) = f(x)$ και η $F(t,.)$ είναι $C^r$ αμφιδιαφόριση, για κάθε $t \in [0,1]$. Παρατηρούμε ότι, αν υπάρχει $C^r$ ισοτοπία $F : f \simeq id_N$, τότε υπάρχει και $C^r$ ισοτοπία $G : f \simeq id_N$, που να ικανοποιεί επιπλέον $\frac{\partial G}{\partial t}(0,x) = \frac{\partial G}{\partial t}(1,x) = 0$. Πράγματι, θεωρούμε μία μονότονη, $C^\infty$ συνάρτηση $\psi : \mathbb{R} \to [0,1]$ με $\psi^{-1}(0) = (-\infty, 0]$ και $\psi^{-1}(1) = [1, +\infty)$. Τότε, για την $G : \mathbb{R} \times N \to N$ με $G(s,x) = F(\psi(s),x)$ ισχύουν $G(0,x) = F(\psi(0),x) = F(0,x) = x$, $G(1,x) = F(\psi(1),x) = F(1,x) = f(x)$, η $G(t,.) = F(\psi(t),.)$ είναι $C^r$ αμφιδιαφόριση, δηλαδή η $G$ είναι $C^r$ ισοτοπία $f \simeq id_N$ και

$$\frac{\partial G}{\partial t}(s,x) = \frac{\partial}{\partial t}(F(\psi(s),x)) = \frac{\partial F}{\partial t}(\psi(s),x) \cdot \psi'(s).$$

Άρα

$$\frac{\partial G}{\partial t}(0,x) = \frac{\partial G}{\partial t}(1,x) = 0.$$

Ετσι, μπορούμε να υποθέσουμε για την αρχική $F : f \simeq id_N$ ότι $\frac{\partial F}{\partial t}(0,x) = \frac{\partial F}{\partial t}(1,x) = 0$. Ορίζουμε τον ομοιομορφισμό $\tilde{B} : \mathbb{R} \times N \to \mathbb{R} \times N$ με τύπο

$$\tilde{B}(s,x) = (s, F(s-[s], f^{[s]}(x)))$$

Η $\tilde{B}$ είναι $C^r$ αμφιδιαφόριση, αν $r \geq 1$, με παράγωγο

$$\tilde{B}_{*(s,x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h(s,x) & D_x F_{s-[s]}(f^{[s]}(x)) \cdot D_x f^{[s]}(x) \end{pmatrix},$$

όπου η $h : \mathbb{R} \times N \to TN$ έχει τύπο

$$h(s,x) = \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(s-[s], f^{[s]}(x)), & \text{αν } s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0, & \text{αν } s \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

αφού $\frac{\partial F}{\partial t}(0,x) = 0$. Ομως, $\tilde{B} \circ g^k(s,x) = (s-k, F(s-k-[s-k], f^{[s-k]}(f^k(x)))) = (s-k, F(s-[s], f^{[s]}(x)))$, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Επομένως, η $\tilde{B}$ επάγει μία $C^r$-αμφιδιαφόριση $B : M \to S^1 \times N$, ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times N & \xrightarrow{\tilde{B}} & \mathbb{R} \times N \\ \downarrow p & & \downarrow \exp \times id_N \\ M & \xrightarrow{B} & S^1 \times N \end{array}$$

□

**Παρατηρήσεις** : α) Αν η ισοτοπία $F$ είναι $C^{r+1}$ ως προς την πρώτη μεταβλητή $s$, τότε η $h$ είναι $C^r$ συνάρτηση.

β) Για κάθε $(s,x) \in \mathbb{R} \times N$, έχουμε $\tilde{B}_{*(s,x)}(\zeta(s,x)) = (1, h(s,x))$, διότι

$$\tilde{B}_{*(s,x)}(\zeta(s,x)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h(s,x) & D_x F_{s-[s]}(f^{[s]}(x)) \cdot D_x f^{[s]}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ h(s,x) \end{pmatrix}.$$

γ) Το $B_*\xi$ είναι $C^r$ διανυσματικό πεδίο στην $S^1 \times N$. Από το διάγραμμα της απόδειξης της Πρότασης 1.2 και τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$B_*\xi = B_*(p_*\zeta) = (B \circ p)_* \circ \zeta \circ (B \circ p)^{-1} = ((\exp \times id_N)_* \circ \tilde{B}) \circ \zeta \circ ((\exp \times id_N) \circ \tilde{B})^{-1} =$$
$$(\exp \times id_N)_* \circ \tilde{B}_* \circ \zeta \circ ((\exp \times id_N) \circ \tilde{B})^{-1}.$$

**Πρόταση 1.3.** *Αν η $f : S^1 \to S^1$ είναι μία $C^r$ αμφιδιαφόριση, $r \geq 0$, που διατηρεί τον προσανατολισμό, τότε η $f$ είναι $C^r$ ισοτοπική με την $id_{S^1}$, μέσω ισοτοπίας που είναι $C^\infty$ ως προς την πρώτη μεταβλητή.*

*Απόδειξη.* Αφού η $f : S^1 \to S^1$ διατηρεί τον προσανατολισμό, υπάρχει $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που είναι αύξουσα $C^r$ αμφιδιαφόριση, τέτοια ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \Big\downarrow \exp & & \Big\downarrow \exp \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

να είναι μεταθετικό. Έστω $\psi : \mathbb{R} \to [0,1]$ μία $C^\infty$ συνάρτηση, τέτοια ώστε $\psi^{-1}(0) = (-\infty, 0]$ και $\psi^{-1}(1) = [1, +\infty)$. Ορίζουμε $F : [0,1] \times S^1 \to S^1$ με τύπο

$$F(t, \exp\theta) = \exp[\theta + \psi(t)(\tilde{f}(\theta) - \theta)]$$

Η $F$ είναι $C^r$, αφού η $\psi$ είναι $C^\infty$, η exp είναι τοπική $C^\infty$ αμφιδιαφόριση και η ανύψωση $\tilde{f}$ είναι $C^r$. Προφανώς, $F(0,x) = x$ και $F(1,x) = f(x)$ για κάθε $x \in S^1$. Για κάθε $t \in [0,1]$, η $F(t,.)$ είναι $C^r$ αμφιδιαφόριση. Άρα οι $f, id_{S^1}$ είναι $C^r$ ισοτοπικές μέσω της $F$. □

**Πόριμα 1.4.** *Αν η $f : S^1 \to S^1$ είναι μία $C^r$ αμφιδιαφόριση, $r \geq 0$, που διατηρεί τον προσανατολισμό, τότε υπάρχει $C^r$ αμφιδιαφόριση $B : M \to T^2$.*

*Απόδειξη.* Εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.2 για $N = S^1$ και $M$ τον mapping torus της $f : S^1 \to S^1$ που διατηρεί τον προσανατολισμό. □

## 2. Αμφιδιαφορίσεις του Denjoy στον $S^1$

Στην παράγραφο αυτή, θα κατασκευάσουμε μια $C^1$ αμφιδιαφόριση $f : S^1 \to S^1$που διατηρεί τον προσανατολισμό και έχει ένα μοναδικό ελάχιστο σύνολο που είναι μη-τετριμμένο, δηλαδή είναι ομοιομορφικό με το σύνολο του Cantor (Θεώρημα I.2.11). Η $f$ ανυψώνεται σε μία αύξουσα $C^1$ αμφιδιαφόριση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με την ιδιότητα $F(t+1) = F(t) + 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Θα κατασκευάσουμε πρώτα την $F$.

Έστω $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και $t_0 \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z} + a\mathbb{Z})$. Αφού το σύνολο $\mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, το ίδιο συμβαίνει και με το σύνολο $t_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$. Έστω $l_n > 0$, $n \in \mathbb{Z}$, τέτοιοι ώστε $\sum_{n\in\mathbb{Z}} l_n = \rho$, με $0 < \rho \leq 1$. Για παράδειγμα, $l_n = \frac{\rho}{\pi}(\arctan(n+1) - \arctan n)$ . Θεωρούμε τις συναρτήσεις $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ με τύπο

$$p(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } t \notin t_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z} \\ l_n, & \text{αν } t = t_0 + m + an \text{ για κάποια } m, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

και $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$J(t) = \begin{cases} (1-\rho)t + \sum_{0\leq s\leq t} p(s), & \text{αν } t \geq 0 \\ (1-\rho)t - \sum_{t\leq s\leq 0} p(s), & \text{αν } t < 0 \text{ .} \end{cases}$$

**Λήμμα 2.1.** *Η συνάρτηση $J$ είναι γνήσια αύξουσα, παντού συνεχής εκτός από τα σημεία του συνόλου $t_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$, όπου είναι από δεξιά συνεχής και αριστερά παρουσιάζει στο σημείο $t_0 + m + an$ άλμα $l_n$. Επίσης, ισχύουν :*

*α) $J(0) = 0$, $J(t+1) = J(t) + 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, άρα $J(k) = k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.*

*β) Το σύνολο $C = \overline{J(\mathbb{R})}$ είναι κλειστό, τέλειο, ολικά μη-συνεκτικό και $R_1(C) = C$, όπου $R_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι η μεταφορά $R_1(t) = t + 1$.*

*γ) $\mu(C \cap [0,1]) = 1 - \rho$, όπου $\mu$ είναι το μέτρο Lebesgue.*

*Απόδειξη.* Η $J$ είναι γνήσια αύξουσα, διότι αν $t_1 > t_2 \geq 0$, τότε

$$J(t_1) = (1-\rho)t_1 + \sum_{0\leq s\leq t_1} p(s) > (1-p)t_2 + \sum_{0\leq s\leq t_2} p(s) = J(t_2),$$

αφού το $t_0+\mathbb{Z}+a\mathbb{Z}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$ και συνεπώς υπάρχει $s \in t_0+\mathbb{Z}+a\mathbb{Z}$, με $t_1 < s < t_2$.

Όμοια, αν $t_1 < t_2 < 0$, τότε

$$J(t_1) = (1-\rho)t_1 - \sum_{t_1<s\leq 0} p(s) < (1-\rho)t_2 - \sum_{t_2<s\leq 0} p(s) = J(t_2).$$

Τέλος, αν $t_1 < 0 < t_2$, τότε

$$J(t_1) = (1-\rho)t_1 - \sum_{t_1<s\leq 0} p(s) < (1-\rho)t_1 < (1-\rho)t_2 < (1-\rho)t_2 + \sum_{0\leq s\leq t_2} p(s) = J(t_2).$$

Για τη συνέχεια της $J$, θεωρούμε ένα $t \geq 0$. Αν $t_k \searrow t$, τότε

$$J(t_k) = (1-\rho)t_k + \sum_{0\leq s\leq t_k} p(s) \searrow (1-\rho)t + \sum_{0\leq s\leq t} p(s) = J(t),$$

δηλαδή η $J$ είναι από δεξιά συνεχής στο $t$. Αν $t_k \nearrow t$, τότε

$$J(t_k) = (1-\rho)t_k + \sum_{0\leq s\leq t_k} p(s) \nearrow (1-\rho)t + \sum_{0\leq s<t} p(s) = J(t) - p(t),$$

οπότε αν $t \notin t_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$, τότε $p(t) = 0$ και $J(t_k) \to J(t)$, ενώ αν $t = t_0 + m + an$, τότε $p(t) = l_n$ και συνεπώς $J(t_k) \to J(t) - l_n$. Δηλαδή η $J$ είναι αριστερά συνεχής σε κάθε $t \geq 0$ με $t \notin t_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$, ενώ για $t = t_0 + m + an$, παρουσιάζει από αριστερά άλμα $l_n$. Όμοια για $t < 0$.

α) Προφανώς, $0 \notin t_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$, επομένως $p(0) = 0$, άρα $J(0) = 0$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, στο διάστημα $(t, t+1]$ υπάρχει ακριβώς ένα $m \in \mathbb{Z}$, τέτοιο ώστε $t_0 + m + an \in (t, t+1]$, διότι το συνόλο $t_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, ο $m$ είναι ακέραιος και το μήκος του $(t, t+1]$ είναι 1. Επομένως, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\sum_{t<s\leq t+1} p(s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} l_n = \rho.$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, αν $t \geq 0$, τότε

$$J(t+1) = (1-\rho)(t+1) + \sum_{0\leq s\leq t+1} p(s) = (1-\rho)t + \sum_{0\leq s\leq t} p(s) + (1-\rho) + \sum_{t<s\leq t+1} p(s) =$$

$$J(t) + 1 - \rho + \rho = J(t) + 1.$$

Επίσης, αν $-1 \leq t < 0$, τότε

$$J(t+1) = (1-\rho)(t+1) + \sum_{0\leq s\leq t+1} p(s) = (1-\rho) - \sum_{t<s\leq 0} p(s) + (1-\rho) + \sum_{t<s\leq t+1} p(s) =$$

$$J(t) + 1 - \rho + \rho = J(t) + 1.$$

Τέλος, αν $t < -1$, τότε $t + 1 < 0$, και

$$J(t+1) = (1-\rho)(t+1) - \sum_{t+1<s\leq 0} p(s) = (1-\rho)t - \sum_{t<s\leq 0} p(s) + (1-\rho) + \sum_{t<s\leq t+1} p(s) =$$

$$J(t) + 1 - \rho + \rho = J(t) + 1.$$

Είναι προφανές τώρα ότι $J(k) = k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

β) Το $C = \overline{J(\mathbb{R})}$ είναι κλειστό, εξ' ορισμού. Για να δείξουμε ότι το $C$ είναι τέλειο, θεωρούμε ένα $t \in \mathbb{R}$. Αφού το συνόλο $t_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, υπάρχουν $t_k \in t_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$, τέτοια ώστε $t_k \searrow t$ και $t_k \neq t$. Όμως η $J$ είναι από δεξιά συνεχής, άρα $J(t_k) \searrow J(t)$ και $J(t_k) \neq J(t)$, αφού $t_k \neq t$ και η $J$ είναι γνήσια αύξουσα. Επομένως, κάθε σημείο του $C$ είναι σημείο συσσώρευσης.

Το $C$ είναι ολικά μη-συνεκτικό τότε και μόνον τότε, όταν δεν περιέχει κανένα διάστημα. Έστω $I$ ένα ανοικτό διάστημα, με $I \subset C$. Τότε $I \cap J(\mathbb{R}) \neq \varnothing$. Έστω $t \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $J(t) \in I$ και $t_k \in t_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$, τέτοια ώστε $t_k \searrow t$. Τότε $J(t_n) \searrow J(t) \in I$, που είναι ανοικτό, συνεπώς υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ με $J(t_k) \in I$ για κάθε $k \geq k_0$. Έστω $k \geq k_0$. Αφού $t_k \in t_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$, υπάρχουν $m, n \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε $t_k = t_0 + m + an$. Τότε $\varnothing \neq (J(t_k) - l_n, J(t_k)) \cap I \subset (\mathbb{R} \setminus C) \cap I$, κάτι το οποίο είναι αντίφαση, διότι $I \subset C$.

Τέλος, από το α) έχουμε ότι

$$J(t+1) = J(t) + 1, \text{ δηλαδή } J \circ R_1 = R_1 \circ J, \text{ άρα } J(\mathbb{R}) = J(R_1(\mathbb{R})) = R_1(J(\mathbb{R}))$$

και συνεπώς

$$C = \overline{J(\mathbb{R})} = \overline{R_1(J(\mathbb{R}))} = R_1(\overline{J(\mathbb{R})}) = R_1(C).$$

γ) $\mu(C \cap [0,1]) = \mu([0,1]) - \mu([0,1] \setminus C) = 1 - \sum_{0\leq s\leq 1} p(s) = 1 - \sum_{0<s\leq 1} p(s) = 1 - \sum_{n\in\mathbb{Z}} l_n = 1 - \rho$. $\square$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$J(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n,m\in\mathbb{Z}} (J(t_0 + m + an) - l_n, J(t_0 + m + an)]$$

και

$$C = \overline{J(\mathbb{R})} = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n,m\in\mathbb{Z}} (J(t_0 + m + an) - l_n, J(t_0 + m + an)).$$

Θέτουμε $I_{n,m} = [J(t_0 + m + an) - l_n, J(t_0 + m + an)]$, με $n, m \in \mathbb{Z}$, οπότε

$$\mathbb{R} \setminus C = \bigcup_{n,m\in\mathbb{Z}} int(I_{n,m}).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$H(x) = \begin{cases} t, & \text{αν } x = J(t) \text{ για κάποιο } t \in \mathbb{R} \\ t_0 + m + an, & \text{αν } x \in I_{n,m}. \end{cases}$$

**Λήμμα 2.2.** *Η συνάρτηση $H$ είναι συνεχής, αύξουσα, $H \circ J = id_{\mathbb{R}}$ και $H(C) = \mathbb{R}$. Επίσης,*

*α) $H(0) = 0$, $H(x + 1) = H(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $H(k) = k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.*

*β) Για κάθε $x \in J(\mathbb{R}^+)$ ισχύει $\mu(C \cap [0, x]) = (1 - \rho)H(x)$.*

*Απόδειξη.* Από τον ορισμό της $H$, προφανώς ισχύει $H \circ J = id_{\mathbb{R}}$. Συνεπώς, $H(C) = H(\overline{J(\mathbb{R})}) \supset H(J(\mathbb{R})) = \mathbb{R}$. Η συνέχεια της $H$ προκύπτει εύκολα από τους ορισμούς και την πυκνότητα του $t_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{R}$.

α) Από τον ορισμό της $H$ έχουμε $0 = J(0) \in J(\mathbb{R})$, επομένως $H(0) = 0$. Θα δείξουμε τώρα ότι $H(x + 1) = H(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, διακρίνοντας περιπτώσεις.

Αν $x \in J(\mathbb{R})$, δηλαδή $x = J(t)$ για κάποιο $t \in \mathbb{R}$, τότε $H(x + 1) = H(J(t) + 1) = H(J(t + 1)) = t + 1 = H(x) + 1$. Συνεπώς $H(x + 1) = H(x) + 1$ για κάθε $x \in C$, λόγω της συνέχειας της $H$.

Αν $x \in \mathbb{R} \setminus C = \bigcup_{n,m\in\mathbb{Z}} int(I_{n,m})$, τότε υπάρχουν $n, m \in \mathbb{Z}$ ώστε $x \in int(I_{n,m})$, συνεπώς $H(x) = t_0 + m + an$. Το $R_1(int(I_{n,m}))$ είναι ανοικτό διάστημα με άνω άκρο το $J(t_0 + m + an) + 1 = J(t_0 + (m + 1) + an)$, που είναι η συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{R} \setminus C$ που περιέχει το $x + 1$. Αφού λοιπόν $x + 1 \in I_{n,m+1}$, από τον ορισμό της $H$ έχουμε $H(x + 1) = t_0 + (m + 1) + an = t_0 + m + an + 1 = H(x) + 1$.

β) Αν $x \in J(\mathbb{Z}^+)$, τότε από το Λήμμα 1.5 έχουμε ότι $\mu(C \cap [0, 1]) = 1 - \rho$ και $R_1(C) = C$, επομένως

$$\mu(C \cap [0, x]) = (1 - \rho)x = (1 - \rho)H(x),$$

διότι $H(x) = x$.

Αν $x \in J(\mathbb{R}^+)$, με $0 \leq x < 1$ και $x = J(t)$ για κάποιο $t > 0$, παρατηρούμε ότι

$$\sum_{\{n,m\in\mathbb{Z}: I_{n,m}\subset[0,x]\}} l_n = \sum_{\{n,m\in\mathbb{Z}: I_{n,m}\subset[0,J(t)]\}} l_n = \sum_{0\leq s\leq t} p(s),$$

διότι $I_{n,m} \subset [0,x]$, τότε και μόνο τότε όταν $[J(t_0+m+an)-l_n, J(t_0+m+an)] \subset [J(0),J(t)]$ και ισοδύναμα $0 < t_0+m+an \leq t$. Επομένως

$$\mu(C\cap[0,x]) = \mu([0,x]) - \mu([0,x]\setminus C) = x - \sum_{\{n,m\in\mathbb{Z}: I_{n,m}\subset[0,x]\}} l_n = J(t) - \sum_{0\leq s\leq t} p(s) =$$

$$(1-\rho)t + \sum_{0\leq s\leq t} p(s) - \sum_{0\leq s\leq t} p(s) = (1-\rho)t = (1-\rho)H(x).$$

Αν $x \in J(\mathbb{R}^+)$, τότε

$$\mu(C\cap[0,x]) = \mu(C\cap[0,[x]]) + \mu(C\cap[[x],x]) = (1-\rho)[x] + \mu(C\cap[0,x-[x]]) =$$

$$(1-\rho)[x] + (1-\rho)H(x-[x]) = (1-\rho)H([x]+x-[x]) = (1-\rho)H(x).$$

□

**Πρόταση 2.3.** *Αν $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι ένας αύξων ομοιομορφισμός με $F(x+1)=F(x)+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
*α) $H\circ F = R_a\circ H$, όπου $R_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι η μεταφορά $R_a(x)=x+a$.*
*β) $F(x) = J(H(x)+a)$, για κάθε $x\in J(\mathbb{R})$.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι ισχύει $H\circ F = R_a\circ H$, δηλαδή

$$H(F(x)) = H(x)+a \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Έστω $x_0\in J(\mathbb{R})$ τέτοιο ώστε $H(x_0)\notin t_0+\mathbb{Z}+a\mathbb{Z}$, δηλαδή $x_0\notin I_{n,m}$ και ειδικά $x_0\neq J(t_0+m+an)$ για κάθε $n,m\in\mathbb{Z}$. Τότε $H(F(x_0)) = H(x_0)+a\notin t_0+\mathbb{Z}+a\mathbb{Z}$, άρα $F(x_0)\in J(\mathbb{R})$ και μάλιστα $F(x_0)=J(H(x_0)+a)$, από τον ορισμό της $H$. Αφού $H\circ F = R_a\circ H$, επαγωγικά έχουμε $H\circ F^k = (R_a)^k\circ H = R_{ka}\circ H$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, δηλαδή

$$H(F^k(x)) = H(x)+ka \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Τότε, για κάθε $k,\lambda\in\mathbb{Z}$ ισχύει $H(F^k(x_0))+\lambda = H(x_0)+ka+\lambda\notin t_0+\mathbb{Z}+a\mathbb{Z}$ και συνεπώς $F^k(x_0)+\lambda\in J(\mathbb{R})$ και μάλιστα

$$F^k(x_0)+\lambda = J(H(x_0)+ak+\lambda) \text{ για κάθε } k,\lambda\in\mathbb{Z}.$$

Έστω τώρα $x\in J(\mathbb{R})$, $x=J(t)$ για κάποιο $t\in\mathbb{R}$. Το σύνολο $H(x_0)+\mathbb{Z}+a\mathbb{Z} = \{H(x_0)+\lambda+ak : k,\lambda\in\mathbb{Z}\} = \{H(F^k(x_0)+\lambda) : k,\lambda\in\mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$. Αφού η $J$ είναι δεξιά συνεχής παντού, το σύνολο $\{F^k(x_0)+\lambda : k,\lambda\in\mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό στο $J(\mathbb{R})$, άρα και στο $C$. Επομένως υπάρχουν $k_n,\lambda_n\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$, τέτοια ώστε $H(x_0)+\lambda_n+ak_n\searrow t$, δηλαδή

$$F^{k_n}(x_0)+\lambda_n = J(H(x_0)+\lambda_n+ak_n)\searrow x.$$

Τότε, λόγω μονοτονίας και συνέχειας της $H$, δεξιάς συνέχειας της $J$ και αφού $H\circ J = id_{\mathbb{R}}$,

$$J(H(x)+a) = J(H(\lim_{n\to+\infty}(F^{k_n}(x_0)+\lambda_n))+a) = J(\lim_{n\to+\infty} H(F^{k_n}(x_0)+\lambda_n)+a) =$$

$$\lim_{n\to+\infty} J(H(F^{k_n}(x_0)+\lambda_n)+a) = \lim_{n\to+\infty} J(H(x_0)+\lambda_n+ak_n+a) =$$

$$\lim_{n\to+\infty} J(H(x_0)+\lambda_n+(k_n+1)a) = \lim_{n\to+\infty}(F^{k_n+1}(x_0)+\lambda_n) =$$

$$\lim_{n\to+\infty} F((F^{k_n}(x_0)+\lambda_n)) = F(\lim_{n\to+\infty}(F^{k_n}(x_0)+\lambda_n) = F(x).$$

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει $F(x) = J(H(x)+a)$ για κάθε $x \in J(\mathbb{R})$. Αν $x \in J(\mathbb{R})$, τότε $H(F(x)) = H(J(H(x)+a)) = H(x)+a$. Συνεπώς το ίδιο ισχύει και για κάθε $x \in C$, λόγω συνέχειας. Αν τώρα $x \in \mathbb{R}\setminus C$, τότε $x \in I_{n,m}$, για κάποια $n,m \in \mathbb{Z}$. Παρατηρούμε ότι $F(J(t)) = J(t+a)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και συνεπώς $F(J(\mathbb{R})) = J(\mathbb{R})$. Επομένως, αφού η $F$ είναι ομοιομορφισμός, ισχύει $F(C) = C$. Έχουμε επίσης $F(I_{n,m}) = I_{n+1,m}$. Πράγματι, αν $x = J(t_0+m+an)$, τότε $H(x) = t_0+m+an$ και συνεπώς $F(x) = J(H(x)+a) = J(t_0+m+(n+1)a)$, που είναι το άνω άκρο του $I_{n+1,m}$. Άρα, $H(F(x)) = t_0+m+an+a = H(x)+a = R_a(H(x))$ για κάθε $x \in I_{n,m}$. □

**Πόρισμα 2.4.** *Αν $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι ένας αύξων ομοιομορφισμός με $F(x+1) = F(x)+1$ και $H\circ F = R_a\circ H$, τότε*

*α) $F(C) = C$, δηλαδή το σύνολο $C$ είναι $F$-αναλλοίωτο.*

*β) Το σύνολο $\{F^k(x)+\lambda : k,\lambda\in\mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό στο $C$, για κάθε $x \in C$.*

*Απόδειξη.* Το α) αποδείχθηκε στην Πρόταση 2.3. Στην ίδια Πρόταση, αποδείξαμε επίσης ότι αν $x \in J(\mathbb{R})$ και $H(x) \notin t_0+\mathbb{Z}+a\mathbb{Z}$, τότε το σύνολο $\{F^k(x)+\lambda : k,\lambda\in\mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό στο $J(\mathbb{R})$, άρα και στο $C$. Μένει να εξετάσουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις.

Αν πρώτα $x = J(t_0+m+an)$ για κάποια $n,m\in\mathbb{Z}$, τότε από την Πρόταση 2.3

$$F^k(x)+\lambda = J(H(x)+ka+\lambda) = J(H(J(t_0+m+an))+ka+\lambda) =$$

$$J(t_0+m+an+ka+\lambda) = J(t_0+(m+\lambda)+(n+k)a) \in J(t_0+\mathbb{Z}+a\mathbb{Z}).$$

Όμως το σύνολο $t_0+\mathbb{Z}+a\mathbb{Z}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$ και η $J$ είναι δεξιά συνεχής, επομένως το σύνολο $\{F^k(x)+\lambda : k,\lambda\in\mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό στο $J(\mathbb{R})$, άρα και στο $C$.

Έστω τώρα ότι $x \in C\setminus J(\mathbb{R}) = \{J(t_0+m+an)-l_n : n,m\in\mathbb{Z}\}$. Έχουμε υποθέσει ότι $\sum_{n\in\mathbb{Z}} l_n = \rho$ και συνεπώς $\lim_{n\to\pm\infty} l_n = 0$. Άρα το σύνολο $\{J(t_0+m+an)-l_n : n,m\in\mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό στο $C$ και αφού η $F$ είναι ομοιομορφισμός με $F(C) = C$, το σύνολο $\{F^k(x)+\lambda : k,\lambda\in\mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό στο $C$. □

Ορίζουμε τώρα την αμφιδιαφόριση $F$ σε διαστήματα της μορφής $I_{n,0}\subseteq\mathbb{R}\setminus C$. Για τη συνέχεια της παραγράφου, κάνουμε την επιπλέον υπόθεση ότι

$$\lim_{n\to\pm\infty}\frac{l_{n+1}}{l_n} = 1 \text{ και } \frac{l_{n+1}}{l_n} > \frac{1}{3} \text{ για κάθε } n\in\mathbb{Z}.$$

Αυτές οι επιπλέον υποθέσεις ικανοποιούνται όταν $l_n = \frac{\rho}{\pi}(\arctan(n+1)-\arctan n)$.

**Λήμμα 2.5.** *Για κάθε $n\in\mathbb{Z}$ υπάρχει μία $C^1$ αμφιδιαφόριση $F_{n,0} : I_{n,0}\to I_{n+1,0}$, τέτοια ώστε:*

*α) $F'_{n,0}(J(t_0+an)-l_n) = F'_{n,0}(J(t_0+an)) = 1$.*

*β) $0 < F'_{n,0}(x) \le 1+6|\frac{l_{n+1}}{l_n}-1|$ για κάθε $x\in I_{n,0}$, $n\in\mathbb{Z}$ και*

$$\lim_{n\to\pm\infty}(\sup\{|F'_{n,0}(x)-1| : x\in I_{n,0}\}) = 0.$$

*Απόδειξη.* Για απλότητα στους συμβολισμούς, θέτουμε $a_n = J(t_0 + an) - l_n$, $b_n = J(t_0 + an)$ και $c_n = 6(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1) > -4$. Ορίζουμε την $F_{n,0} : I_{n,0} \to I_{n+1,0}$ με τύπο

$$F_{n,0}(x) = a_{n+1} + \int_{a_n}^{x} [1 + \frac{c_n}{l_n^2}(y - a_n)(b_n - y)]dy.$$

Η $F_{n,0}$ είναι προφανώς $C^1$, $F_{n,0}(a_n) = a_{n+1}$ και

$$F_{n,0}(b_n) = a_{n+1} + \int_{a_n}^{b_n} dy + \frac{c_n}{l_n^2} \int_{a_n}^{b_n} (y - a_n)(b_n - y)dy = a_{n+1} + (b_n - a_n) + \frac{c_n}{l_n^2} \frac{(b_n - a_n)^3}{6} =$$

$$a_{n+1} + l_n + (\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1)l_n = a_{n+1} + l_n + l_{n+1} - l_n = a_{n+1} + l_{n+1} = b_{n+1}.$$

Η $F_{n,0}$ είναι γνήσια αύξουσα, γιατί για κάθε $x \in I_{n,0}$ έχουμε

$$F'_{n,0}(x) = 1 + \frac{c_n}{l_n^2}(x - a_n)(b_n - x) > 1 - \frac{4}{l_n^2}(x - a_n)(b_n - x) \geq 1 - \frac{4}{l_n^2} \cdot \frac{l_n^2}{4} = 0.$$

Επομένως, αφού η $F_{n,0}$ είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα,

$$F_{n,0}(I_{n,0}) = F_{n,0}([a_n, b_n]) = [a_{n+1}, b_{n+1}] = I_{n+1,0},$$

δηλαδή η $F_{n,0}$ είναι $C^1$-αμφιδιαφόριση επί του $I_{n+1,0}$.
α) $F'_{n,0}(J(t_0+m+an)-l_n) = F'_{n,0}(b_n-l_n) = F'_{n,0}(a_n) = 0+1+\frac{c_n}{l_n^2}(a_n-a_n)(b_n-a_n) = 1.$
Όμοια, $F'_{n,0}(J(t_0 + m + an)) = F'_{n,0}(b_n) = 1$.
β) Για κάθε $x \in I_{n,0}$ έχουμε

$$|F'_{n,0}(x) - 1| = \frac{|c_n|}{l_n^2}(x - a_n)(b_n - x) \leq \frac{|c_n|}{l_n^2}(b_n - a_n)^2 = \frac{|c_n|}{l_n^2} \cdot l_n^2 = |c_n|,$$

άρα και $\sup_{x \in I_{n,0}} |F'_{n,0}(x) - 1| \to 0$, όταν $n \to \pm\infty$. $\square$

**Θεώρημα 2.6.** *Υπάρχει μία αύξουσα $C^1$ αμφιδιαφόριση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $H \circ F = R_a \circ H$, ώστε $F(x + 1) = F(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

*Απόδειξη.* Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ θεωρούμε την $C^1$ αμφιδιαφόριση της απόδειξης του Λήμματος 2.5 $F_{n,0} : I_{n,0} \to I_{n+1,0}$ με τύπο

$$F_{n,0}(x) = a_{n+1} + \int_{a_n}^{x} [1 + \frac{c_n}{l_n^2}(y - a_n)(b_n - y)]dy.$$

Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, ορίζουμε την $F_{n,m} : I_{n,m} \to I_{n+1,m}$ με τύπο

$$F_{n,m} = R_m \circ F_{n,0} \circ R_{-m}.$$

Η $F_{n,m}$ είναι αύξουσα, $C^1$ αμφιδιαφόριση και $F'_{n,m}(x) = F'_{n,0}(x - m)$ για κάθε $x \in I_{n,m}$. Ορίζουμε την $G : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, με τύπο

$$G(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in C \\ F'_{n,m}(x) = F'_{n,0}(x - m), & \text{αν } x \in I_{n,m}, n, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Από το Λήμμα 2.5 έχουμε ότι $\sup_{x\in I_{n,0}} |F'_{n,0}(x) - 1| \to 0$ όταν $n \to \pm\infty$, επομένως η $G$ είναι συνεχής και φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 1$ τέτοιο ώστε $0 \le G(x) \le M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε τώρα την $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο

$$F(x) = J(a) + \int_0^x G(s)ds.$$

Η $F$ είναι $C^1$ αμφιδιαφόριση επί του $\mathbb{R}$ και αύξουσα, αφού $G > 0$. Επιπλέον,

$$F(x) = J(H(x) + a) \text{ για κάθε } x \in J(\mathbb{R}).$$

Πράγματι, έστω $x \in J(\mathbb{R})$, με $x \ge 0$. Αν $I_{n,m} \subset [0, x]$, τότε

$$\int_{I_{n,m}} G(s)ds = \int_{I_{n,m}} F'_{n,m}(s)ds = \int_{I_{n,0}} F'_{n,0}(s) = \int_{a_n}^{b_n} [1 + \frac{c_n}{l_n^2}(s - a_n)(b_n - s)]ds =$$

$$l_n + \frac{c_n}{l_n^2}\frac{(b_n - a_n)^3}{6} = l_n + (\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1)l_n = l_{n+1} = p(t_0 + m + (n + 1)a).$$

Επομένως,

$$\int_0^x G(s)ds = \mu(C\cap[0,x]) + \int_{[0,x]\setminus C} G(s)ds = \mu(C\cap[0,x]) + \sum_{n,m\in\mathbb{Z}:I_{n,m}\subset[0,x]} \int_{I_{n,m}} G(s)ds$$

$$= \mu(C \cap [0, x]) + \sum_{n,m\in\mathbb{Z}:I_{n,m}\subset[0,x]} p(t_0 + m + an + a) = (1 - \rho)H(x) + \sum_{0\le s\le H(x)} p(s + a).$$

Άρα

$$F(x) = J(a) + \int_0^x G(s)ds = (1 - \rho)a + \sum_{0\le s\le a} p(s) + (1 - \rho)H(x) + \sum_{0\le s\le H(x)} p(s + a)$$

$$= (1-\rho)(H(x)+a) + \sum_{0\le s\le a} p(s) + \sum_{a\le s\le H(x)+a} p(s) = (1-\rho)(H(x)+a) + \sum_{0\le s\le H(x)+a} p(s) =$$
$$= J(H(x) + a),$$

αφού $p(a) = 0$. Όμοια, $F(x) = J(H(x) + a)$ για κάθε $x \in J(\mathbb{R})$ με $x < 0$.

Λόγω της Πρότασης 2.3 απομένει να αποδείξουμε ότι $F(x + 1) = F(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Διακρίνουμε περιπτώσεις.

Αν $x \in J(\mathbb{R})$, τότε $F(x+1) = J(H(x+1)+a) = J(H(x)+1+a) = J(H(x)+a)+1 = F(x) + 1$ και λόγω συνέχειας της $F$, το ίδιο ισχύει για $x \in C$.

Αν $x \in I_{n,m}$ για κάποια $n, m \in \mathbb{Z}$, τότε

$$F(J(t_0 + m + an) - l_n) = J(a) + \int_0^{J(t_0+m+an)-l_n} G(s)ds =$$

$$J(a) + \int_0^{J(t_0+m+an)} G(s)ds - \int_{I_{n,m}} G(s)ds = F(J(t_0 + m + an)) - \int_{I_{n,m}} F'_{n,m}(s)ds =$$

$$J(H(J(t_0 + m + an)) + a) - \int_{I_{n,m}} F'_{n,m}(s)ds = J(t_0 + m + an + a) - \int_{I_{n,m}} F'_{n,m}(s)ds =$$

$$J(t_0 + m + an + a) - l_{n+1} = a_{n+1}$$

και κατά συνέπεια

$$F(x) = a_{n+1} + \int_{a_n}^{x} F'_{n,m}(s)ds = F_{n,m}(x).$$

Δηλαδή ο περιορισμός της $F$ σε κάθε διάστημα $I_{n,m}$ ταυτίζεται με την $F_{n,m}$ για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$. Επομένως, έχουμε

$$F(x+1) = F_{n,m+1}(x+1) = R_{m+1} \circ F_{n,0} \circ R_{-m-1}(x+1) = F_{n,0}(x-m) + m + 1 =$$

$$F_{n,m}(x) + 1 = F(x) + 1.$$

□

Η $C^1$ αμφιδιαφόριση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που κατασκευάσαμε είναι αύξουσα καί $F(x+1) = F(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, το σύνολο $C$ είναι $F$-αναλλοίωτο, τέλειο, κλειστό, ολικά μη-συνεκτικό, έχει μέτρο Lebesgue $\mu(C \cap [0,1]) = 1 - \rho$ και κάθε $F$-τροχιά στο $C$ είναι πυκνή σ' αυτό.

Ορίζουμε λοιπόν $f : S^1 \to S^1$, με τύπο

$$f(e^{2\pi it}) = e^{2\pi iF(t)}.$$

Προφανώς η $f$ ορίζεται καλά, διατηρεί τον προσανατολισμό, διότι η $F$ είναι αύξουσα και έχει άρρητο αριθμό στροφής $\rho(f) = e^{2\pi ia}$, αφού $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και $H \circ F = R_a \circ H$ (βλ. Θεώρημα Ι.2.12). Το σύνολο $L = \exp(C)$ είναι συμπαγές, τέλειο, ολικά μη-συνεκτικό και $f$-αναλλοίωτο. Επίσης, για κάθε $z \in L$, η $f$-τροχιά $\{f^n(z) : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι πυκνή στο $L$, διότι το σύνολο $\{F^n(x) + \lambda : n, \lambda \in \mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό στο $C$ για κάθε $x \in C$. Δηλαδή, το σύνολο $L$ είναι $f$-ελάχιστο και έχει κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue $\mu(L) = \mu(C \cap [0,1]) = 1 - \rho$.

Η παραπάνω $f : S^1 \to S^1$ δεν έχει περιοδικές τροχιές, αφού $\rho(f) = e^{2\pi ia}$, με $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, δεν έχει σταθερά σημεία και έχει μη-τετριμμένο ελάχιστο σύνολο $L$, στο οποίο η $f$-τροχιά κάθε σημείου του είναι πυκνή στο $L$ (βλ. Θεώρημα Ι.2.11).

## 3. Διανυσματικά πεδία του Denjoy στον $T^2$

Θεωρούμε τον mapping torus $M$ της $C^1$ αμφιδιαφόρισης του Denjoy $f : S^1 \to S^1$ που κατασκευάσαμε στην παράγραφο 2. Αν $\xi$ είναι το διανυσματικό πεδίο που ορίζεται στον $M$ μέσω της $f$, από το Λήμμα 1.1 έχουμε ότι το $\xi$ δεν έχει σταθερά σημεία, δεν έχει περιοδικές τροχιές και έχει ένα μη-τετριμμένο ελάχιστο σύνολο $A$, αφού τα αντίστοιχα ισχύουν για την $f$. Επίσης, από την Παρατήρηση γ) της παραγράφου 1 έχουμε ότι το $\mathcal{V} = B_*\xi$ είναι $C^1$ διανυσματικό πεδίο στον $T^2$, όπου $B : M \to T^2$ είναι η $C^1$ αμφιδιαφόριση του Πορίσματος 1.4. Επομένως, το διανυσματικό πεδίο $\mathcal{V}$ στον $T^2$ δεν έχει σταθερά σημεία ή περιοδικές τροχιές και η $\mathcal{V}$-τροχιά κάθε σημείου του $\mathcal{M} = B(A)$ θα είναι πυκνή στο $\mathcal{M}$, όπου το $\mathcal{M}$ είναι μη-τετριμμένο ελάχιστο σύνολο του $\mathcal{V}$, καθώς η $B$ είναι αμφιδιαφόριση και οι αντίστοιχες ιδιότητες ισχύουν για το διανυσματικό πεδίο $\xi$ στον $M$ και το σύνολο $A$.

# III. ΤΟ $C^1$ ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΤΟΥ SCHWEITZER ΣΤΗΝ ΕΙΚΑΣΙΑ ΤΟΥ SEIFERT

## 1. Plugs

Έστω $M$ μία $C^\infty$ $n$-πολλαπλότητα με ο-γωνίες και $\mathcal{F}$ μία προσανατολισμένη 1-foliation στην $M$, που παράγεται δηλαδή από ένα διανυσματικό πεδίο. *Παράλληλο σύνορο της* $\mathcal{F}$, είναι το σύνολο των σημείων του $\partial M$ τα οποία έχουν περιοχή στην οποία η $\mathcal{F}$ ταυτίζεται με την foliation του άνω ημιχώρου από οριζόντιες γραμμές. *Εγκάρσιο σύνορο της* $\mathcal{F}$, είναι το σύνολο των σημείων του $\partial M$ τα οποία έχουν περιοχή στην οποία η $\mathcal{F}$ ταυτίζεται με την foliation του άνω ημιχώρου από κάθετες γραμμές.

Η $\mathcal{F}$ μπορεί να έχει σύνορο που δεν είναι ούτε παράλληλο, ούτε εγκάρσιο. Η $\mathcal{F}$ έχει *corner separation στο* $p \in \partial M$, αν το $p$ δεν ανήκει ούτε στο παράλληλο, ούτε στο εγκάρσιο σύνορο της $\mathcal{F}$, αλλά ανήκει στην κλειστότητα και των δύο και σε μία περιοχή του $p$ η $\mathcal{F}$ είναι τοπολογικά ισοδύναμη με την foliation με φύλλα $\{x\} \times [0, +\infty)$, $x \in N$, του $N \times [0, +\infty)$, όπου $N$ είναι μία $(n-1)$-υποπολλαπλότητα με ο-γωνίες του $\mathbb{R}^{n-1}$.

Μία flow bordism είναι μία προσανατολισμένη 1-foliation $\mathcal{P}$ μίας συνεκτικής, συμπαγούς πολλαπλότητας $M$ με ο-γωνίες, τέτοια ώστε το σύνορο της $M$ να είναι εξ ολοκλήρου εγκάρσιο, παράλληλο, ή να έχει corner separation και όλα τα φύλλα της $\mathcal{P}$ στο παράλληλο σύνορο της $M$ να είναι ομοιομορφικά με ευθύγραμμα τμήματα.

Έστω $\mathcal{P}$ μία flow bordism. Συμβολίζουμε με $F_-$ την κλειστότητα του τμήματος του εγκάρσιου συνόρου, στο οποίο τα φύλλα είναι προσανατολισμένα προς τα μέσα και με $F_+$ την κλειστότητα του τμήματος του εγκάρσιου συνόρου, στο οποίο τα φύλλα είναι προσανατολισμένα προς τα έξω. Θεωρούμε τις συνθήκες

(I) Υπάρχει ένα άπειρο φύλλο της $\mathcal{P}$ με άκρο στην $F_-$, δηλαδή τουλάχιστον μία τροχιά του διανυσματικού πεδίου που παράγει την 1-foliation $\mathcal{P}$, μπαίνει από το $F_-$ σε κάποια χρονική στιγμή και δε βγαίνει ποτέ έξω από την $M$.

(II) Υπάρχουν συμπαγής πολλαπλότητα $F$ και ομοιομορφισμοί $a_+ : F \to F_+$, και $a_- : F \to F_-$, τέτοιοι ώστε αν $a_+(p)$ και $a_-(q)$ είναι τα άκρα ενός φύλλου της $\mathcal{P}$, τότε $p = q$. Στην περίπτωση αυτή λέμε οτι η flow bordism έχει την ιδιότητα των *απέναντι περάτων*.

Το ζεύγος $(M, \mathcal{P})$ ονομάζεται plug αν η flow bordism $\mathcal{P}$ ικανοποιεί τις συνθήκες (I) και (II), semi-plug αν ικανοποιεί την (I) αλλά όχι την (II), unplug αν ικανοποιεί την (II) αλλά όχι την (I) και semi-unplug αν δεν ικανοποιεί καμμία από τις (I), (II).

Η πολλαπλότητα $F_-$ ονομάζεται *πεδίο εισόδου της* $\mathcal{P}$, ενώ η $F_+$ *πεδίο εξόδου της* $\mathcal{P}$. Αν η $\mathcal{P}$ έχει την ιδιότητα των απέναντι περάτων, τότε η πολλαπλότητα $F$ ονομάζεται *βάση της* $\mathcal{P}$. Το σύνολο των *θετικά παγιδευμένων σημείων* $S_-$ είναι το σύνολο των σημείων της $F_-$ που αποτελούν άκρα άπειρων φύλλων της $\mathcal{P}$. Όμοια ορίζεται το $S_+ \subset F_+$. Αν η $\mathcal{P}$ έχει την ιδιότητα των απέναντι περάτων, τότε $a_-^{-1}(S_-) = a_+^{-1}(S_+)$. Τέλος, η πολλαπλότητα $M$ ονομάζεται *φορέας της* $\mathcal{P}$.

**Παρατηρήση** : Αν η $\mathcal{P}$ είναι flow bordism με πεδίο εισόδου $F_-$ και πεδίο εξόδου $F_+$, τότε οι $F_+$ και $F_-$, αφού αποτελούν το εγκάρσιο σύνορο της $\mathcal{P}$ μαζί με κάποια σημεία με corner separation, θα έχουν κάποιες περιοχές με τετριμμένη foliation. Δηλαδή αν θεωρήσουμε τις $F_\pm \times [0,1)$ με foliation τις κάθετες ίνες $\{p\} \times [0,1)$, τότε υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $\omega_\pm$ που διατηρεί τα φύλλα, από μία ανοικτή περιοχή του $F_\pm$ στο $F_\pm \times [0,1)$, ώστε $\omega_\pm(p) = (p,0)$ για κάθε $p \in F_\pm$.

**Λήμμα 1.1.** *Έστω $\mathcal{P}$ μία flow bordism με φορέα τη συνεκτική, συμπαγή πολλαπλότητα με ο-γωνίες $M$. Έστω ότι η $\mathcal{P}$ έχει τουλάχιστον ένα περιοδικό ή ένα άπειρο φύλλο. Τότε το $S_-$ είναι μη-κενό, αν και μόνο αν το $F_-$ είναι μη-κενό. Στην περίπτωση αυτή, αν η $\mathcal{P}$ έχει την ιδιότητα των απέναντι περάτων και $F \neq \varnothing$, τότε η $\mathcal{P}$ είναι plug.*

*Απόδειξη.* Προφανώς, αν $S_- \neq \varnothing$ τότε ισχύει $F_- \neq \varnothing$, αφού $S_- \subset F_-$. Έστω τώρα $F_- \neq \varnothing$ και $\phi$ ροή, που παράγει την $\mathcal{P}$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $L_\pm : M \to [0, +\infty]$ με

$$L_\pm(p) = \sup\{t \geq 0 : \phi(\pm s, p) \in M \text{ για κάθε } 0 \leq s \leq t\},$$

όπου $L_+(p) = +\infty$ ή $L_-(p) = +\infty$, αν η τροχιά της $\phi$ που περνά από το $p$ είναι άπειρη. Αν τώρα για κάποιο $p \in M$ ισχύει $L_+(p) < +\infty$ ή $L_-(p) < +\infty$, τότε το φύλλο της $\mathcal{P}$ που περιέχει το σημείο $p$, έχει ένα άκρο $q$ στο $F_+$ ή στο $F_-$, αντίστοιχα. Το σύνολο τώρα $\{x \in M : L_+(x) < +\infty\}$ είναι μη-κενό, αφού περιέχει το $p$ και ανοικτό, από την προηγούμενη παρατήρηση. Άρα το σύνολο $L_+^{-1}(+\infty)$ είναι κλειστό. Όμοια και το σύνολο $L_-^{-1}(+\infty)$ είναι κλειστό.

Αν $S_- = \varnothing$, τότε $F_- \cap L_+^{-1}[0, +\infty) = F_- \neq \varnothing$. Η ένωση $A$ των φύλλων της $\mathcal{P}$ που τέμνουν το $F_-$, είναι κλειστό σύνολο. Πράγματι, έστω $x_m \in A$, $m \in \mathbb{N}$, δηλαδή $x_m = \phi(t_m, z_m)$ για κάποια $t_m \in \mathbb{R}$, $z_m \in F_-$ και $x_m \to x$, όπου $x \in \mathcal{P}$. Αφού $z_m \in F_-$ και το $F_-$ είναι συμπαγές, υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία $z_{m_k} \to z \in F_-$, δηλαδή $L_-(z) < +\infty$. Επίσης, η $\{t_{m_k} : k \in \mathbb{N}\}$ είναι άνω φραγμένη, γιατί αλλιώς θα είχαμε $+\infty \leftarrow t_{m_k} \leq L_-(z_m) \to L_-(z) < +\infty$, που είναι αντίφαση. Επομένως η $t_{m_k}$ συγκλίνει σε κάποιο $t \in \mathbb{R}$ και $x_{m_k} = \phi(t_{m_k}, z_{n_k}) \to \phi(t,z)$, άρα $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \phi(t,z) \in A$. Ετσι, η $M$ γράφεται ένωση δύο ξένων, μη-κενών κλειστών συνόλων

$$M = A \cup (L_-^{-1}(+\infty) \cup L_+^{-1}(+\infty)),$$

που είναι άτοπο, αφού η $M$ είναι συνεκτική. Συνεπώς, $S_- \neq \varnothing$, αν $F_- \neq \varnothing$. $\square$

**Λήμμα 1.2.** *Έστω $\mathcal{P}$ μία semi-unplug με φορέα $M$ και περιοχή εισόδου $F_-$. Τότε υπάρχει ένας ομοιομορφισμός που διατηρεί τα φύλλα $\gamma : F_- \times I \to M$, όπου η $F_- \times I$ έχει foliation με φύλλα $\{p\} \times I$, $p \in F_-$. Ειδικά αν η $\mathcal{P}$ είναι unplug με βάση $F$, τότε υπάρχει ομοιομορφισμός που διατηρεί τα φύλλα $a : F \times I \to M$, που επεκτείνει τις $a_+$ και $a_-$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\phi$ μία ροή που παράγει την $\mathcal{P}$ και $L_+ : M \to [0, +\infty]$ η απεικόνιση του Λήμματος 1.1. Η $\mathcal{P}$ είναι semi-unplug, άρα δεν υπάρχει κανένα άπειρο φύλλο, δηλαδή $L_+(p) < +\infty$ για κάθε $p \in M$. Ορίζουμε $\gamma : F_- \times I \to M$, με τύπο

$$\gamma(p,t) = \phi(p, \frac{t}{L_+(p)}).$$

Τότε η $\gamma$ είναι ο ζητούμενος ομοιομορφισμός. □

Έστω $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$, δύο flow bordisms, τέτοιες ώστε το πεδίο εξόδου της $\mathcal{P}_1$ να είναι ίδιο με το πεδίο εισόδου της $\mathcal{P}_2$. Η *σύνδεση των* $\mathcal{P}_1$ *και* $\mathcal{P}_2$, είναι η flow bordism που προκύπτει όταν ταυτίσουμε τις τετριμμένα foliated περιοχές του κοινού τους πεδίου (εισόδου της $\mathcal{P}_1$ και εξόδου της $\mathcal{P}_2$). Η *ανάκλαση* $\overline{\mathcal{P}}$ μίας flow bordism $\mathcal{P}$ είναι η flow bordism που προκύπτει όταν αντιστρέψουμε τον προσανατολισμό των φύλλων της $\mathcal{P}$, έτσι ώστε το πεδίο εισόδου της $\mathcal{P}$ γίνεται πεδίο εξόδου και αντίστροφα. Η σύνδεση μιας flow bordism $\mathcal{P}$ με την ανάκλαση της $\overline{\mathcal{P}}$ δίνει μία flow bordism που έχει την ιδιότητα των απέναντι περάτων. Αν λοιπόν η $\mathcal{P}$ είναι semi-plug, τότε η σύνδεσή της με την $\overline{\mathcal{P}}$ δίνει plug.

Έστω $\mathcal{X}$ μία foliation σε μία $n$-πολλαπλότητα $X$ και $\mathcal{P}$ μία plug διάστασης $n$, με βάση $F$. Θεωρούμε την $F \times I$ εφοδιασμένη με την τετριμμένη foliation. Θέλουμε να βρούμε μία εμφύτευση, που διατηρεί τα φύλλα, της $F \times I$ στην $X$ και κατόπιν να αντικαταστήσουμε την foliation της $F \times I$ στην $X$ με την $\mathcal{P}$. Η διαδικασία της εισαγωγής προϋποθέτει δύο ιδιότητες για την plug $\mathcal{P}$. Η $\mathcal{P}$ πρέπει να είναι *εισαγώγιμη* και *συνάψιμη*.

Μία *απεικόνιση εισαγωγής* για την plug $\mathcal{P}$ στην foliation $\mathcal{X}$, είναι μία εμφύτευση $\sigma : F \to X$, τέτοια ώστε η $\sigma(F)$ να είναι εγκάρσια στην $\mathcal{X}$. Μία απεικόνιση εισαγωγής επεκτείνεται σε εμφύτευση $\sigma : F \times I \to X$, που στέλνει την τετριμμένη foliation της $F \times I$ σε φύλλα της $\mathcal{X}$.

Η $n$-διάστατη plug $\mathcal{P}$ θα λέγεται *εισαγώγιμη*, αν η βάση της $F$ επιδέχεται εμφύτευση στο $\mathbb{R}^n$, τέτοια ώστε η $\sigma(F)$ να είναι εγκάρσια στην foliation του $\mathbb{R}^n$ από κάθετες ευθείες.

Μία plug είναι πάντα *συνάψιμη*, επειδή κάθε φύλλο της στο παράλληλο σύνορο, είναι πεπερασμένο. Στη δοσμένη πολλαπλότητα με ο-γωνίες $M$ συμβολίζουμε με $N_M$ μία ανοικτή περιοχή του συνόρου $\partial M$ της $M$. Έστω ότι η plug $\mathcal{P}$ είναι εισαγώγιμη μέσω κάποιας εμφύτευσης $\sigma : F \times I \to X$. Αν $N_{F\times I}$ είναι μία ανοικτή περιοχή του συνόρου $\partial(F \times I)$, αφαιρούμε το $\sigma((F \times I) \setminus N_{F\times I})$ από την $X$ και κολλάμε το εσωτερικό χείλος του $\sigma(N_{F\times I})$ στο φορέα $M$ της συνάψιμης plug $\mathcal{P}$, με έναν ομοιομορφισμό που διατηρεί τα φύλλα $a : N_{F\times I} \to N_M$, όπου $N_M$ είναι μία περιοχή του συνόρου $\partial M$ ώστε $a(p, 0) = a_-(p)$ και $a(p, 1) = a_+(p)$, για να μπορεί να γίνει η «συγκόλληση» του $\sigma(N_{F\times I})$ με το $M$. Ο ομοιομορφισμός $a$ ονομάζεται *ομοιομορφισμός συγκόλλησης* για την $\mathcal{P}$.

Σημειώνουμε ότι για μία plug ή unplug $\mathcal{P}$ υπάρχει πάντα ο παραπάνω ομοιομορφισμός συγκόλλησης. Πράγματι, έστω $G$ το παράλληλο σύνορο του $M$, δηλαδή $\partial M = G \cup F_+ \cup F_-$. Αφού η $\mathcal{P}$ είναι συνάψιμη, τα φύλλα της στο $G$ είναι πεπερασμένα, άρα το ίδιο θα ισχύει και για μία περιοχή $N_G$ του συνόρου $\partial G$. Επομένως, από το Λήμμα 1.2 υπάρχει ένας ομοιομορφισμός που διατηρεί τα φύλλα $\gamma : N_G \to N_F \times I$. Αφού ικανοποιείται η συνθήκη των απέναντι περάτων, είτε η $\mathcal{P}$ είναι plug, είτε είναι unplug, έπεται ότι $a(p,0) = a_-(p)$ και $a(p,1) = a_+(p)$ για κάθε $p \in F$.

Έστω $\mathcal{P}$ μία εισαγώγιμη plug, με απεικόνιση εισαγωγής $\sigma$ και ομοιομορφισμό συγκόλλησης $a$. Αν $X$ είναι η δοσμένη πολλαπλότητα με foliation $\mathcal{X}$, συμβολίζουμε με $\widehat{\mathcal{X}}$ τη foliation στην πολλαπλότητα $\widehat{X}$ που προκύπτει όταν κάνουμε εισαγωγή της $\mathcal{P}$ στην $\mathcal{X}$. Η $\widehat{X}$ δεν είναι πάντα ομοιομορφική με την $X$. Αν όμως ο ομοιομορφισμός συγκόλλησης επεκτείνεται σε έναν ομοιομορφισμό του $F \times I$ επί της $M$, τότε η $\widehat{X}$ είναι ομοιομορφική με την $X$.

## 2. Ένα $C^\infty$ διανυσματικό πεδίο στην $S^3$ με μία μόνο περιοδική τροχιά

Μία κλειστή $C^\infty$ $n$-πολλαπλότητα $M$ επιδέχεται μη-μηδενιζόμενο $C^\infty$ διανυσματικό πεδίο, αν και μόνο αν η χαρακτηριστική Euler της $M$ είναι μηδέν (βλ. [Hir], Ch.5, Theorem 2.2, Theorem 2.10). Η χαρακτηριστική Euler κάθε κλειστής 3-πολλαπλότητας είναι μηδέν, επομένως κάθε κλειστή 3-πολλαπλότητα έχει ένα μη-μηδενιζόμενο $C^\infty$ διανυσματικό πεδίο. Ένα $C^\infty$ διανυσματικό πεδίο στην 3-σφαίρα $S^3$, χωρίς σταθερά σημεία, είναι το πεδίο Hopf, που θα περιγράψουμε αμέσως παρακάτω, του οποίου όλες οι τροχιές είναι περιοδικές. Η

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 1\},$$

περιγράφεται, κάνοντας τις ταυτίσεις $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = x_3 + ix_4$ και ως

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

Η $C^\infty$ απεικόνιση $\pi : S^3 \to S^2$ με τύπο

$$\pi(z_1, z_2) = (2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2), 2\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2), |z_1|^2 - |z_2|^2),$$

ονομάζεται *απεικόνιση Hopf*. Η αντίστροφη εικόνα κάθε σημείου $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$ μέσω της $\pi$ είναι κύκλος, δηλαδή της μορφής

$$\pi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \{(z_1e^{i\theta}, z_2e^{i\theta}) : 0 \le \theta < 2\pi\} = \{(\lambda z_1, \lambda z_2) : |\lambda| = 1\}.$$

Κατ' αρχήν, η $\pi$ είναι επί, γιατί αν $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,1)$, τότε $(1,0) \in \pi^{-1}((0,0,1))$. Αν $(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$, τότε για $z_1 = \dfrac{1+x_3}{\sqrt{2+2x_3}}$ και $z_2 = \dfrac{x_1 + ix_2}{\sqrt{2+2x_3}}$, έχουμε $\pi(z_1, z_2) = (x_1, x_2, x_3)$.

Αν $(z_1, z_2)$, $(u_1, u_2) \in \pi^{-1}(x_1, x_2, x_3)$ για κάποιο $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$, τότε

$$2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = 2\mathrm{Re}(u_1\bar{u}_2) \text{ και } 2\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2) = 2\mathrm{Im}(u_1\bar{u}_2),$$

δηλαδή $z_1\bar{z}_2 = u_1\bar{u}_2$. Επίσης,

$$|z_1|^2 - |z_2|^2 = |u_1|^2 - |u_2|^2 \text{ και } |z_1|^2 + |z_2|^2 = |u_1|^2 + |u_2|^2 = 1$$

Από τις τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι $|z_1|^2 = |u_1|^2$, άρα $|z_1| = |u_1|$ και όμοια $|z_2| = |u_2|$. Αφού $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, είτε $z_1 \neq 0$, είτε $z_2 \neq 0$. Αν $z_1 \neq 0$, τότε $|z_1| = |u_1|$, δηλαδή $\lambda = \frac{u_1}{z_1} \in S^1$. Από την πρώτη σχέση έχουμε $u_2 = \lambda z_2$, επομένως

$$(u_1, u_2) = (\lambda z_1, \lambda z_2), \text{ με } |\lambda| = 1.$$

Όμοια για $z_2 \neq 0$. Άρα $\pi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \{(z_1 e^{i\theta}, z_2 e^{i\theta}) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ για κάθε $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$.

Η *ροή Hopf* $\phi : \mathbb{R} \times S^3 \to S^3$, έχει τύπο

$$\phi(t, (z_1, z_2)) = (z_1 e^{it}, z_2 e^{it}).$$

Η τροχιά κάθε σημείου $(z_1, z_2)$ της $S^3$, είναι της μορφής

$$C((z_1, z_2)) = \{(z_1 e^{it}, z_2 e^{it}) : t \in \mathbb{R}\} = \pi^{-1}(\pi(z_1, z_2)),$$

και συνεπώς είναι περιοδική. Ο απειροστικός γεννήτορας $X_H = \dfrac{\partial \phi}{\partial t}$ ονομάζεται *διανυσματικό πεδίο Hopf* στην $S^3$. Η απεικόνιση $\eta : S^3 \setminus \pi^{-1}(0,0,1) \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ με τύπο

$$\eta(z_1, z_2) = (\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2}{|z_2|}) = ((x, y), e^{i\theta}) \text{ με } 0 \leq \theta < 2\pi,$$

είναι $C^\infty$ αμφιδιαφόριση και αν $(z_1', z_2') \in S^3$ με $(z_1', z_2') = (z_1 e^{i\psi}, z_2 e^{i\psi})$, τότε

$$\eta(z_1', z_2') = (\frac{z_1 e^{i\psi}}{z_2 e^{i\psi}}, \frac{z_2 e^{i\psi}}{|z_2 e^{i\psi}|}) = (\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2}{|z_2|} e^{i\psi}) = ((x, y), e^{i(\theta + \psi)}).$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} S^3 \setminus \pi^{-1}(0,0,1) \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{R}^2 \times S^1 \arrow[dl, "\text{προβολή}"] \\ & S^2 \setminus \{(0,0,1)\} = \mathbb{R}^2 & \end{tikzcd}$$

γιατί $(\text{προβολή}) \circ \eta(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2}$ και μέσω της στερεογραφικής προβολής,

$$\pi(z_1, z_2) = \frac{2\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2)}{1 - |z_1|^2 + |z_2|^2} + i \frac{2\mathrm{Im}(z_1 \bar{z}_2)}{1 - |z_1|^2 + |z_2|^2} = \frac{2(z_1 \bar{z}_2)}{2|z_2|^2} = \frac{z_1}{z_2}, \text{ όταν } z_2 \neq 0.$$

Για κάθε $(z_1, z_2) \in S^3 \setminus \pi^{-1}(0,0,1)$ με $\pi(z_1, z_2) = ((x, y), e^{i\theta})$, θεωρούμε την $l_{(z_1, z_2)} : \mathbb{R} \to S^3 \setminus \pi^{-1}(0,0,1)$, με τύπο

$$l_{(z_1, z_2)}(t) = \eta^{-1}((x + t, y), e^{i\theta}),$$

που είναι $C^\infty$ καμπύλη. Συμβολίζουμε με $[l_{(z_1, z_2)}]$ το εφαπτόμενο διάνυσμα της $l_{(z_1, z_2)}$ στο σημείο $(z_1, z_2)$. Ορίζουμε το διανυσματικό πεδίο $X_1'$ στην $S^3$ με τύπο

$$X_1'(z_1, z_2) = \begin{cases} [l_{(z_1, z_2)}], & \text{αν } (z_1, z_2) \in S^3 \setminus \pi^{-1}(0,0,1) \\ 0, & \text{αν } (z_1, z_2) \in \pi^{-1}(0,0,1). \end{cases}$$

Το $X_1'$ είναι $C^\infty$ πεδίο και έχει σταθερά σημεία όλα τα σημεία του κύκλου $\pi^{-1}(0,0,1)$ και μόνο αυτά. Ορίζουμε τώρα το διανυσματικό πεδίο $X_1$ στην $S^3$ με τύπο $X_1 = X_H + X_1'$, δηλαδή

$$X_1(z_1,z_2) = \begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial t}(s,(z_1,z_2)) + [l_{(z_1,z_2)}], & \text{αν } (z_1,z_2) \in S^3 \setminus \pi^{-1}(0,0,1) \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial t}(s,(z_1,z_2)), & \text{αν } (z_1,z_2) \in \pi^{-1}(0,0,1). \end{cases}$$

Το $X_1$ είναι $C^\infty$ μη-μηδενιζόμενο πεδίο και θα αποδείξουμε ότι έχει μόνο μία περιοδική τροχιά. Το $Y = \pi_* X_1$, είναι ένα καλώς ορισμένο $C^\infty$ διανυσματικό πεδίο στην $S^2$. Πράγματι, παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι $Y = \pi_* X_1'$, καθώς για κάθε $(z_1,z_2) \in S^3$ έχουμε

$$\pi_{*(z_1,z_2)} X_H(z_1,z_2) = \pi_{*(z_1,z_2)} \dot{\phi}_{(z_1,z_2)}(t) = [\pi \circ \phi_{(z_1,z_2)}(t)]_{\pi(z_1,z_2)} = 0.$$

Επίσης, αν $(z_1,z_2),(z_1',z_2') \in S^3$ και $z_1' = z_1 e^{i\psi}, z_2' = z_2 e^{i\psi}$ για κάποιο $0 \leq \psi < 2\pi$, τότε

$$\eta(z_1,z_2) = ((x,y),e^{i\theta}), \eta(z_1',z_2') = ((x,y),e^{i(\theta+\psi)})$$

και

$$l_{(z_1,z_2)}(t) = \eta^{-1}((x+t,y),e^{i\theta}), l_{(z_1',z_2')}(t) = \eta^{-1}((x+t,y),e^{i(\theta+\psi)}).$$

Επομένως, αν $(z_1,z_2) \in S^3 \setminus \pi^{-1}(0,0,1)$, τότε

$$\pi_* X_1'(z_1,z_2) = \pi_*[l_{(z_1,z_2)}]_{(z_1,z_2)} = [\pi \circ \eta^{-1}((x+t,y),e^{i\theta})]_{\pi(z_1,z_2)}$$

και

$$\pi_* X_1'(z_1',z_2') = [\pi \circ \eta^{-1}((x+t,y),e^{i(\theta+\psi)})]_{\pi(z_1',z_2')}, \text{ με } \pi(z_1',z_2') = \pi(z_1,z_2).$$

Όμως $\eta^{-1}((x+t,y),e^{i(\theta+\psi)}) = e^{i\psi}\eta^{-1}((x+t,y),e^{i\theta})$ και συνεπώς $\pi\circ\eta^{-1}((x+t,y),e^{i\theta}) = \pi \circ \eta^{-1}((x+t,y),e^{i(\theta+\psi)})$. Άρα $\pi_* X_1'(z_1,z_2) = \pi_* X_1'(z_1',z_2')$. Προφανώς για $(z_1,z_2) \in \pi^{-1}(0,0,1)$ έχουμε $\pi_{*(z_1,z_2)} X_1(z_1,z_2) = 0$.

Αν $\Phi_{(z_1,z_2)}$ είναι η ολοκληρωτική καμπύλη του $X_1$ που περνά από το $(z_1,z_2) \in S^3$, η ολοκληρωτική καμπύλη του $Y$ που περνά από το $\pi(z_1,z_2) \in S^2$, είναι η $\pi \circ \Phi_{(z_1,z_2)}$, αφού

$$\frac{\partial}{\partial t}(\pi \circ \Phi_{(z_1,z_2)}(s)) = \pi_{*\Phi_{(z_1,z_2)}(s)} \frac{\partial \Phi_{(z_1,z_2)}}{\partial t}(s) = \pi_{*\Phi_{(z_1,z_2)}(s)} X_1(\Phi_{(z_1,z_2)}(s)) =$$
$$Y(\pi \circ \Phi_{(z_1,z_2)}(s)).$$

Όμοια, οι ολοκληρωτικές καμπύλες του $Y$ είναι οι εικόνες μέσω της $\pi$ των ολοκληρωτικών καμπυλών του $X_1'$.

Το $Y$ έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο, το $\pi(z_1, 0) = (0,0,1) \in S^2$ και κάθε άλλη τροχιά του $Y$, έχει θετικό και αρνητικό οριακό σύνολο αυτό το σταθερό σημείο, διότι οι τροχιές του $Y$ στο $S^2 \setminus (0,0,1) = \mathbb{R}^2$, είναι οι $\{\pi \circ \eta^{-1}((x+t,y), e^{i\theta}) = (x+t,y) : t \in \mathbb{R}\}$. Επομένως το $Y$ δεν έχει περιοδικές τροχιές.

Αν λοιπόν $(z_1, 0) \in \pi^{-1}(0,0,1)$, τότε η τροχιά του $X_1$ που περνά από το $(z_1, 0)$ είναι η $\pi^{-1}(0,0,1) \approx S^1$, άρα είναι περιοδική. Αν όμως $(z_1, z_2) \notin \pi^{-1}(0,0,1)$, τότε τα οριακά σύνολα των ολοκληρωτικών καμπυλών $\Phi_{(z_1,z_2)}$ του $X_1$ είναι το καθένα $\pi^{-1}$(οριακό σύνολο της $\pi \circ \Phi_{(z_1,z_2)}$ του $Y$) $= \pi^{-1}(0,0,1)$, άρα η τροχιά $C((z_1,z_2))$ δεν είναι περιοδική. Επομένως, η μόνη περιοδική τροχιά του $X_1$ είναι η $\pi^{-1}(0,0,1)$.

## 3. Το $C^1$ αντιπαράδειγμα του Schweitzer στην εικασία του Seifert

Θεωρούμε την $C^1$ αμφιδιαφόριση του Denjoy $f : S^1 \to S^1$, με μη-τετριμμένο ελάχιστο σύνολο $L$ και το $C^1$ διανυσματικό πεδίο στον torus $\mathcal{V} = B_*\xi$, όπως στις παράγραφους II.2 και II.3 Έστω $\mathcal{M} = B(A) \subset T^2$ το μοναδικό ελάχιστο σύνολο του $\mathcal{V}$. Το $\mathcal{M}$ είναι μονοδιάστατο ελάχιστο σύνολο, αλλά δεν είναι περιοδική τροχιά.

Θεωρούμε την 3-πολλαπλότητα $T^2 \times [-1,1]$. Έστω $h : T^2 \to [0,1]$ μία $C^\infty$ συνάρτηση, τέτοια ώστε $h^{-1}(0) = \mathcal{M}$. Ορίζουμε το διανυσματικό πεδίο $\mathcal{E}$ στην $T^2 \times [-1,1]$, με τύπο

$$\mathcal{E} = \mathcal{V} + (h + z^2)\frac{\partial}{\partial z},$$

όπου $z$ είναι η παράμετρος του $[-1,1]$. Για τη συμπεριφορά του διανυσματικού πεδίου $\mathcal{E}$, παρατηρούμε ότι στο σύνολο $\mathcal{M} \times [-1,1] \subset T^2 \times [-1,1]$, έχουμε $h(\mathcal{M}) = \{0\}$, άρα

$$\mathcal{E}(m,z) = \mathcal{V}(m) + z^2\frac{\partial}{\partial z} \text{ για κάθε } m \in \mathcal{M} \text{ και } z \in [-1,1].$$

Ειδικά στο επίπεδο $z = 0$, έχουμε $\mathcal{E}(m,0) = \mathcal{V}(m)$, δηλαδή οι τροχιές του $\mathcal{E}$ ταυτίζονται με τις τροχιές του $\mathcal{V}$. Άρα το $\mathcal{M} \times \{0\}$ είναι ελάχιστο σύνολο του $\mathcal{E}$. Οπουδήποτε αλλού, οι τροχιές του $\mathcal{E}$ δεν ταυτίζονται με τροχιές του $\mathcal{V}$ και μάλιστα κινούνται προς τη θετική κατεύθυνση του $z$, καθώς $z^2 + h > 0$. Επομένως, η 1-foliation στην οποία εφάπτεται το $\mathcal{E}$, δεν έχει κλειστά φύλλα, αφού τα φύλλα της είτε κινούνται στη θετική κατεύθυνση του $z$, είτε ταυτίζονται με τροχιές της ροής του $\mathcal{V}$ στο $\mathcal{M} \times \{0\}$. Επιπλέον, έχει άπειρα φύλλα μέσα στο μη-τετριμμένο ελάχιστο σύνολο $\mathcal{M} \times \{0\}$ και κάθε φύλλο που διέρχεται από σημείο του $\mathcal{M} \times \{-1\}$ είναι άπειρο. Άρα από το Λήμμα 1.1 είναι semi-plug με βάση τον $T^2$. Κάνοντας σύνδεση με την ανάκλασή της, παίρνουμε μία plug $\mathcal{F}$ με φορέα την $T^2 \times [-1,1]$ και βάση τον $T^2$, που δεν έχει κλειστά φύλλα. Η $\mathcal{F}$ δεν είναι εισαγώγιμη σύμφωνα με το παρακάτω, διότι ο $T^2$ είναι πολλαπλότητα χωρίς σύνορο.

**Λήμμα 3.1.** *Έστω $N$ μία συμπαγής $C^\infty$ $n$-πολλαπλότητα χωρίς σύνορο. Τότε δεν υπάρχει εμφύτευση της $N$ στο $\mathbb{R}^{n+1}$ που να είναι εγκάρσια στην foliation του $\mathbb{R}^{n+1}$ από κάθετες ευθείες.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι υπάρχει μία τέτοια εμφύτευση $i : N \to \mathbb{R}^{n+1}$, δηλαδή

$$i_{*x}(T_xN) \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}, \text{για κάθε } x \in N.$$

Αν $p : \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ είναι η προβολή του $\mathbb{R}^{n+1}$ στο $\mathbb{R}^n$, τότε έχουμε

$$(p \circ i)_{*x}(v) = p_{*i(x)} \circ i_{*x}(v) \neq 0 \text{ για κάθε } v \in T_xN, v \neq 0.$$

Επομένως, $p_{*i(x)}(i_{*x}(T_xN) \oplus \mathbb{R}) = p_{*i(x)}(\mathbb{R}^{n+1})$, δηλαδή $p_{*i(x)}(i_{*x}(T_xN)) = \mathbb{R}^n$, άρα η $(p \circ i)_{*x}$ είναι ισομορφιμός. Αφού η $N$ είναι πολλαπλότητα χωρίς σύνορο, η $p \circ i$ αντιστρέφεται τοπικά, άρα το $(p \circ i)(N)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, κάτι που είναι άτοπο. $\square$

Θεωρώντας ως $l$ την επέκταση του φύλλου της $\mathcal{E}$ που περιέχει ένα σημείο $(x, 0)$, με $x \in T^2$ τέτοιο ώστε $h(x) > 0$, δηλαδή $x \notin \mathcal{M}$, τότε το $l$ είναι φύλλο της $\mathcal{F}$ με δύο τελικά σημεία. Από το Θεώρημα I.1.5 και τη μονοτονία των φύλλων, υπάρχει μία αναλλοίωτη tubular περιοχή $N_l$ του $l$, ώστε ο περιορισμός $\Phi$ της $\mathcal{F}$ στο $T^2 \times [-1,1] \setminus N_l \cong pT^2 \times [-1,1]$ είναι plug με βάση τον $pT^2 = T^2 \setminus \{\text{εσωτερικό ενός δίσκου}\}$, που είναι πολλαπλότητα με σύνορο. Η $\Phi$ είναι εισαγώγιμη. Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει εμφύτευση του $pT^2$, εγκάρσια στις κάθετες ευθείες του $\mathbb{R}^3$.

Θεωρώντας το $C^\infty$ διανυσματικό πεδίο $X_1$ στην $S^3$ με μία μοναδική περιοδική τροχιά που κατασκευάστηκε στην παράγραφο III.2, κάνουμε εισαγωγή της plug $\Phi$ σε ένα flow box γύρω από ένα σημείο της περιοδικής τροχιάς του, το οποίο να αντιστοιχεί σε σημείο του συνόλου $\mathcal{M} \times [-1,1]$. Ο ομοιομορφισμός συγκόλλησης επεκτείνεται σε έναν ομοιομορφισμό του $pT^2 \times [-1,1]$ επί του $T^2 \times [-1,1]$ λόγω της μονοτονίας των φύλλων, όπως δείχνει το προηγούμενο σχήμα. Μ' αυτόν τον τρόπο προκύπτει ένα $C^1$ διανυσματικό πεδίο $\mathcal{S}$ στην $S^3$ χωρίς σταθερά σημεία, στο οποίο η καμπύλη που ήταν το τμήμα της περιοδικής τροχιάς του $X_1$ εκτός του flow box, δεν είναι πια τμήμα της περιοδικής τροχιάς του $\mathcal{S}$. Με άλλα λόγια, έσπασε η περιοδική τροχιά. Επιπλέον δε δημιουργήθηκε καμμία νέα περιοδική τροχιά, λόγω της ανάκλασης στην κατασκευή της $\Phi$. Συνεπώς το $\mathcal{S}$ δεν έχει καμμία περιοδική τροχιά.

# IV. ΤΟ $C^\infty$ ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΤΗΣ Κ. KUPERBERG ΣΤΗΝ ΕΙΚΑΣΙΑ ΤΟΥ SEIFERT

## 1. Η plug της K. Kuperberg

Έστω $F = \{(r,\theta) : -1 \leq r \leq 1, \theta \in \mathbb{R}/10\mathbb{Z}\}$ και $W = F \times [-1,1]$. Το $W$ είναι ομοιομορφικό με το $D^2 \times S^1$. Στο $W$ ορίζουμε το διανυσματικό πεδίο $\mathcal{W}$, με τύπο

$$\mathcal{W}(r,\theta,z) = \begin{cases} h(2z+1)\dfrac{\partial}{\partial\theta} + [(2z+1)^6 + r^2]\dfrac{\partial}{\partial z}, & \text{αν } -1 \leq z \leq 0 \\ -h(2z-1)\dfrac{\partial}{\partial\theta} + [(2z-1)^6 + r^2]\dfrac{\partial}{\partial z}, & \text{αν } 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

όπου $h : \mathbb{R} \to [0,1]$ είναι μία $C^\infty$συνάρτηση που ικανοποιεί $h(z) = h(-z), h^{-1}(1) = \{0\}$ και $h^{-1}(0) = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$. Οι ολοκληρωτικές καμπύλες του διανυσματικού πεδίου $\mathcal{W}$, είναι οι λύσεις του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{r} = 0, \tag{1}$$

$$\dot{\theta} = \begin{cases} h(2z+1), & \text{αν } -1 \leq z \leq 0 \\ -h(2z-1), & \text{αν } 0 \leq z \leq 1, \end{cases} \tag{2}$$

$$\dot{z} = \begin{cases} (2z+1)^6 + r^2, & \text{αν } -1 \leq z \leq 0 \\ (2z-1)^6 + r^2, & \text{αν } 0 \leq z \leq 1. \end{cases} \tag{3}$$

Απο την (1), συμπεραίνουμε ότι κάθε τροχιά του $\mathcal{W}$ έχει σταθερή ακτίνα, δηλαδή βρίσκεται πάνω σε κύλινδρο. Επίσης, από τον τύπο του $\mathcal{W}$ έχουμε $\mathcal{W}(0,\theta,-\frac{1}{2}) = \frac{\partial}{\partial\theta}$ και $\mathcal{W}(0,\theta,\frac{1}{2}) = -\frac{\partial}{\partial\theta}$. Συνεπώς, υπάρχουν δύο αντίθετα προσανατολισμένες περιοδικές τροχιές του $\mathcal{W}$, οι

$$T_1 = \{(r,\theta,z) \in W : r = 0, z = -\frac{1}{2}\} \text{ και } T_2 = \{(r,\theta,z) \in W : r = 0, z = \frac{1}{2}\}.$$

Οι $T_1, T_2$ είναι οι μοναδικές περιοδικές τροχιές του $\mathcal{W}$, διότι αν $r \neq 0$ και $z \neq \pm\frac{1}{2}$, από την (3) έχουμε ότι $\dot{z} > 0$. Επομένως, η τροχιά κάθε σημείου $r = (r,\theta,z) \in W$ με $r \neq 0$ και $z \neq \pm\frac{1}{2}$, κινείται συνεχώς και μονότονα προς τα πάνω.

Το ζεύγος $(W,\mathcal{W})$ είναι plug. Κατ΄ αρχήν, το $\mathcal{W}$ είναι flow bordism, γιατί το $W$ είναι συμπαγής, συνεκτική πολλαπλότητα με ο-γωνίες και το σύνορο $\partial W$ είναι εγκάρσιο, παράλληλο ή έχει corner seperation. Επίσης, η $\mathcal{W}$-τροχιά κάθε σημείου $p = (0,\theta,z)$ με $z \neq \pm\frac{1}{2}$, «παγιδεύεται» μέσα στο $W$ και έχει θετικό οριακό σύνολο την $T_1$, αν $p = (0,\theta,z)$ με $-1 \leq z < -\frac{1}{2}$, αρνητικό οριακό σύνολο την $T_2$, αν $p = (0,\theta,z)$ με $\frac{1}{2} < z \leq 1$, ή την $T_2$ και την $T_1$ ως θετικό και αρνητικό οριακό σύνολο αντίστοιχα, αν $p = (0,\theta,z)$ με $-\frac{1}{2} < z < \frac{1}{2}$, διότι $\dot{z}(t) > 0$ για $z(t) \neq \pm\frac{1}{2}$, ενώ για $z = \pm\frac{1}{2}$ έχουμε τις περιοδικές τροχιές $T_1, T_2$. Τέλος, το $\mathcal{W}$ ικανοποιεί την ιδιότητα των απέναντι περάτων, διότι είναι αντισυμμετρικό, δηλαδή το $\mathcal{W}|_{F\times[-1,0]}$ είναι η ανάκλαση του $-\mathcal{W}|_{F\times[0,1]}$ ως προς το επίπεδο $z = 0$. Πράγματι, αν $T : F \times [-1,0] \to F \times [0,1]$ είναι η ανάκλαση ως προς το επίπεδο $z = 0$, που έχει τύπο $T(r,\theta,z) = (r,\theta,-z)$, τότε

$$T_{*(r,\theta,z)}\mathcal{W}(r,\theta,z) = -h(2z-1)\frac{\partial}{\partial\theta} - [(2z-1)^6 + r^2]\frac{\partial}{\partial z} = -\mathcal{W}(r,\theta,-z).$$

.

Έστω $D$ ένας κλειστός δίσκος στην $F$, του οποίου το σύνορο στην $F$ είναι ένα εμφυτευμένο τόξο $\gamma$, εγκάρσιο στο $\partial F$. Έστω $\sigma : D \to W$ μία εμφύτευση που ικανοποιεί τα παρακάτω.

α) Το $\sigma(D)$ είναι εγκάρσιο στο $\mathcal{W}$.

β) Το $\sigma(D)$ είναι ξένο προς τις $F_- = F \times \{-1\}$ και $F_+ = F \times \{+1\}$.

γ) $\sigma(\gamma) \subset \partial W$ και $\sigma(D \setminus \gamma) \cap \partial W = \varnothing$.

δ) Το $\sigma(\gamma)$ δεν τέμνει τροχιές του $\mathcal{W}$ που έχουν άκρα στο $a_-(\gamma)$, όπου $a_- : F \to F_-$ είναι ο ομοιομορφισμός που ορίζεται στην παράγραφο III.1

Τότε η $\sigma$ επεκτείνεται σε μία εμφύτευση $f : D \times [-1, 1] \to W$, η οποία ικανοποιεί τα παρακάτω:

$i$) Για κάθε $x \in D$, το $f(\{x\} \times [-1, 1])$ περιέχεται σε τροχιά του $\mathcal{W}$.

$ii$) Η $f$ περιορισμένη σε μία περιοχή του $\partial W$, διατηρεί την κατεύθυνση της ροής στις τροχιές του $\mathcal{W}$.

$iii$) $f(D \times [-1, 1]) \cap (\partial D \setminus \gamma) = \varnothing$.

$iv$) $f(\gamma \times [-1, 1]) \subset b \times [-1, 1]$, όπου το $b$ είναι ένα τόξο του $\partial F$, ξένο προς το $\partial D \setminus \gamma$.

Η $f$ είναι της μορφής $f = \Phi_{\mathcal{W}}|_{[-\epsilon,\epsilon]\times\sigma(D)} \circ K$, για κατάλληλο $\epsilon$, όπου $\Phi_{\mathcal{W}}$ είναι η ροή του $\mathcal{W}$ και η $K : [-1, 1] \times \sigma(D) \to [-\epsilon, \epsilon] \times \sigma(D)$ είναι απλώς αναπαραμέτρηση. Οι συνθήκες $i$) και $ii$) έπονται άμεσα από τον τρόπο κατασκευής της $f$, ενώ η συνθήκη $iii$) ισχύει λόγω της γ).

Θεωρούμε δίσκους $D_i, i = 1, 2$, στην $F$ και $\sigma_i : D_i \to W$ εμφυτεύσεις που ικανοποιούν τις συνθήκες α), β), γ) και δ). Απαιτούμε επιπλέον οι $\sigma_i$ να ικανοποιούν:

ε) Υπάρχει $\theta_i \in \mathbb{R}/10\mathbb{Z}$, τέτοιο ώστε $\sigma_i(0, \theta_i) \in T_i$, όπου $T_i$ είναι οι δύο περιοδικές τροχιές της plug $(W, \mathcal{W})$, $i = 1, 2$.

στ) Στο $U_i = D_i \setminus \{(0, \theta_i)\}$, οι $\sigma_i$ ικανοποιούν την *ακτινική ανισότητα*, δηλαδή αν $(r, \theta) \in U_i, \theta \neq \theta_i$ και $\sigma_i(r, \theta) = (r', \theta')$, τότε $r > r'$. Ειδικά το τόξο $\gamma_i$, απεικονίζεται σε τόξο ακτίνας $-1$.

Για παράδειγμα, έστω ότι

$$D_1 = \{(r,\theta,-1) : (\theta-2)^2 + \frac{1}{8}(r-2)^2 \leq 1\}$$

και

$$D_2 = \{(r,\theta,1) : (\theta-8)^2 + \frac{1}{8}(r-2)^2 \leq 1\}.$$

Αν η $\sigma_1 : D_1 \to W$ έχει τύπο

$$\sigma_1(r,\theta,-1) = (1-2(\theta-2)^2 - (\frac{r}{2}-1)^2, 6, \phi_1(\theta)),$$

όπου $\phi_1 : [\frac{9}{8}, \frac{23}{8}] \to (-1,+1)$ μία γνησίως φθίνουσα $C^\infty$ συνάρτηση με το $\phi_1(\frac{9}{8})$ αρκετά κοντά στο $+1$, το $\phi_1(\frac{23}{8})$ αρκετά κοντά στο $-1$ και $\phi_1(2) = -\frac{1}{2}$ και η $\sigma_2 : D_2 \to W$ έχει τύπο

$$\sigma_2(r,\theta,+1) = (1-2(\theta-8)^2 + (\frac{r}{2}-1)^2, 4, \phi_2(\theta)),$$

όπου $\phi_2 : [\frac{57}{8}, \frac{71}{8}] \to (-1,+1)$ μία γνησίως αύξουσα $C^\infty$ συνάρτηση με το $\phi_2(\frac{57}{8})$ αρκετά κοντά στο $-1$, το $\phi_2(\frac{71}{8})$ αρκετά κοντά στο $+1$ και $\phi_2(8) = \frac{1}{2}$, τότε οι $\sigma_1, \sigma_2$ $i = 1,2$, ικανοποιούν τις συνθήκες α) έως στ):

α) Το $\sigma_i(D_i)$ είναι προφανώς εγκάρσιο στο $\mathcal{W}$ για $i = 1,2$.

β) Για κάθε $(r,\theta,-1) \in D_1$ στον τύπο της $\sigma_1$ έχουμε $\phi_1(\theta) \neq \pm 1$, άρα $\sigma_1(D_1) \cap F_\pm = \varnothing$. Όμοια, $\sigma_2(D_2) \cap F_\pm = \varnothing$.

γ) Για κάθε $i = 1,2$, το τόξο $\gamma_i$ απεικονίζεται μέσω της $\sigma_i$ σε τόξο ακτίνας $-1$, επομένως $\sigma_i(\gamma_i) \subset \partial W$. Επίσης, ισχύει ότι $\sigma_i(D_i \setminus \gamma_i) \cap \partial W = \varnothing$, λόγω της ακτινικής ανισότητας που θα αποδειχθεί παρακάτω και του β).

δ) Το $\gamma_i$ απεικονίζεται μέσω της $\sigma_i$ σε τόξο ακτίνας $-1$, ενώ το $a_-(\gamma_i)$ δεν πιάνει την τιμή $-1$ για κανένα σημείο του $\gamma_i$. Επομένως, αφού οι τροχιές του $\mathcal{W}$ έχουν σταθερή ακτίνα, το $\sigma_i(\gamma_i)$ δεν τέμνει τροχιές του $\mathcal{W}$ που έχουν άκρα στο $a_-(\gamma_i)$.

ε) Για $\theta_1 = 2$ έχουμε $\sigma_1(0,2,-1) = (0,6,-\frac{1}{2})$, που είναι σημείο της $T_1$, ενώ για $\theta_2 = 8$ έχουμε $\sigma_2(0,8,+1) = (0,4,\frac{1}{2})$, που είναι σημείο της $T_2$.

στ) Αν $(r,\theta,-1) \in D_1$ τότε $\sigma_1(r,\theta,-1) = (1-2(\theta-2)^2 - (\frac{r}{2}-1)^2, 6, \phi_1(\theta)) = (r',\theta',z')$. Ισχύει $r = r'$, αν και μόνο αν $1-2(\theta-2)^2 - \frac{r^2}{4} + r - 1 = r$, ισοδύναμα $2(\theta-2)^2 + \frac{r^2}{4} = 0$, δηλαδή $r = 0$ και $\theta = 2 = \theta_1$. Ενώ για $(r,\theta,-1) \in D_1 \setminus \{(0,\theta_1,-1)\}$, έχουμε $r' = -2(\theta-2)^2 - \frac{r^2}{4} < r$. Άρα η $\sigma_1$ ικανοποιεί την ακτινική ανισότητα στο $D_1 \setminus \{(0,\theta_1,-1)\}$. Ομοίως για την $\sigma_2$ στο $D_2 \setminus \{(0,\theta_2,+1)\}$.

**Παρατηρήση** : Με κατάλληλη επιλογή των $\phi_i$ $i = 1,2$, όπως για παράδειγμα,

$$\phi_1(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2 - 3\theta + \frac{7}{2}, \text{ με } \theta \in [\frac{9}{8}, \frac{23}{8}],$$

έχουμε

$$\phi_1(\frac{9}{8}) = \frac{97}{128}, \text{ άρα } 1 - \phi_1(\frac{9}{8}) = \frac{31}{128}$$

και

$$\phi_1(\frac{23}{8}) = -\frac{127}{128}, \text{ άρα } -1 - \phi_1(\frac{23}{8}) = -\frac{1}{128}.$$

Δηλαδή η απόσταση των άκρων του $\phi_1(\theta)$ από τις $F_+, F_-$ είναι αρκετά μικρή, ώστε να θεωρούμε ότι τα $\phi_1(\frac{9}{8})$ και $\phi_1(\frac{23}{8})$ βρίσκονται στην περιοχή των $F_+$ και $F_-$ αντίστοιχα, όπου το $\mathcal{W}$ είναι εγκάρσιο.

Στο $W$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας

$$(r, \theta, z) \sim f_i(r, \theta, z) \text{ για } (r, \theta, z) \in D_i \times [-1, 1] \text{ και } i = 1, 2.$$

Έστω $B = \overline{W \setminus f_1(D_1 \times [-1,1]) \cup f_2(D_2 \times [-1,1])}$, $K$ ο χώρος πηλίκο $W/\sim$ και $p : W \to K$ η απεικόνιση πηλίκο. Τότε $K \approx H \times [-1, 1]$, όπου ο χώρος $H$ είναι το συμπλήρωμα των εσωτερικών δύο ξένων δίσκων στον $T^2$. Δηλαδή, ο $H$ είναι ομοιομορφικός με έναν torus με δύο τρύπες.

Στο $K$ ορίζεται τώρα ένα $C^\infty$ διανυσματικό πεδίο $\mathcal{K}$, του οποίου οι τροχιές είναι οι συγκολλήσεις των τροχιών του $\mathcal{W}$ στο $B$, με τις εικόνες των τροχιών στα $D_i \times [-1, 1]$ μέσω των $f_i$, $i = 1, 2$, λόγω της ιδιότητας $i)$ των $f_i$. Το ζεύγος $(K, \mathcal{K})$ δεν είναι καν flow bordism, διότι υπάρχουν «σκαλοπάτια» στο $K$, δηλαδή υπάρχουν σημεία στο $\partial K$ που δεν ανήκουν ούτε στο παράλληλο σύνορο, ούτε στο εγκάρσιο, ούτε έχουμε corner seperation σ′ αυτά. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι $f_i(\gamma_i \times [-1, 1]) \subsetneqq b_i \times [-1, 1]$, για $i = 1, 2$. Όμως, με βάση την παραπάνω Παρατήρηση, επιλέγοντας κατάλληλα τις $\sigma_i$ μπορούμε να επιτύχουμε τα άκρα των $\sigma_i(\gamma_i)$ να είναι αρκετά κοντά στις $F_+, F_-$, δηλαδή μέσα στην περιοχή τους όπου το σύνορο είναι εγκάρσιο. Μπορούμε τότε, κινούμενοι στην κατεύθυνση του σταθερού στην περιοχή αυτή διανυσματικού πεδίου $\mathcal{W}$, να προσεγγίσουμε τις $F_+, F_-$, με επιφάνειες $\tilde{F}_+, \tilde{F}_-$, που να είναι εγκάρσιες στο $\mathcal{W}$. Έστω $K'$ η πολλαπλότητα με ο-γωνίες που προκύπτει μετά την προσέγγιση των επιφανειών $F_+$ και $F_-$ από τις $\tilde{F}_+, \tilde{F}_-$ και $\mathcal{K}'$ ο περιορισμός του διανυσματικού πεδίου $\mathcal{K}$ στην $K'$. Θα αποδείξουμε στην επόμενη παράγραφο ότι το ζεύγος $(K', \mathcal{K}')$ είναι plug. Καταχρηστικά, θα συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $K$ και $\mathcal{K}$ για την παραπάνω πολλαπλότητα και το περιορισμένο σ′ αυτήν πεδίο, αντί των $K'$ και $\mathcal{K}'$.

## 2. Η απεριοδικότητα της plug της K. Kuperberg

Για κάθε σημείο $x \in K$, ορίζουμε ως κυλινδρικές συντεταγμένες του $x$, αυτές της μοναδικής προεικόνας του $x$ μέσω της $p$ στο $W \setminus f_1(D_1 \times [-1,1]) \cup f_2(D_2 \times [-1,1])$. Τα σημεία του $H \times \{-1\} \setminus f_i(D_i \times \{-1\})$, $i = 1, 2$, ονομάζονται *σημεία κύριας εισόδου*, ενώ τα σημεία του $H \times \{+1\} \setminus f_i(D_i \times \{+1\})$, $i = 1, 2$, ονομάζονται *σημεία κύριας εξόδου*. Επίσης, τα σημεία των $f_i(D_i \times \{-1\})$, $i = 1, 2$, ονομάζονται *σημεία δευτερεύουσας εισόδου*, ενώ τα σημεία των $f_i(D_i \times \{+1\})$, $i = 1, 2$, ονομάζονται *σημεία δευτερεύουσας εξόδου*.

Τα σημεία εισόδου και εξόδου ονομάζονται *σημεία μετάβασης*. Αν το $x = (r, \theta, -1)$ είναι σημείο κύριας εισόδου και το $y = (r, \theta, +1)$ είναι σημείο κύριας εξόδου και τα $x, y$ έχουν τις ίδιες $(r, \theta)$-συντεταγμένες, τότε θα γράφουμε $x \equiv y$. Τον ίδιο συμβολισμό θα χρησιμοποιούμε και για τα σημεία δευτερεύουσας εισόδου και εξόδου που έχουν τις ίδιες $(r, \theta)$-συντεταγμένες, θεωρώντας τα ως σημεία των $D_i \times \{-1, +1\}$, $i = 1, 2$, πριν δηλαδή κάνουμε τις εμφυτεύσεις $f_1, f_2$.

Ένα *τόξο Wilson* είναι ένα τμήμα $\mathcal{K}$-τροχιάς που ενώνει δύο σημεία μετάβασης, χωρίς να περιέχει άλλα τέτοια σημεία ενδιάμεσα. Υπάρχουν δύο *ειδικά τόξα Wilson*, που προκύπτουν μετά τις εμφυτεύσεις $f_1, f_2$ και περιέχονται στις περιοδικές τροχιές $T_1, T_2$ του $\mathcal{W}$. Δύο τόξα Wilson $l, k$ λέγονται *$\mathcal{K}$-διαδοχικά*, αν το τέλος του $l$ είναι η αρχή του $k$. Ένα *τόξο Kuperberg*, είναι ένα τμήμα $\mathcal{K}$-τροχιάς που ενώνει δύο σημεία μετάβασης. Κάθε τόξο Kuperberg, αποτελείται από $\mathcal{K}$-διαδοχικά τόξα Wilson.

Έστω $l, k$ δύο τόξα Wilson. Θα λέμε ότι *το $l$ $\mathcal{W}$-προηγείται του $k$*, συμβολικά $l \prec k$, αν το $k$ περιέχεται στη θετική $\mathcal{W}$-τροχιά του $l$. Παρατηρούμε ότι ισχύει $l \prec l$, μόνο αν το $l$ είναι ειδικό τόξο Wilson.

Έστω $L = [x_0, x_n]$ ένα τόξο Kuperberg που ενώνει τα σημεία μετάβασης $x_0, x_n$, με το $x_n$ να βρίσκεται στη θετική τροχιά του $x_0$ και $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n$ η σειρά όλων των διαδοχικών σημείων μετάβασης του $L$. Συμβολίζουμε με $l_i = [x_{i-1}, x_i]$ το τόξο Wilson που ενώνει τα σημεία μετάβασης $x_{i-1}, x_i$. Δηλαδή έχουμε $L = l_1 \cup l_2 \cup ... \cup l_n$. Ορίζουμε την *$L$-στάθμη του τόξου $l_i$*, συμβολικά $lev(l_i)$ ως εξής: Θέτουμε $lev(l_1) = 0$ και

$$lev(l_{i+1}) = (\text{πλήθος σημείων εισόδου})\text{-}(\text{πλήθος σημείων εξόδου})$$

$$\text{μεταξύ των σημείων } x_0 \text{ και } x_{i+1} =$$

$$\sum_{k=1}^{i} sgnx_k, \text{ όπου } sgnx_k = \begin{cases} +1, & \text{αν το } x_k \text{ είναι σημείο δευτερεύουσας εισόδου,} \\ -1, & \text{αν το } x_k \text{ είναι σημείο δευτερεύουσας εξόδου.} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι αν το $x_i$ είναι σημείο δευτερεύουσας εισόδου, τότε $lev(l_{i+1}) = lev(l_i) + 1$, ενώ αν το $x_i$ είναι σημείο δευτερεύουσας εξόδου, τότε $lev(l_{i+1}) = lev(l_i) - 1$.

**Λήμμα 2.1.** *Έστω $l = [x, y]$ και $k = [z, u]$ δύο τόξα Wilson. Αν το $y$ είναι σημείο δευτερεύουσας εισόδου, το $z$ είναι σημείο δευτερεύουσας εξόδου και $y \equiv z$, τότε $l \prec k$.*

*Απόδειξη.* Έστω $f_i : D_i \times [-1, 1] \to F \times [-1, 1]$, $i = 1, 2$, οι δύο εμφυτεύσεις στην $K$. Θεωρούμε τις προεικόνες $y', z'$ των $y, z$ μέσω κάποιας $f_i$ στο $D_i$. Έστω, παραδείγματος χάρην, ότι $y' \in D_1 \times \{-1\}$, οπότε $z' \in D_1 \times \{+1\}$. Αφού $y \equiv z$, υπάρχει κάθετο ευθύγραμμο τμήμα $m$, που ενώνει τα $y', z'$. Τότε το $f_1(m)$ περιέχεται σε $\mathcal{W}$-τροχιά και έχει για αρχή το $y$ και για τέλος το $z$. Δηλαδή, τα $l, k$ βρίσκονται στην ίδια $\mathcal{W}$-τροχιά και επιπλέον $l \prec k$. $\square$

**Πόρισμα 2.2.** *Έστω $L = [x_0, x_3]$ ένα τόξο Kuperberg με $L = l_1 \cup l_2 \cup l_3$, όπου τα $l_1, l_2, l_3$, είναι $\mathcal{K}$-διαδοχικά τόξα Wilson. Αν $lev(l_2) = +1$ και $lev(l_3) = 0$, τότε $l_1 \prec l_3$.*

*Απόδειξη.* Από τον ορισμό της $L$-στάθμης, αφού $lev(l_2) = +1$, το $x_1$ είναι σημείο δευτερεύουσας εισόδου και αφού $lev(l_3) = 0$, το $x_2$ είναι σημείο δευτερεύουσας εξόδου. Αφού τα $x_1, x_2$ είναι διαδοχικά σημεία δευτερεύουσας εισόδου και εξόδου και η $\mathcal{W}$ ικανοποιεί την ιδιότητα των απέναντι περάτων, έχουμε $x_1 \equiv x_2$. Άρα από το Λήμμα 2.1, για $l = l_1$ και $k = l_3$, έχουμε $l_1 \prec l_3$. $\square$

**Λήμμα 2.3.** *Έστω $l = [x, y]$ και $k = [z, u]$ δύο τόξα Wilson. Αν το $x$ είναι σημείο εισόδου, το $u$ είναι σημείο εξόδου και $l \prec k$, τότε $x \equiv u$.*

*Απόδειξη.* Αφού $l \prec k$, τα $l$ και $k$ βρίσκονται στην ίδια $\mathcal{W}$-τροχιά. Αν λοιπόν το $x$ είναι σημείο εισόδου και το $u$ είναι σημείο εξόδου, αφού η $\mathcal{W}$ ικανοποιεί την ιδιότητα των απέναντι περάτων, θα έχουμε $x \equiv u$. $\square$

**Λήμμα 2.4.** *Έστω $L = [x_0, x_n]$ ένα τόξο Kuperberg με $L = l_1 \cup ... \cup l_n$, όπου τα $l_1, ..., l_n$, είναι $\mathcal{K}$-διαδοχικά τόξα Wilson. Αν $lev(l_n) = 0$ και $lev(l_i) \geq 0$ για κάθε $i = 1, ..., n$, τότε $l_1 \prec l_n$.*

*Απόδειξη.* Εφαρμόζουμε επαγωγή στο πλήθος $n$ των επιμέρους τόξων Wilson που αποτελούν το τόξο Kuperberg. Για $n = 3$, θα έχουμε $lev(l_3) = 0$ και $lev(l_2) = +1$.

Συνεπώς, από το Πόρισμα 2.2 προκύπτει ότι $l_1 \prec l_3$. Έστω ότι το Λήμμα ισχύει για όλα τα τόξα Kuperberg που αποτελούνται από $k$ τόξα Wilson, με $3 \leq k \leq n-1$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει $2 \leq i \leq n-1$, τέτοιο ώστε $lev(l_i) = 0$. Τότε τα τόξα Kuperberg $L_1 = l_1 \cup ... \cup l_i$ και $L_2 = l_i \cup ... \cup l_n$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Λήμματος, για μήκη τόξων μικρότερα ή ίσα του $n-1$. Επομένως, από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $l_1 \prec l_i$ και $l_i \prec l_n$, άρα $l_1 \prec l_n$.

β) Έστω ότι $lev(l_i) \geq 1$ για κάθε $i = 2, ..., n-1$. Στο τόξο Kuperberg $L = l_1 \cup ... \cup l_n$, έχουμε $lev(l_2) = +1$, δηλαδή $sgnx_1 = +1$ και το $x_1$ είναι σημείο δευτερεύουσας εισόδου. Αφού $lev(l_n) = 0$ και $lev(l_{n-1}) \geq 1$, έχουμε $sgnx_{n-1} = -1$ και το $x_{n-1}$ είναι σημείο δευτερεύουσας εξόδου. Άρα

$$0 = lev(l_n) = \sum_{i=1}^{n-1} sgnx_i = \sum_{i=2}^{n-2} sgnx_i.$$

Θεωρούμε το τόξο Kuperberg $L' = l_2 \cup ... \cup l_{n-1} = l'_1 \cup ... \cup l'_{n-2}$ που ενώνει τα σημεία μετάβασης $x_1$ και $x_{n-1}$. Τότε η $L'$-στάθμη του $l'_{n-2}$ είναι

$$lev(l'_{n-2}) = \sum_{i=2}^{n-2} sgnx_i = lev(l_n) = 0.$$

Επομένως, το $L'$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος για $k = n-2 < n-1$, άρα από την επαγωγική υπόθεση $l_2 \prec l_{n-1}$. Κατά συνέπεια $x_1 \equiv x_{n-1}$, από το Λήμμα 2.3. Επαναλαμβάνοντας τώρα το ίδιο επιχείρημα όπως στην περίπτωση $k = 3$ και για τα $l_1, L', l_n$ έχουμε $l_1 \prec l_n$. $\square$

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι η flow bordism $\mathcal{K}$ ικανοποιεί την ιδιότητα των απέναντι περάτων.

**Πρόταση 2.5.** *Έστω $L = [x_0, x_n]$ ένα τόξο Kuperberg με $L = l_1 \cup ... \cup l_n$, όπου τα $l_1, ..., l_n$ είναι $\mathcal{K}$-διαδοχικά τόξα Wilson. Αν το $x_0$ είναι σημείο κύριας εισόδου και το $x_n$ είναι σημείο κύριας εξόδου, τότε $x_0 \equiv x_n$. Αν $n > 1$, τότε $l_1 \prec l_n$.*

*Απόδειξη.* Για $n = 1$ ισχύει, διότι τότε δεν υπάρχουν σημεία δευτερεύουσας εισόδου-εξόδου στην τροχιά του $x_0$, επομένως η $\mathcal{K}$-τροχιά του $x_0$ ταυτίζεται με την $\mathcal{W}$-τροχιά του, η οποία ικανοποιεί την ιδιότητα των απέναντι περάτων.

Έστω ότι $n > 1$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$lev(l_i) \geq 0 \text{ και } lev(l_i) \geq lev(l_n) \text{ για κάθε } i = 1, ..., n.$$

Για την απόδειξη του πρώτου, παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι για $i = 2$, έχουμε $lev(l_2) = +1$, δηλαδή το $x_1$ είναι σημείο δευτερεύουσας εισόδου. Ειδάλλως, αν $lev(l_2) = -1$, τότε το $x_1$ θα ήταν σημείο δευτερεύουσας εξόδου και αφού τα $x_0, x_1$ είναι διαδοχικά σημεία μετάβασης, θα είχαμε $x_0 \equiv x_1$. Όμως το $x_0$ είναι σημείο κύριας εισόδου, επομένως και το $x_1$ θα είναι σημείο κύριας εξόδου, κάτι που ισχύει μόνο στην περίπτωση $n = 1$. Έστω τώρα ότι υπάρχει κάποιο $1 < i < n$ για το οποίο ισχύει $lev(l_{i+1}) = -1$. Επιλέγουμε το ελάχιστο $i$ με την ιδιότητα αυτήν, οπότε επιπλέον $lev(l_i) = 0$ και $lev(l_j) \geq 0$ για κάθε $j = 1, ..., i$. Τότε από το Λήμμα 2.4 έχουμε $l_1 \prec l_i$. Αφού $l_1 = [x_0, x_1]$ και $l_i = [x_{i-1}, x_i]$, από το Λήμμα 2.3 έχουμε $x_0 \equiv x_i$. Όμως το $x_0$ είναι σημείο κύριας εισόδου, άρα το $x_i$ θα είναι σημείο κύριας εξόδου με $i < n$, που είναι άτοπο.

Η απόδειξη του δεύτερου ισχυρισμού γίνεται με το ίδιο επιχείρημα, αλλά προς την αντίθετη κατεύθυνση. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι υπάρχει κάποιο $j$ με $1 < j < n$ για το οποίο ισχύει $lev(l_j) < lev(l_n)$. Επιλέγουμε το μέγιστο $j$ μ' αυτήν την ιδιότητα, οπότε επιπλέον $lev(l_{j+1}) = lev(l_n)$. Θεωρούμε το τόξο Kuperberg $L' = l_{j+1} \cup ... \cup l_n = l'_1 \cup ... \cup l'_{n-j}$. Τότε, για κάθε $\mu = 1, ..., n-j$ η $L'$-στάθμη του $l'_\mu$ είναι

$$lev(l'_\mu) = lev(l_{j+\mu}) - lev(l_n).$$

Άρα $lev(l'_{n-j}) = lev(l_{j+n-j}) - lev(l_n) = 0$ και $lev(l'_\mu) = lev(l_{j+\mu}) - lev(l_n) \geq 0$, διότι το $j$ είναι μέγιστο με την ιδιότητα $lev(l_j) < lev(l_n)$. Άρα από το Λήμμα 2.4 έχουμε $l'_1 \prec l'_{n-j}$, δηλαδή $l_{j+1} \prec l_n$. Αφού $l_{j+1} = [x_j, x_{j+1}]$ και $l_n = [x_{n-1}, x_n]$, από το Λήμμα 2.3 έχουμε $x_j \equiv x_n$. Το $x_n$ είναι σημείο κύριας εξόδου, άρα το $x_j$ θα σημείο κύριας εισόδου με $j > 0$, που είναι άτοπο. Έτσι, για $i = 1$, έχουμε τώρα $0 = lev(l_1) \geq lev(l_n)$ και για $i = n$ έχουμε $lev(l_n) \geq 0$. Επομένως $lev(l_n) = 0$ και $lev(l_i) \geq 0$, για κάθε $i - 1, ..., n$. Άρα, από το Λήμμα 2.4 έχουμε $l_1 \prec l_n$, για $n > 1$ και από το Λήμμα 2.3 έχουμε $x_0 \equiv x_n$. □

**Λήμμα 2.6.** *Αν το $x_0$ είναι σημείο κύριας εισόδου με $x_0 = (0, \theta, -1)$, τότε η $\mathcal{K}$-τροχιά του δε φτάνει σε σημείο κύριας εξόδου.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι η $\mathcal{K}$-τροχιά $x_0$ έχει σημείο κύριας εξόδου $x_n$. Από την Πρόταση 2.5 θα έχουμε $x_0 \equiv x_n$, δηλαδή $x_n = (0, \theta, +1)$. Όμως έχουμε δει ότι οι $\mathcal{W}$-τροχιές σημείων της μορφής $(0, \theta, -1)$, έχουν θετικό οριακό σύνολο την $T_1$, επομένως δε μπορεί να έχουν σημείο κύριας εξόδου. □

Από την Πρόταση 2.5 και το Λήμμα 2.6 προκύπτει λοιπόν ότι το $(K, \mathcal{K})$ είναι plug. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι το $\mathcal{K}$ δεν έχει καμμία περιοδική τροχιά στο $K$. Όπως θα δούμε στην απόδειξη που ακολουθεί, αυτό οφείλεται στην ακτινική ανισότητα, που δε χρησιμοποιήθηκε μέχρι τώρα.

**Λήμμα 2.7.** *Έστω $l_1, ..., l_n$ τόξα Wilson και $r(l_i)$ η $r$-συντεταγμένη κάθε σημείου του τόξου $l_i$.*

*α) Αν $l_i \prec l_j$, τότε $r(l_i) = r(l_j)$.*

*β) Αν $lev(l_i) < lev(l_{i+1})$, τότε $r(l_i) \leq r(l_{i+1})$, με $r(l_i) = r(l_{i+1})$ μόνο όταν το $l_i$ είναι ειδικό τόξο.*

*Απόδειξη.* Το (α) είναι προφανές, διότι αν $l_i \prec l_j$, τότε τα $l_i, l_j$ ανήκουν στην ίδια $\mathcal{W}$-τροχιά και άρα $r(l_i) = r(l_j)$. Για το (β), έστω ότι $lev(l_i) < lev(l_{i+1})$, δηλαδή $lev(l_{i+1}) = lev(l_i) + 1$, που σημαίνει ότι το $x_i$ είναι σημείο δευτερεύουσας εισόδου. Έστω ότι $x_i = \sigma_j(y_i)$ με $y_i \in D_j \times \{-1\}$ και $\sigma_j : D_j \to W$ η γνωστή εμφύτευση, για $j = 1$ ή 2. Από την ακτινική ανισότητα έχουμε $r(y_i) \geq r(x_i)$. Όμως $r(y_i) = r(l_{i+1})$ και $r(x_i) = r(l_i)$, άρα $r(l_{i+1}) \geq r(l_i)$. Αν έχουμε $r(l_{i+1}) = r(l_i)$ με $lev(l_i) < lev(l_{i+1})$, τότε η $\mathcal{W}$-τροχιά του $x_i$ θα είναι κάποια των $T_1, T_2$, δηλαδή το $l_i$ θα είναι κάποιο ειδικό τόξο Wilson. □

**Λήμμα 2.8.** *Έστω $L = l_1 \cup ... \cup l_n$ ένα τόξο Kuperberg, όπου τα $l_1, ..., l_n$ είναι $\mathcal{K}$-διαδοχικά τόξα Wilson.*

*α) Αν* $lev(l_i) \geq 0$ *για κάθε* $i = 2, ..., n$ *τότε* $r(l_n) \geq r(l_1)$.

*β) Αν επιπλέον* $lev(l_n) > 0$ *και το* $l_1$ *δεν είναι ειδικό τόξο, τότε* $r(l_n) > r(l_1)$.

*Απόδειξη.* Εφαρμόζουμε επαγωγή στο $n$. Για $n = 2$ έχουμε $lev(l_2) \geq 0$, οπότε $lev(l_2) = +1 > 0 = lev(l_1)$ και από το Λήμμα 2.7(β) έχουμε $r(l_2) \geq r(l_1)$. Έστω ότι ισχύει για κάθε τόξο Kuperberg που αποτελείται από $k$ τόξα Wilson, με $2 \leq k \leq n-1$. Έστω ότι $lev(l_n) \geq 0$ για κάθε $i = 2, ..., n$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

*i)* Αν $lev(l_n) = 0$, από το Λήμμα 2.4 έχουμε ότι $l_1 \prec l_n$ και από το Λήμμα 2.7(α) έχουμε $r(l_1) = r(l_n)$.

*ii)* Αν $lev(l_n) > 0$, έστω $i$ ο μέγιστος ακέραιος με $1 \leq i < n$ για τον οποίο ισχύει $lev(l_i) = 0$. Από τα Λήμματα 2.4 και 2.7 έχουμε $l_1 \prec l_i$ και $r(l_1) = r(l_i)$. Αν $i = 1$, τότε το $l_1$ είναι ειδικό τόξο. Έτσι, $i > 1$ και ούτε το $l_i$ είναι ειδικό τόξο, αφού $r(l_1) = r(l_i)$. Επειδή ο $i$ είναι ο μέγιστος ακέραιος με την ιδιότητα $lev(l_i) = 0$, τότε $lev(l_{i+1}) = +1 > lev(l_i)$, άρα από το Λήμμα 2.7(β) έχουμε $r(l_{i+1}) > r(l_i)$.

Θεωρούμε το τόξο Kuperberg $L' = l_{i+1} \cup ... \cup l_n$. Η $L'$-στάθμη του $l_j$ είναι $lev(l_j) \geq 0$ για κάθε $j = i+1, ..., n$ και από το επαγωγικό βήμα για μήκος τόξου Kuperberg $n - i < n - 1$, έχουμε $r(l_n) \geq r(l_{i+1}) > r(l_i) = r(l_1)$, άρα $r(l_1) < r(l_n)$. □

**Λήμμα 2.9.** *Έστω* $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ *με* $a_1 + a_2 + ... + a_n > 0$. *Τότε υπάρχει κύκλος* $\sigma \in S_n$ *τέτοιος ώστε* $a_{\sigma(1)} + ... + a_{\sigma(k)} > 0$ *για κάθε* $1 \leq k \leq n$.

*Απόδειξη.* Αφού τα $a_1, a_2, ..., a_n$ είναι πεπερασμένα, τα μερικά αθροίσματα $a_1 + ... + a_i$, $1 \leq i \leq n$, είναι πεπερασμένα, επομένως υπάρχει το $\min\{a_1 + ... + a_i : 1 \leq i \leq n\}$. Έστω

$$n_0 = \max\{1 \leq m \leq n : a_1 + ... + a_m = \min\{a_1 + ... + a_i : 1 \leq i \leq n\}\}$$

Για κάθε $k$ με $n_0 < k \leq n$, έχουμε $a_1 + ... + a_k > a_1 + ... + a_{n_0}$, άρα $a_{n_0+1} + ... + a_k > 0$. Επίσης, για κάθε $j$ με $1 \leq j \leq n_0$ έχουμε $a_1 + ... + a_j \geq a_1 + ... + a_{n_0}$. Επομένως $a_{n_0+1} + ... + a_n + a_1 + ... + a_j \geq a_{n_0+1} + ... + a_n + a_1 + ... + a_{n_0} > 0$, λόγω της υπόθεσης. Αρκεί λοιπόν να πάρουμε $\sigma = \begin{pmatrix} n_0+1 & n_0+2 & ... & n & 1 & 2 & ... & n_0 \end{pmatrix}$. □

**Θεώρημα 2.10.** *Η plug (K,$\mathcal{K}$) δεν έχει περιοδικές τροχιές.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι υπάρχει μία περιοδική τροχιά $L$ του διανυσματικού πεδίου $\mathcal{K}$ στην $K$ και $L = l_1 \cup ... \cup l_n$ η ανάλυσή της σε τόξα Wilson, ώστε ο $n$ να είναι ο ελάχιστος ακέραιος με $l_1 = l_n$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) Έστω ότι $lev(l_n) \neq 0$, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $lev(l_n) > 0$, αντιστρέφοντας εν ανάγκη τη φορά των τροχιών του $\mathcal{K}$. Αφού $lev(l_j) = \sum_{i=1}^{j-1} sgn x_i$ και $lev(l_n) > 0$, από το Λήμμα 2.9 μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλα το $l_1$, ούτως ώστε $lev(l_i) > 0$ για κάθε $i = 1, ..., n$.

Αφού $lev(l_2) = +1 > 0 = lev(l_1)$, από το Λήμμα 2.7 έχουμε $r(l_2) \geq r(l_1)$. Επίσης, στο τόξο Kuperberg $L' = l_2 \cup ... \cup l_n$, τα τόξα Wilson έχουν μη-αρνητικές $L'$-στάθμες, άρα $r(l_n) \geq r(l_2)$, λόγω του Λήμματος 2.8(α). Δηλαδή $r(l_1) \leq r(l_2) \leq r(l_n) = r(l_1)$, άρα $r(l_1) = r(l_2) = r(l_n)$. Ισχύει, επίσης, $lev(l_1) < lev(l_2)$, οπότε από το Λήμμα 2.7(β) το $l_1 = l_n$ είναι ειδικό τόξο Wilson. Επειδή όμως δε γίνεται να έχουμε δύο διαδοχικά ειδικά τόξα, το $l_2$ δεν είναι ειδικό τόξο Wilson.

Αν ισχύει $lev(l_2) < lev(l_n)$, τότε $r(l_1) = r(l_2) < r(l_n) = r(l_1)$, αφού το $l_n$ είναι ειδικό τόξο Wilson, ενώ το $l_2$ όχι, που είναι αντίφαση.

Αν $lev(l_2) = lev(l_n)$, στο τόξο Kuperberg $L' = l_2 \cup ... \cup l_n$, οι $L'$-στάθμες των τόξων είναι $lev(l_n) = 0$ και $lev(l_i) \geq 0$ για κάθε $i = 2, ..., n$. Άρα από το Λήμμα 2.4 έχουμε $l_2 \prec l_n$, που είναι πάλι αντίφαση, διότι το $l_n$ είναι ειδικό τόξο Wilson, ενώ το $l_2$ όχι, άρα δε γίνεται τα $l_2, l_n$ να ανήκουν στην ίδια $\mathcal{K}$-τροχιά.

β) Αν $lev(l_n) = 0$, μπορούμε όπως στην πρώτη περίπτωση να επιλέξουμε το $l_1$, ούτως ώστε να ισχύει $lev(l_i) \geq 0$ για κάθε $i = 1, ..., n$. Από το Λήμμα 2.4 έχουμε $l_1 \prec l_n$. Όμως $l_1 = l_n$, άρα το $l_1 = l_n$ είναι κάποιο ειδικό τόξο Wilson. Έτσι $r(l_1) = r(l_n) = 0$. Έστω $i$ ο ελάχιστος ακέραιος με $1 < i \leq n$, για τον οποίο ισχύει $lev(l_i) = 0$. Στο τόξο Kuperberg $L' = l_2 \cup ... \cup l_i$, οι $L'$-στάθμες των τόξων είναι $lev(l_{i-1}) = 0$ και $lev(l_j) \geq 0$ για $j = 2, ..., i-1$. Από το Λήμμα 2.4 έχουμε $l_2 \prec l_{i-1}$. Όμως $l_2 = [x_1, x_2]$ και $l_{i-1} = [x_{i-2}, x_{i-1}]$ και συνεπώς, από το Λήμμα 2.3, ισχύει $x_1 \equiv x_{i-1}$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $r(x_1) = 0$, επομένως η τροχιά του $x_1$ δε μπορεί να έχει σημείο εξόδου. □

Συνοψίζοντας όλα τα προηγούμενα, το επόμενο Θεώρημα της K.Kuperberg, έρχεται να δώσει το $C^\infty$ αντιπαράδειγμα στην εικασία του Seifert.

**Θεώρημα 2.11.** *Υπάρχει $C^\infty$ δυναμικό σύστημα στην $S^3$ χωρίς σταθερά σημεία και χωρίς περιοδικές τροχιές.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε το μη-μηδενιζόμενο $C^\infty$ διανυσματικό πεδίο $X_1$ στην $S^3$ με μία μοναδική περιοδική τροχιά, που κατασκευάστηκε στην παράγραφο III.2. Αν $L$ είναι αυτή η τροχιά, έστω $x_0$ ένα σημείο της και $A$ ένα flow box γύρω από το $x_0$. Κάνουμε εισαγωγή της plug $(K, \mathcal{K})$ της Kuperberg στο $A$, με τέτοιον τρόπο ώστε ένα σημείο της μορφής $(0, \theta, -1)$ να απεικονίζεται στο $x_0$, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Έτσι προκύπτει ένα $C^\infty$ διανυσματικό πεδίο $Q$ στην $S^3$ χωρίς σταθερά σημεία και χωρίς περιοδικές τροχιές, καθώς η $L$ «παγιδεύεται» μέσα στο $K$ λόγω του Λήμματος 2.6, ενώ δε δημιουργούνται καινούριες περιοδικές τροχιές, αφού η $\mathcal{K}$ ικανοποιεί την ιδιότητα των απέναντι περάτων. □

# Αναφορές


[Ar-Be-Zh] S. Kh. Aranson, G. R. Belitsky and E. V. Zhuzhoma, *Introduction to the Qualitative Theory of Dynamical Systems on Surfaces*, Transl. Math. Monographs **153**, Amer. Math. Soc., 1996.

[Bh-Sz] N. P. Bhatia and G. P. Szegö, *Stability theory of dynamical systems*, Springer-Verlag, 1970.

[Boo] W. M. Boothby, *An introduction to Differential Manifolds and Riemannian Geometry*, Pure and Applied Mathematics, vol. 120, Academic Press, 1976.

[Ghy] E.Ghys, *Construction de champs de vecteurs sans orbite périodique*, Séminaire Bourbaki, exposé **785** (1993-94).

[Hir] Morris W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer-Verlag, 1976.

[KuG] G. Kuperberg, *A volume-preserving counterexample to the Seifert conjecture*, Comment. Math. Helvetici **71** (1996), 70-97.

[KuG-K] G. Kuperberg and K. Kuperberg, *Generalized counterexamples to the Seifert conjecture*, Ann. of Math. **144** (1996), 239-268.

[KuK] K. Kuperberg, *A smooth counterexample to the Seifert conjecture*, Ann. of Math. **140** (1994), 723-732.

[Mas] W. S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer-Verlag, 1977.

[Mats] S. Matsumoto, *K. M. Kuperberg's counterexample to the Seifert conjecture*, Sugaku **47** (1995), no. 1, 38-45.

[Mun] J. R. Munkres, *Topology, A First Course*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[Schw] A. J. Schwartz, *A generalization of a Poincaré-Bendixson theorem to closed two-dimensional manifolds*, Amer. J. Math. **85** (1963), 453-458.

[Sch] P. A. Schweitzer, *Counterexamples to the Seifert conjecture and opening closed leaves of foliations*, Ann. of Math. **100** (1974), 386-400.

[Sib] K. S. Sibirsky, *Introduction to topological dynamics*, Monographs and textbooks on pure and applied mathematics, 1975.

[Tam] I. Tamura, *Topology of Foliations: An Introduction*, Transl. Math. Monographs **97**, Amer. Math. Soc., 1992.

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

## Σχήματα

.

# PLUGS

Flow bordism

Συνθήκες
(I) Παγιδευμένης τροχιάς
(II) Απέναντι περάτων

# H HOPF FIBRATION

Απεικόνιση Hopf $\pi : S^3 \to S^2$,

$$\pi(z_1, z_2) = (2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2), 2\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2), |z_1|^2 - |z_2|^2)$$

Αντίστροφη εικόνα κάθε σημείου $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$ μέσω της π είναι

$$\pi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \{(z_1 e^{i\theta}, z_2 e^{i\theta}) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Ροή Hopf $\phi : \mathbb{R} \times S^3 \to S^3$,

$$\phi(t, (z_1, z_2)) = (z_1 e^{it}, z_2 e^{it}).$$

.

## ΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ $X_1'$ ΣΤΗΝ $S^3$

$$\eta : S^3 \setminus \pi^{-1}(0,0,1) \to \mathbb{R}^2 \times S^1,$$
$$\eta(z_1, z_2) = (\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2}{|z_2|}) = ((x,y), e^{i\theta}) \text{ με } 0 \leq \theta < 2\pi,$$

$$\begin{tikzcd}
S^3 \setminus \pi^{-1}(0,0,1) \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{R}^2 \times S^1 \arrow[dl, "\text{προβολή}"] \\
& S^2 \setminus (0,0,1) = \mathbb{R}^2 &
\end{tikzcd}$$

$$X_1' = \begin{cases} \eta_*^{-1}(\frac{\partial}{\partial x}) \text{ στην } S^3 \setminus \pi^{-1}(0,0,1) \\ 0 \text{ στο } \pi^{-1}(0,0,1) \end{cases}$$

## Η PLUG ΤΗΣ Κ. KUPERBERG