ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

ΤΣΕΚΟΥΡΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ ΤΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ

Τοπολογικός χαρακτηρισμός των σύμμορφων αυτομορφισμών της σφαίρας

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. Δράσεις τοπολογικών ομάδων

Με τον όρο τοπολογική ομάδα μετασχηματισμών εννοούμε μια τριάδα (G, X, Θ), όπου G είναι τοπολογική ομάδα, ο X είναι Hausdorff τοπολογικός χώρος και η $\Theta : G \times X \to X$ είναι μια συνεχής απεικόνιση τέτοια ώστε:
(1) $\Theta(g, \Theta(h, x)) = \Theta(gh, x)$ για κάθε $g, h \in G$ και $x \in X$.
(2) $\Theta(e, x) = x$, για κάθε $x \in X$, όπου e είναι το ταυτοτικό στοιχείο της G.

Η απεικόνιση Θ λέγεται δράση της G επί του X. Ο χώρος X, μαζί με μια δράση Θ της G, καλείται G - χώρος. Για απλότητα συνήθως γράφουμε $\Theta(g, x) = gx$.

Ενα σύνολο $A \subset X$ καλείται G - αναλλοίωτο, αν $gA = A$, για κάθε $g \in G$.

Θεώρημα 1.1.1. *Αν $\Theta : G \times X \to X$ είναι μια δράση συμπαγούς ομάδας G επί του X, τότε η Θ είναι κλειστή απεικόνιση. (βλ. [2],Ch.I, Th.1.2)*

Πόρισμα 1.1.2. *Αν G είναι μια συμπαγής ομάδα και X ένας G - χώρος, το σύνολο $G(A) = \{gx : g \in G, x \in A\}$, είναι κλειστό στο X για κάθε κλειστό $A \subset X$ και το $G(A)$ είναι συμπαγές, αν το A είναι συμπαγές. (βλ. [2],Ch.I,Co.1.3)*

Εστω X ένας G - χώρος και $x \in X$. Το σύνολο

$$G_x = \{g \in G : gx = x\}$$

είναι κλειστή υποομάδα της G και λέγεται ομάδα ισοτροπίας του x. Ο υπόχωρος

$$G(x) = \{gx \in X : g \in G\}$$

λέγεται G - τροχιά του x.

Θεωρούμε την σχέση ισοδυναμίας $\sim_G$, κατά την οποία $x \sim_G y$ αν και μόνο αν υπάρχει $g \in G$, τέτοιο ώστε $x = gy$. Ο χώρος πηλίκο $X/\sim_G = X/G$ λέγεται χώρος των G - τροχιών του X.

Αν x είναι ένα σημείο ενός G - χώρου X, τότε ορίζεται η φυσική απεικόνιση

$$\Theta_x : G/G_x \to G(x)$$

με $\Theta_x(gG_x) = gx$. Εξ' ορισμού της τοπολογίας πηλίκο στο G/G_x και από την συνέχεια της $g \mapsto gx$, η Θ_x είναι συνεχής, ενώ είναι προφανώς 1-1 και επί.

Πόρισμα 1.1.3. *Αν G είναι μια συμπαγής ομάδα, τότε η $\Theta_x : G/G_x \to G(x)$ είναι ομοιομορφισμός.(βλ. [2],Ch.I,Pr.4.1)*

Στην εργασία αυτή θα χρειαστούμε ιδιότητες των δράσεων της συμπαγούς ομάδας $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Λήμμα 1.1.4. *Εστω H μια κλειστή υποομάδα του $\mathbb{R}$. Τότε ισχύει ακριβώς ένα από τα επόμενα:*
(1) $H = \mathbb{R}$.
(2) Υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε $H = \lambda\mathbb{Z}$.
(3) $H = \{0\}$.

Απόδειξη. Εστω ότι $H \neq \{0\}$ και $\lambda = \inf\{t \in H : t > 0\}$. Τότε $\lambda \geq 0$ και $\lambda \in H$, αφού η H είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Εστω ότι $\lambda > 0$. Τότε $(-\lambda, \lambda) \cap H = \{0\}$. Για κάθε $t \in H$ υπάρχουν $k \in \mathbb{Z}$ και $0 \leq |s| < \lambda$ ώστε $t = \lambda k + s$. Συνεπώς $s = t - \lambda k \in H \cap (-\lambda, \lambda) = \{0\}$ αφού $\lambda, t \in H$. Αρα $s = 0$ και $\lambda k = t$, προκύπτει δηλαδή $H = \lambda\mathbb{Z}$.

Εστω τώρα ότι $\lambda = 0$. Τότε υπάρχει μια μη - σταθερή ακολουθία $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο H με $t_n \to 0$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{Z}$ ώστε $|t - k_n t_n| < t_n$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και συνεπώς $k_n t_n \to t$. Ομως $k_n t_n \in H$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Αρα $t \in \overline{H} = H$. Αυτό δείχνει ότι $\mathbb{R} = H$. □

Πόρισμα 1.1.5. *Αν G είναι μια κλειστή υποομάδα της S^1 τότε είτε η G είναι πεπερασμένη κυκλική είτε $G = S^1$ είτε $G = \{1\}$.*

Απόδειξη. Αν $\rho : \mathbb{R} \to S^1$ είναι η απεικόνιση επικάλυψης του S^1, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα θα έχουμε ότι η $H = \rho^{-1}(G)$ θα ισούται είτε με $\{1\}$ είτε με $\lambda\mathbb{Z}$ για κάποιο $\lambda > 0$ είτε με $\mathbb{R}$. Αν $H = \{1\}$, τότε $G = \{1\}$. Αν $H = \mathbb{R}$, τότε $G = S^1$. Αν $H = \lambda\mathbb{Z}$, τότε η H είναι διακριτή και κυκλική. Αρα η G είναι κυκλική συμπαγής και διακριτή, άρα πεπερασμένη. □

Λήμμα 1.1.6. *Εστω X ένας G - χώρος Hausdorff όπου $G = S^1$. Αν το $x \in X$ δεν είναι σταθερό σημείο της δράσης, η G - τροχιά του x είναι απλή κλειστή καμπύλη, δηλαδή ομοιομορφική με S^1.*

Απόδειξη. Η ομάδα ισοτροπίας G_x του x είναι κλειστή υποομάδα του κύκλου, άρα $G_x = S^1$ ή $G_x \cong \mathbb{Z}_n$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ή $G_x = \{1\}$, σύμφωνα με το πόρισμα 1.1.5.
Εστω $\Theta : G \times X \to X$ η δράση. Η απεικόνιση $\Theta_x : G/G_x \to G(x)$ με
$\Theta_x(gG_x) = \Theta(g, x) = gx$ είναι ομοιομορφισμός, διότι η G είναι συμπαγής.

Αρα αν $G_x = S^1$, τότε $G(x) = \{x\}$, δηλαδή $gx = x$ για κάθε $g \in G$, γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με το ότι το x δεν είναι G - σταθερό σημείο. Επομένως $G_x \cong \mathbb{Z}_n$ ή $G_x = \{1\}$, οπότε $G/G_x \cong S^1/\mathbb{Z}_n$ ή $G/G_x \cong S^1$. Ομως $S^1/\mathbb{Z}_n \approx S^1$. Πράγματι, η απεικόνιση $\rho : S^1 \to S^1$ με $\rho(z) = z^n$ είναι συνεχής και επί. Θεωρούμε την σχέση ισοδυναμίας $R_\rho = \{(z, z') : z^n = (z')^n\}$. Ο S^1 είναι συμπαγής, άρα η ρ είναι κλειστή απεικόνιση. Επομένως η συνηθισμένη τοπολογία του S^1, ταυτίζεται με την τοπολογία πηλίκο της ρ. Αρα $S^1/R_\rho \approx S^1$. Ετσι έχουμε $S^1/\mathbb{Z}_n = S^1/R_\rho \approx S^1$ και το συμπέρασμα αποδείχθηκε. □

1.2. Συμπαγής - ανοιχτή τοπολογία και βασικές ιδιότητες

Εστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι και $C(X, Y)$ το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to Y$. Για κάθε $A \subset X, B \subset Y$ θέτουμε

$$< A, B >= \{f \in C(X, Y) : f(A) \subset B\}.$$

Η συμπαγής - ανοιχτή τοπολογία στο $C(X,Y)$ είναι η τοπολογία που έχει ως υποβάση όλα τα σύνολα $< A, B >$, όπου $A \subset X$ συμπαγές και $Y \subset B$ ανοιχτό.

Ειναι προφανές ότι αν $X \approx X'$ και $Y \approx Y'$ τότε $C(X,Y) \approx C(X',Y')$, με την ανοιχτή - συμπαγή τοπολογία.

Εστω $E : C(X,Y) \times X \to Y$ η απεικόνιση εκτίμησης, δηλαδή $E(f,x) = f(x)$.

Λήμμα 1.2.1. *Αν ο X είναι ένας τοπικά συμπαγής χώρος, τότε η απεικόνιση εκτίμησης $E : C(X,Y) \times X \to Y$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Εστω $f \in C(X,Y), x \in X$ και W μια ανοιχτή περιοχή του $f(x) \in Y$. Χρησιμοποιώντας την συνέχεια της f και το γεγονός ότι ο X είναι τοπικά συμπαγής, μπορούμε να βρούμε περιοχή του x η οποία να έχει συμπαγή κλειστότητα A, έτσι ώστε $f(A) \subset W$. Υπάρχει λοιπόν μια ανοιχτή περιοχή $< A, W >$ της f ώστε

$$E(< A, W > \times \{x\}) \subset W.$$

Επιπλέον το $intA$ είναι ανοιχτή περιοχή του x και $E(< A, W > \times intA) \subset W$. Αρα η E είναι συνεχής στο σημείο $(f, x) \in C(X,Y) \times X$. □

Θεώρημα 1.2.2. *Αν ο X είναι συμπαγής χώρος και ο Y είναι μετρικοποιήσιμος χώρος με μια μετρική d, τότε η συμπαγής - ανοιχτή τοπολογία στο $C(X,Y)$ είναι μετρικοποιήσιμη με την μετρική*

$$\rho(f,g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}.$$

Δηλαδή η συμπαγής - ανοιχτή τοπολογία σε αυτή την περίπτωση ταυτίζεται με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης.

Απόδειξη. Εστω $\varepsilon > 0$ και $f \in C(X,Y)$. Επειδή ο X είναι συμπαγής, υπάρχει πεπερασμένο ανοιχτό κάλυμμα $\{U_i : i = 1, ..., n\}$ του X ώστε $diam f(\overline{U}_i) < \varepsilon/4$. Εστω

$$W_i = B_d(f(\overline{U}_i), \varepsilon/4), \quad 1 \le i \le n.$$

Τότε $diam(W_i) < 3\varepsilon/4$ και συνεπώς

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n} < \overline{U}_i, W_i > \subset B_\rho(f, \varepsilon).$$

Με άλλα λόγια κάθε ρ - μπάλλα περιέχει ένα βασικό σύνολο της συμπαγούς - ανοιχτής τοπολογίας. Αρα τα ρ - ανοιχτά σύνολα, είναι ανοιχτά με την συμπαγή - ανοιχτή τοπολογία.

Αντίστροφα, αν $< A, V >$ είναι ένα υποβασικό σύνολο της συμπαγούς - ανοιχτής τοπολογίας και $f \in < A, V >$, τότε, επειδή το $f(A)$ είναι συμπαγές έχουμε

$$\varepsilon = d(f(A), Y \setminus V) > 0,$$

αφού $f(A) \subset V$. Κατά συνέπεια

$$f \in B_\rho(f, \varepsilon/2) \subset < A, V > .$$

Αρα τα ανοιχτά σύνολα στην συμπαγή - ανοιχτή τοπολογία, είναι ρ - ανοιχτά. □

Εστω τώρα X ένας συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος. Το σύνολο $H(X)$ όλων των ομοιομορφισμών του X επί του εαυτού του είναι προφανώς ομάδα με πράξη την σύνθεση. Από το θεώρημα 1.2.2 προκύπτει εύκολα ότι το $H(X)$ γίνεται τοπολογική ομάδα, αν εφοδιαστεί με την συμπαγή - ανοιχτή τοπολογία. Επιπλέον η απεικόνιση εκτίμησης $E : H(X) \times X \to X$ είναι μια δράση της $H(X)$ επί του X.

Εστω $F \subset C(X,Y)$ μια οικογένεια συνεχών συναρτήσεων από τον μετρικό χώρο (X,d) στον μετρκό χώρο (Y,ρ). Η F λέγεται ισοσυνεχής αν για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $f \in F$ να ισχύει $f(B_d(x,\delta)) \subset B_\rho(f(x),\varepsilon)$.

Η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος βρίσκεται στο [5], Ch.XII, Th. 6.4.

Θεώρημα 1.2.3. (Ascoli). *Εστω (Z,ρ) ένας μετρικός χώρος και (Y,d) ένας μετρικός χώρος. Εστω ότι η οικογένεια $F \subset C(Y,Z)$ ικανοποιεί τα παρακάτω:*
(1) Η F είναι ισοσυνεχής.
(2) Η κλειστότητα του συνόλου $\{f(y) : f \in F\}$ είναι συμπαγής για κάθε $y \in Y$.
Τότε η κλειστότητα στο $C(Y,Z)$ της οικογένειας F είναι συμπαγής.

1.3. Ομοιομορφισμοί του κύκλου

Εστω $f : S^1 \to S^1$ ένας ομοιομορφισμός. Υπάρχει τότε ένας ομοιομορφισμός $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε
$$f(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i F(t)},$$
για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Ενας τέτοιος ομοιομορφισμός F λέγεται ανύψωση του f. Προφανώς δύο ανυψώσεις του f διαφέρουν κατά ακέραιο.

Ο αρχικός ομοιομορφισμός f διατηρεί τον προσανατολισμό, αν και μόνο αν, ο F είναι αύξων. Αν ο f διατηρεί τον προσανατολισμό, ο F ικανοποιεί την συνθήκη $F(t+1) = F(t) + 1$ ή ισοδύναμα η συνάρτηση $F - id$ είναι περιοδική, περιόδου 1.

Θεώρημα 1.3.1.(Poincaré) *Υπάρχει μια σταθερά $\rho(F) \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(F^n - id) = \rho(F)$$
ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.(βλ.[1], Prop. 3.3.2.)

Ο αριθμός $\rho(f) = e^{2\pi i \rho(F)} \in S^1$ δεν εξαρτάται από την ανύψωση F του f και λέγεται, αριθμός στροφής του Poincaré του f.

Πρόταση 1.3.2. *Ενας ομοιομορφισμός $f : S^1 \to S^1$ που διατηρεί τον προσανατολισμό, έχει περιοδικό σημείο αν και μόνο αν $\rho(f) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. (βλ.[1], 3.3.4.)*

Παρατήρηση 1.3.3. Οπως δείχνει η απόδειξη της πρότασης 1.3.2 στο [1], αν $\rho(F) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, όπου οι $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε ο f^q έχει σταθερό σημείο.

Το $\rho(f) \in S^1$ μπορούμε να το θεωρήσουμε ως μια συνάρτηση (με τιμές στον S^1), επί του χώρου όλων των ομοιομορφισμών του κύκλου που διατηρούν τον προσανατολισμό, με την συμπαγή - ανοιχτή τοπολογία.

Θεώρημα 1.3.4. *Η συνάρτηση $\rho(f)$ είναι συνεχής.(βλ.[4], Ch.3,Th.2.)*

Η δυναμική των ομοιομορφισμών του κύκλου που διατηρούν τον προσανατολισμό και έχουν άρρητο αριθμό στροφής, μπορεί να περιγραφεί αρκετά ικανοποιητικά. Αν $f : X \to X$ είναι ένας ομοιομορφισμός του μετρικού χώρου X και $x \in X$, το σύνολο

$$L^+(x,f) = \{y \in X : f^{n_k}(x) \to y, \text{ για κάποια } n_k \to +\infty\}$$

λέγεται θετικό οριακό σύνολο του x και είναι προφανώς κλειστό και f - αναλλοίωτο. Ομοια ορίζεται το αρνητικό οριακό σύνολο $L^-(x,f)$. Το σύνολο $L(x,f) = L^+(x,f) \cup L^-(x,f)$ λέγεται οριακό σύνολο του x. Για την απόδειξη των επόμενων προτάσεων παραπέμπουμε στο [1], Prop. 3.3.5, Th. 3.3.7.

Πρόταση 1.3.5. *Αν ο ομοιομορφισμός f του S^1, διατηρεί τον προσανατολισμό και έχει άρρητο αριθμό στροφής Poincaré, τότε υπάρχει ένα συμπαγές f - αναλλοίωτο σύνολο $K \subset S^1$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:*
(i) $L^+(x,f) = L^-(x,f) = K$ γαι κάθε $x \in S^1$.
(ii) Ισχύει είτε $K = S^1$ είτε το K είναι Cantor σύνολο.

Θεώρημα 1.3.6. (Poincaré). *Αν ο ομοιομορφισμός f του S^1, διατηρεί τον προσανατολισμό και έχει άρρητο αριθμό στροφής Poincaré, $\rho(f) = e^{2\pi i a}$, τότε υπάρχει μια συνεχής, επί απεικόνιση $h : S^1 \to S^1$, που διατηρεί τον προσανατολισμό και έχει την ιδιότητα $h \circ f = r_a \circ h$, όπου r_a είναι η στροφή κατά γωνία $2\pi a$. Αν ο f έχει τουλάχιστο μια πυκνή τροχιά στον S^1, τότε η h είναι ομοιομορφισμός, δηλαδή ο f είναι τοπολογικά συζυγής με άρρητη στροφή.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΙ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ

2.1. Περιοδικοί ομοιομορφισμοί του S^1 και του $\mathbb{R}$

Στην παράγραφο αυτή θα χαρακτηρίσουμε, ως προς τοπολογική συζυγία τους περιοδικούς ομοιομορφισμούς του κύκλου, που διατηρούν τον προσανατολισμό. Στο $\mathbb{R}$ ο μοναδικός τέτοιος ομοιομορφισμός είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

Λήμμα 2.1.1. *Εστω $f : [0,1] \to [0,1]$ ένας αύξων ομοιομορφισμός. Αν ο f είναι περιοδικός, τότε $f = id$.*

Απόδειξη. Αν ο f δεν είναι ο ταυτοτικός θα υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ με $f(x_0) \neq x_0$. Εστω ότι $x_0 < f(x_0)$, τότε $x_0 < f(x_0) < f^2(x_0) < ... < f^n(x_0) < ...$. Αν ο f είναι περιοδικός υπάρχει $n > 0$ ώστε $f^n(x_0) = x_0$, άτοπο. Αρα ο f είναι ο ταυτοτικός ομοιομορφισμός. □

Πρόταση 2.1.2. *Αν ο ομοιομορφισμός $f : S^1 \to S^1$, διατηρεί τον προσανατολισμό και είναι περιοδικός, τότε είναι τοπολογικά συζυγής με ρητή στροφή.*

Απόδειξη. Αν ο f είναι περιοδικός με περίοδο $q > 1$, τότε $\rho(f) = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$ με $(p,q) = 1$. Θα δείξουμε ότι ο f είναι τοπολογικά συζυγής με την στροφή $R_{2\pi\frac{p}{q}}$ κατά γωνία $2\pi p/q$.

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση όπου $p = 1$. Υπάρχει μια ανύψωση $\widetilde{f}$ του f, ώστε $\widetilde{f}^q(t) = t+1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε επαγωγικά τον ομοιομορφισμό $\widetilde{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ως εξής: Θέτουμε

$$\widetilde{h}(t + \frac{k}{q}) = \widetilde{f}^k(qt\widetilde{f}(0))$$

για $0 \leq t \leq 1/q, 0 \leq k < q$, και

$$\widetilde{h}(s + l) = \widetilde{h}(s) + l$$

για κάθε $0 \leq s \leq 1$ και $l \in \mathbb{Z}$. Προφανώς $0 \leq t + \frac{k}{q} \leq 1$, αφού $k \in \{0,1,...q-1\}$.

Ο $\widetilde{h}$ επάγει έναν ομοιομορφισμό $h : S^1 \to S^1$ για τον οποίο ισχύει $\pi \circ \widetilde{h} = h \circ \pi$, όπου $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ είναι η απεικόνιση επικάλυψης. Επομένως ισχύει

$$\widetilde{h^{-1}} \circ \widetilde{f} \circ \widetilde{h} = \widetilde{h^{-1} \circ f \circ h}.$$

Τώρα για κάθε $s \in [0,1]$ και για κάθε $k \in \{0,1,...,q-1\}$, υπάρχει $t \in [0,1/q]$ τέτοιο ώστε $s = t + \frac{k}{q}$. Τότε:

$$\widetilde{h}(s) = \widetilde{h}(t + \frac{k}{q}) = \widetilde{f}^k(qt\widetilde{f}(0))$$

άρα

$$(\widetilde{f} \circ \widetilde{h})(s) = \widetilde{f}^{k+1}(qt\widetilde{f}(0))$$

και κατά συνέπεια

$$(\widetilde{h^{-1} \circ f} \circ h)(s) = t + \frac{k+1}{q}.$$

Επομένως

$$(h^{-1} \circ f \circ h)(\pi(s)) = \pi((\widetilde{h^{-1} \circ f} \circ h)(s)) =$$

$$\pi(t + \frac{k+1}{q}) = \pi(t)\pi(\frac{k+1}{q}) = \pi(t)(\pi(\frac{1}{q}))^{k+1},$$

άρα

$$(h^{-1} \circ f \circ h)(\pi(s)) = R_{1/p}(\pi(s)).$$

Συνεπώς,

$$(h^{-1} \circ f \circ h)(z) = R_{1/q}(z), \quad z \in S^1.$$

Δείξαμε λοιπόν το λήμμα στην περίπτωση $p = 1$. Αν $p \neq 1$, τότε αφού $(p, q) = 1$, υπάρχουν $j, m \in \mathbb{Z}$ ώστε $jp + mq = 1$ δηλαδή, $jp = 1(\mathrm{mod} q)$. Ομως,

$$\rho(\widetilde{f^j}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\widetilde{f^{jn}} - id}{n} = j \lim_{n\to\infty} \frac{1}{jn}(\widetilde{f^{jn}} - id) = j\rho(\widetilde{f}).$$

Αρα ο f^j είναι περιοδικός και

$$\rho(f^j) = e^{2\pi i/q}.$$

Επειδή $(f^j)^p = f$, θα έχουμε ότι ο f είναι τοπολογικά συζυγής με την στροφή κατά γωνία $2\pi p/q$. □

2.2. Περιοδικοί ομοιομορφισμοί του D^2 και της S^2

Στην παράγραφο αυτή θα κατατάξουμε ως προς τοπολογική συζυγία τους περιοδικούς ομοιομορφισμούς της σφαίρας S^2 γενικεύοντας την πρόταση 2.1.2. Θα χρειαστούμε την ακόλουθη:

Πρόταση 2.2.1. *Έστω $D_1, ..., D_n$ ένα πεπερασμένο σύνολο τοπολογικών κλειστών δίσκων του $\mathbb{R}^2$ και J° μια οποιαδήποτε συνεκτική συνιστώσα του $D_1^\circ \cap ... \cap D_n^\circ$, όπου $D_i^\circ = intD_i$, $1 \leq i \leq n$. Τότε το ∂J είναι απλή κλειστή καμπύλη και η κλειστότητα J στο $\mathbb{R}^2$ του J°, είναι τοπολογικός κλειστός δίσκος.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n, τον αριθμό των δίσκων. Αν $n = 1$ τότε έχουμε το Θεώρημα Jordan-Schoenflies. Θεωρούμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για κάποιο $n > 1$ και έστω J° μια συνεκτική συνιστώσα του $\cap_{i=1}^{n+1} D_i^\circ$. Εστω K° η συνεκτική συνιστώσα του $\cap_{i=1}^{n} D_i^\circ$ η οποία περιέχει το J°. Από την επαγωγική υπόθεση το $K = \overline{K}^\circ$ είναι τοπολογικός κλειστός δίσκος. Αφού το J° είναι συνιστώσα του $K^\circ \cap D_{n+1}^\circ$, αρκεί να δείξουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για τους δύο δίσκους D_1, D_2. Θέτουμε $C_i = \partial D_i$ για $i = 1, 2$ και έστω J η κλειστότητα μιας συνεκτικής συνιστώσας του $D_1^\circ \cap D_2^\circ$. Εχουμε ότι $\partial J \neq \emptyset$ και $\partial J \subset \partial(D_1^\circ \cap D_2^\circ) \subset C_1 \cup C_2$. Αν το ∂J περιέχεται ολόκληρο σε μια από τις δύο καμπύλες, έστω την C_1, τότε $J = D_1$ και το πόρισμα αποδείχθηκε. Υποθέτουμε ότι $\partial J \not\subset C_1$ και $\partial J \not\subset C_2$.

Εστω $x \in \partial J$ και $x \notin C_2$. Τότε $x \in C_1 \cap D_2^\circ$ και μπορούμε να βρούμε τόξο γ στο C_1 τέτοιο ώστε

$$x \in \gamma, \quad \gamma \subset \partial J, \quad \gamma \setminus \partial\gamma \subset D_2^\circ, \quad \partial\gamma \subset C_2.$$

Τα άκρα του γ ορίζουν πάνω στην C_2 ένα τόξο δ ξένο με το J° και τέτοιο ώστε $\delta \cap J = \partial\delta$. Επειδή το $C_1 \setminus C_2$ είναι ανοιχτό στο C_1, υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ από τόξα με $\gamma_i^\circ \cap \gamma_j^\circ = \emptyset$, $i \neq j$ και τις ιδιότητες του γ και $diam(\gamma_i) \to 0$ όταν $i \to \infty$. Πράτουμε ακριβώς τα ίδια για κάποιο $y \in \partial\gamma$ με $y \notin C_1$. Ετσι προκύπτει μια ακολουθία τόξων $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ με τις ιδιότητες του γ, όπως επίσης και μια ακολουθία τόξων $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ με τις ιδιότητες του δ. Το σύνορο του J προκύπτει από το C_2 και από την ένωση των γ_i το οποίο είναι απλή κλειστή καμπύλη και κατά συνέπεια από το Θεώρημα Jordan - Schoenflies το J είναι τοπολογικός δίσκος. □

Λήμμα 2.2.2. *Εστω $f : S \to S$ ένας περιοδικός ομοιομορφισμός περιόδου n μιας τοπολογικής 2 - πολλαπλότητας S και $x \in Fix(f)$. Τότε για κάθε περιοχή N του x, υπάρχει τοπολογικός κλειστός δίσκος Δ_x, τέτοιος ώστε $\Delta_x \subset N$ και το Δ_x είναι περιοχή του x με $f(\Delta_x) = \Delta_x$.*

Απόδειξη. Επειδή το x είναι σταθερό σημείο του f, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα N και $f(N)$ περιέχονται στο πεδίο ορισμού ενός χάρτη (U, φ) της πολλαπλότητας. Θα συνεχίσουμε να συμβολίζουμε με x, N τα $\varphi(x), \varphi(N)$ αντίστοιχα. Εστω D_x ο κλειστός δίσκος του $\mathbb{R}^2$ με κέντρο x και ακτίνα $\eta > 0$, τέτοια ώστε $f^k(D_x) \subset N$ για κάθε $k = 0, 1, ..., n-1$. Εστω $C_x = \partial D_x$ και Δ_x η κλειστότητα της συνεκτικής συνιστώσας E_x του f - αναλλοίωτου συνόλου $D_x^\circ \cap f(D_x^\circ) \cap ... \cap f^{n-1}(D_x^\circ)$ η οποία περιέχει το x. Από την προηγούμενη πρόταση 2.2.1, το Δ_x είναι τοπολογικός δίσκος.

Επειδή συνεκτικές συνιστώσες απεικονίζονται σε συνεκτικές συνιστώσες μέσω ομοιομορφισμού, θα έχουμε ότι $f(E_x) = E_x$ διότι $x \in f(E_x) \cap E_x$. Αρα $\overline{f(E_x)} = \overline{E_x} = f(\overline{E_x})$ συνεπώς $\Delta_x = f(\Delta_x)$. Προφανώς $x \in \Delta_x^\circ$ και $\Delta_x \subset N$. □

Λήμμα 2.2.3. *Έστω $f : D^2 \to D^2$ ένας περιοδικός ομοιομορφισμός. Αν $f|_{\partial D^2} = id$, τότε $f = id$.*

Απόδειξη. Εστω d μια οποιαδήποτε διάμετρος του D^2, με άκρα A, B και έστω Δ μία από τις δύο συνεκτικές συνιστώσες του $D^2 \setminus d$. Το σύνολο

$$E = \bigcap_{i=1}^{n} f^i(\Delta^\circ)$$

είναι f - αναλλοίωτο, όπου n είναι η περίοδος του f. Από την πρόταση 2.2.1, η κλειστότητα κάθε συνεκτικής συνιστώσας του E είναι τοπολογικός κλειστός δίσκος. Εστω $\widehat{AB}$ το τόξο του κύκλου με άκρα τα A, B στο σύνορο του Δ. Επειδή $f|_{\partial D^2} = id$, τότε $f^i(\widehat{AB}) = \widehat{AB}$ για κάθε $i \in \{1, ..., n-1\}$.

Εστω $x \in \widehat{AB}$, με $x \neq A, B$. Θέτουμε

$$\rho_x = \min\{d(f^i(d), x) : i \in \{1, ..., n\}\}.$$

Το σύνολο $B(x, \rho_x) \cap D^2$ είναι συνεκτικό. Το ευθύγραμμο τμήμα J_x με άκρα το x και το $(1 - \rho_x)x$ είναι τέτοιο ώστε

$$\bigcup_{i=1}^{n} f^i(d) \cap J_x = \emptyset.$$

Η συνάρτηση $\gamma : \widehat{AB} \to D^2$ με $\gamma(x) = (1-\rho_x)x$ και $\gamma(A) = A,\ \gamma(B) = B$, είναι συνεχής, 1 - 1 και

$$\gamma(\widehat{AB}) \cap \widehat{AB} = \{A, B\}.$$

Αρα το $\gamma(\widehat{AB}) \cup \widehat{AB}$ είναι απλή κλειστή καμπύλη που φράσσει δίσκο που περιέχεται στην συνεκτική συνιστώσα J° του E, με $\partial J \supset \widehat{AB}$, όπου J είναι η κλειστότητα στο D^2 του J°. Το ∂J είναι απλή κλειστή καμπύλη και το J τοπολογικός κλειστός δίσκος. Το $f(J^\circ)$ είναι συνεκτική συνιστώσα του E, άρα $f(J) = J$ αφού $\widehat{AB} \subset J$ και $f(\widehat{AB}) = \widehat{AB}$. Εχουμε τώρα

$$\partial J \subset \partial E = \partial(\bigcap_{i=1}^{n} f^i(\Delta)) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \partial f^i(\Delta) = \bigcup_{i=1}^{n} f^i(\partial\Delta).$$

Ομως $\partial\Delta = d \cup \widehat{AB}$, επομένως για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$ έχουμε

$$f^i(\partial\Delta) = f^i(d) \cup f^i(\widehat{AB}) = f^i(d) \cup \widehat{AB}.$$

Συνεπώς

$$\partial J \subset \bigcup_{i=1}^{n} (f^i(d) \cup \widehat{AB}) = \widehat{AB} \cup \bigcup_{i=1}^{n} f^i(d).$$

Υπάρχει ένα απλό τόξο δ με άκρα A, B ώστε $\partial J = \widehat{AB} \cup \delta$. Το δ δεν έχει άλλα κοινά σημεία με το $\widehat{AB}$, γιατί

$$\delta \subset \{A\} \cup \{B\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} f^i(d) = \bigcup_{i=1}^{n} f^i(d),$$

Αφού $\widehat{AB} \cup f(\delta) = f(\partial J) = \partial J = \widehat{AB} \cup \delta$, έχουμε $f(\delta) = \delta$ επειδή $f(A) = A$ και $f(B) = B$. Από το λήμμα 2.1.1 έχουμε τώρα $f\,|_\delta = id$. Αν $x \in \delta$, υπάρχει $i \in \{1, ..., n\}$ με $x \in f^i(d)$, δηλαδή $x = f^i(y)$ για κάποιο $y \in d$. Αρα $x = f^{-i}(x) = y \in d$, οπότε $\delta \subset d$.

Προφανώς $d = \delta$ αφού αυτά είναι απλά τόξα με κοινά άκρα και $\delta \subset d$, επομένως $f\,|_d = id$. Η διάμετρος d έχει επιλεγεί αυθαίρετα, οπότε προκύπτει αμέσως ότι $f = id$ στο D^2. □

Λήμμα 2.2.4. *Εστω $f : D^2 \to D^2$ ένας περιοδικός ομοιομορφισμός περιόδου $n > 1$ με $f \neq id$. Αν ο f διατηρεί τον προσανατολισμό, τότε υπάρχει $x_0 \in intD^2$ ώστε $Fix(f^i) = Fix(f) = \{x_0\}$ για κάθε $1 \leq i \leq n-1$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer, ο f έχει τουλάχιστο ένα σταθερό σημείο. Αν ο f είχε σταθερό σημείο στο $\partial D^2 = S^1$ θα έπρεπε να ισχύει $f\,|_{\partial D^2} = id$, διότι $f(S^1) = S^1$ και ο $f\,|_{S^1}$ είναι τοπολογικά συζυγής με στροφή. Από το λήμμα 2.2.3 θα έχουμε $f = id$ στο D^2, άτοπο. Αρα $Fix(f\,|_{\partial D^2}) = \emptyset$ και όμοια $Fix(f^i\,|_{\partial D^2}) = \emptyset$.

Επομένως ο f έχει τουλάχιστο ένα σταθερό σημείο στο $D^2 \setminus \partial D^2$, το οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι το κέντρο του δίσκου O. Αν $A = D^2 \setminus \{O\}$, τότε το A είναι f - αναλλοίωτο.

Υποθέτουμε ότι ο f^i έχει σταθερό σημείο στο $x_0 \in A$, για κάποιο $i \in \mathbb{N}$. Εστω $\pi : \widetilde{A} \to A$ η απεικόνιση καθολικής επικάλυψης, $\widetilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ και F μία ανύψωση του f^i με $F(\widetilde{x}_0) = \widetilde{x}_0$. Αφού $(f^i)^n = (f^n)^i = id$, προκύπτει $\pi \circ F^n = \pi$, άρα ο F^n

ανήκει στην ομάδα των αυτομορφισμών της π και επειδή ο F έχει σταθερό σημείο θα πρέπει να ισχύει $F^n = id$. Ιδιαίτερα ο $F\mid_{\partial\widetilde{A}}$ είναι περιοδικός ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό. Συνεπώς από το λήμμα 2.1.1 προκύπτει

$$F\mid_{\partial\widetilde{A}} = id.$$

Αφού $\pi\circ F = f^i\circ\pi$ έχουμε $f^i\mid_{\partial D^2} = id$. Από το λήμμα 2.2.3 προκύπτει ότι $f^i = id$, γεγονός που αποτελεί αντίφαση. □

Θεώρημα 2.2.5. *Εστω $f : D^2 \to D^2$ ένας περιοδικός ομοιομορφισμός, περιόδου $n > 1$. Αν ο f διατηρεί τον προσανατολισμό, τότε είναι τοπολογικά συζυγής με στροφή κατά γωνία $2k\pi/n$ για κάποιο $1 \leq k \leq n-1$.*

Απόδειξη. Από το λήμμα 2.2.4 μπορούμε να υποθέσουμε ότι $Fix(f) = \{O\}$, το κέντρο του δίσκου. Αφού ο $f\mid_{\partial D^2}$είναι περιοδικός ομοιομορφισμός περιόδου n, ο αριθμός στροφής του Poincaré του $f\mid_{\partial D^2}$, θα είναι $\rho(f\mid_{\partial D^2}) = \frac{k}{n}$ με $(k,n) = 1$. Θα αποδείξουμε πρώτα το Θεώρημα για την περίπτωση $k = 1$.

Στον D^2 θεωρούμε την σχέση ισοδυναμίας που ορίζει η δράση του f. Η ομάδα G των ομοιομορφισμών του D^2 που παράγεται από τον f είναι

$$G = \{f^i : i \in \{0, 1, ..., n-1\}\} \cong \mathbb{Z}_n$$

και από το λήμμα 2.2.4, δρα ελεύθερα επί του $D^2 \setminus \{O\}$. Θεωρούμε επίσης τον χώρο D^2/G με την τοπολογία πηλίκο που επάγει η φυσική απεικόνιση $\pi : D^2 \to D^2/G$, οπότε η π είναι συνεχής και ανοιχτή. Επομένως ο D^2/G είναι συμπαγής και κατά τόξα συνεκτικός μετρικός χώρος με μετρική την

$$d(\pi(x), \pi(y)) = \inf_{0\leq l,k\leq n-1} d(f^k(x), f^l(y)).$$

Αρα υπάρχει ένα απλό τόξο γ από το $\pi(O)$ σε οποιοδήποτε σημείο του $\pi(\partial D^2)$. Η G δρά γνήσια ασυνεχώς στο $D^2 \setminus \{O\}$, αφού είναι πεπερασμένη και δρα ελεύθερα. Επομένως η

$$\pi : D^2 \setminus \{O\} \to D^2 \setminus \{O\}/G$$

είναι απεικόνιση κανονικής επικάλυψης.

Συνεπώς, το $\pi^{-1}(\gamma)$ είναι ένωση από ξένα μεταξύ τους απλά τόξα $\gamma_0, ..., \gamma_{n-1}$, με κοινή αρχή το O. Αυτά τα τόξα διαιρούν το D^2 σε ξένα μεταξύ τους τμήματα $A_0, ..., A_{n-1}$. Για κάθε $i = 1, ..., n-1$ τα γ_i, γ_0 είναι δύο ανυψώσεις του γ, δηλαδή $\gamma_i = f^i(\gamma_0)$.

Εστω h ένας ομοιομορφισμός μεταξύ του A_0 και του τμήματος R_0 του D^2, που προκύπτει από την στροφή r κατά $2\pi/n$, μιας ακτίνας του D^2. Ο h επιλέγεται έτσι ώστε

$$h\mid_{\gamma_1} = r\circ(h\mid_{\gamma_0}).$$

Επειδή $\gamma_i = f^i(\gamma_0)$ έχουμε ότι $f^{-i}(A_i) = A_0$. Τα $A_0, ..., A_{n-1}$ είναι ξένα μεταξύ τους οπότε ο h επεκτείνεται στο D^2 θέτοντας

$$h\mid_{A_i} = r^i\circ h\circ f^{-i}, \quad i = 0, 1, ..., n.$$

Αν $x \in A_i$ τότε

$$(h^{-1}\circ r\circ h)(x) = h^{-1}(r^{i+1}(h(f^{-i}(x)))) = (f^{i+1}\circ f^{-i})(x) = f(x).$$

Αρα στο D^2 ισχύει $f = h^{-1}\circ r\circ h$. Δείξαμε το Θεώρημα στην περίπτωση $k = 1$.

Αν $k > 1$ από την σχέση $(k,n) = 1$, υπάρχουν $j, m \in \mathbb{Z}$ ώστε $jk + mn = 1$ ισοδύναμα $jk = 1(\mathrm{mod} n)$. Τότε για τον αριθμό στρφής του Poincaré για τον $f\mid_{\partial D^2}$ θα έχουμε

$$\rho(f^j\mid_{\partial D^2}) = \frac{jk}{n}(\mathrm{mod}1) = \frac{1}{n}(\mathrm{mod}1).$$

Αρα ο f^j είναι τοπολογικά συζυγής με την στροφή κατά $2\pi/n$ και επειδή $(f^j)^k = f$, θα έχουμε ότι ο f είναι τοπολογικά συζυγής με την στροφή κατά γωνία $2\pi k/n$. $\square$

Θεώρημα 2.2.6. *Εστω $f : S^2 \to S^2$ ένας περιοδικός ομοιομορφισμός, περιόδου $n > 1$, με $f \neq id$. Αν ο f διατηρεί τον προσανατολισμό, τότε είναι τοπολογικά συζυγής με στροφή κατά γωνία $2k\pi/n$ για κάποιο $1 \leq k \leq n-1$.*

Απόδειξη. Ο $f : S^2 \to S^2$ διατηρεί τον προσανατολισμό, επομένως $\deg(f) = 1$, άρα $f \simeq id$. Κατά συνέπεια ο αριθμός Lefschetz είναι

$$L(f) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dim H_k(S^2;\mathbb{Q}) = \chi(S^2) = 2 \neq 0.$$

Από το Θεώρημα σταθερού σημείου του Lefschetz προκύπτει ότι ο f έχει σταθερό σημείο, $x \in S^2$. Από το λήμμα 2.2.2, για κάθε περιοχή N του x, υπάρχει τοπολογικός κλειστός δίσκος Δ_x τέτοιος ώστε $\Delta_x \subset N$, $f(\Delta_x) = \Delta_x$ και $x \in int\Delta_x$.

Το $C = \partial\Delta_x$ είναι απλή κλειστή καμπύλη, η οποία χωρίζει την S^2 σε δύο f-αναλλοίωτους τοπολογικούς δίσκους D_1, D_2. Επειδή $f \neq id$ και ο f διατηρεί τον προσανατολισμό, από την πρόταση 2.1.2 και το λήμμα 2.2.3 ο f δεν έχει σταθερό σημείο επί της C. Από το λήμμα 2.2.4 για τους D_1, D_2, υπάρχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο του f σε καθένα από τους D_1, D_2. Αρα ο f έχει ακριβώς δύο σταθερά σημεία, τα οποία θεωρούμε ότι είναι τα N, S αντίστοιχα. Οπως στην απόδειξη του θεωρήματος 2.2.5 μπορούμε να κατασκευάσουμε n τόξα, ξένα μεταξύ τους που να ενώνουν τα σημεία N, S, σαν τα τόξα $\gamma_0, ..., \gamma_{n-1}$ εκείνης της απόδειξης. Ομοια μπορούμε να κατασκευάσουμε μια συζυγία μεταξύ του f και της στροφής κατά γωνία $2k\pi/n$, γύρω από τον άξονα των N, S. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΚΑΝΟΝΙΚΟΙ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ

3.1. Γενικές ιδιότητες

Εστω X ένας μετρικοποιήσιμος χώρος, d μια συμβατή μετρική στον X και $f : X \to X$ ένας ομοιομορφισμός. Ενα σημείο $x \in X$ καλείται κανονικό αν η οικογένεια $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι d - ισοσυνεχής σ' αυτό, δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε αν $d(x, y) < \delta$ τότε $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Η κανονικότητα ενός σημείου, είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της μετρικής, όταν ο X είναι συμπαγής. Προς τούτο θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω:

Λήμμα 3.1.1. *Έστω X ένας συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος και d, ρ δύο μετρικές στον X, συμβατές με την τοπολογία του. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε,*

$$B_d(x, \delta) \subset B_\rho(x, \varepsilon)$$

για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη. Από την συμβατότητα των μετρικών d, ρ με την τοπολογία του X, προκύπτει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και $x \in X$ υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε $B_d(x, \delta_x) \subset B_\rho(x, \varepsilon/2)$. Επειδή ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $x_1, ..., x_k \in X$ ώστε

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} B_d(x_i, \frac{1}{2}\delta_{x_i}).$$

Εστω $\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta_{x_1}, ..., \delta_{x_k}\}$. Αν $x \in X$ και $y \in B_d(x, \delta)$, τότε υπάρχει $i \in \{1, ..., k\}$ ώστε

$$x \in B_d(x_i, \frac{1}{2}\delta_{x_i}) \subset B_\rho(x_i, \varepsilon/2).$$

Συνεπώς

$$d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) < \delta + \frac{1}{2}\delta_{x_i} \leq \delta_{x_i}$$

δηλαδή

$$y \in B_d(x_i, \delta_{x_i}) \subset B_\rho(x_i, \varepsilon/2).$$

Αρα

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_i) + \rho(x_i, y) < \varepsilon$$

επομένως $y \in B_\rho(x, \varepsilon)$. □

Πόρισμα 3.1.2. *Έστω X ένας συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος και f ένας ομοιομορφισμός του. Αν η οικογένεια $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι d - ισοσυνεχής στο $x \in X$, τότε είναι και ρ - ισοσυνεχής, όπου d, ρ δύο μετρικές συμβατές με την τοπολογία του X.*

Απόδειξη. Από την συμβατότητα των d, ρ και την συμπάγεια του X, έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\varepsilon' > 0$ ώστε,

$$B_d(z, \varepsilon') \subset B_\rho(z, \varepsilon)$$

για κάθε $z \in X$, από το λήμμα 3.1.1.

Από την d - ισοσυνέχεια στο $x \in X$ προκύπτει ότι υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε αν $d(x, y) < \delta'$ τότε $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Από το λήμμα 3.1.1 υπάρχει $\delta > 0$, ανεξάρτητο από το x, ώστε $B_\rho(x, \delta) \subset B_d(x, \delta')$.

Αν τώρα $\rho(x, y) < \delta$, τότε $d(x, y) < \delta'$, επομένως $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon'$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, άρα $\rho(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. □

Πρόταση 3.1.3. *Έστω X ένας συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος και f ένας ομοιομορφισμός του χώρου X. Αν η οικογένεια $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι ισοσυνεχής σε κάθε σημείο του X, τότε είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχής.*

Απόδειξη. Εστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε αν $y \in B(x, \delta_x)$ τότε $f^n(y) \in B(f^n(x), \varepsilon/2)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Από την συμπάγεια του X, υπάρχουν $x_1, ..., x_k \in X$ τέτοια ώστε

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} B_d(x_i, \frac{1}{2}\delta_{x_i}).$$

Εστω $\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta_{x_1}, ..., \delta_{x_k}\}$. Αν $x \in X$ και $y \in B_d(x, \delta)$ τότε υπάρχει $i \in \{1, ..., k\}$ ώστε

$$x \in B(x_i, \frac{1}{2}\delta_{x_i}).$$

Ομως

$$d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) < \delta + \frac{1}{2}\delta_{x_i} \leq \delta_{x_i},$$

άρα

$$y \in B(x_i, \delta_{x_i})$$

Συνεπώς $x, y \in B(x_i, \delta_{x_i})$ και επομένως

$$d(f^n(x), f^n(x_i)) < \varepsilon/2$$

και

$$d(f^n(x_i), f^n(y)) < \varepsilon/2,$$

άρα $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. □

Θεώρημα 3.1.4. *Έστω X ένας συμπαγής, μετρικοποιήσιμος χώρος και $f : X \to X$ ένας ομοιομορφισμός. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*
(α) Η οικογένεια $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι ισοσυνεχής.
(β) Η κλειστότητα G της οικογένειας $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ στην ομάδα ομοιομορφισμών $H(X)$ του X, με την συμπαγή - ανοιχτή τοπολογία, είναι συμπαγής αβελιανή υποομάδα.
(γ) Υπάρχει μια συμβατή μετρική ρ στο X, ως προς την οποία ο f είναι ρ - ισομετρία.

Απόδειξη. (α)⇒(γ). Εστω d μια συμβατή μετρική στον X. Για την μετρική

$$\rho(x, y) = \sup\{d(f^n(x), f^n(y)) : n \in \mathbb{Z}\}$$

και από την ισοσυνέχεια της οικογένειας $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$, έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $d(x, y) < \delta$, τότε $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon/2$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $B_d(x,\delta) \subset B_\rho(x,\varepsilon)$. Αρα τα ρ - ανοιχτά σύνολα είναι d - ανοιχτά.

Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $y \in B_\rho(x,\varepsilon)$, έχουμε ότι $d(x,y) < \varepsilon$, επομένως $y \in B_d(x,\varepsilon)$. Αρα $B_\rho(x,\varepsilon) \subset B_d(x,\varepsilon)$, επομένως τα d - ανοιχτά σύνολα είναι ρ - ανοιχτά, συνεπώς η μετρική ρ είναι συμβατή με την τοπολογία του X. Προφανώς τώρα

$$\rho(f(x),f(y)) = \sup\{d(f^{n+1}(x),f^{n+1}(y)) : n \in \mathbb{Z}\} = \rho(x,y)$$

(γ)⇒(β) Για κάθε $x \in X$ το σύνολο $cl_X\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι συμπαγές. Από το Θεώρημα του Ascoli η κλειστότητα

$$G = cl_{C(X,X)}\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

στον χώρο $C(X,X)$, είναι συμπαγής.

Εστω $I_\rho(X)$ η ομάδα των ρ - ισομετριών του X. Αν

$$g \in G = cl_{C(X,X)}\{f^n : n \in \mathbb{Z}\} \supset cl_{H(X)}\{f^n : n \in \mathbb{Z}\} \supset cl_{I_\rho(X)}\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

και $f^{n_k} \to g$ ομοιόμορφα στο X, με $n_k \to \pm\infty$, τότε για κάθε $x,y \in X$ έχουμε

$$\rho(g(x),g(y)) = \lim_{k\to\infty} \rho(f^{n_k}(x),f^{n_k}(y)) = \rho(x,y).$$

Επειδή ο X είναι συμπαγής η g είναι επί και συνεπώς είναι ρ - ισομετρία. Αυτό δείχνει ότι

$$G = cl_{C(X,X)}\{f^n : n \in \mathbb{Z}\} = cl_{H(X)}\{f^n : n \in \mathbb{Z}\} = cl_{I_\rho(X)}\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Αρα η G είναι συμπαγής και προφανώς αβελιανή υποομάδα της $H(X)$.

(β)⇒(α) Η απεικόνιση εκτίμησης $E : G \times X \to X$ είναι συνεχής, διότι ο X είναι συμπαγής. Εστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Για κάθε $g \in G$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή V_g του g στο G και $\delta_g > 0$, έτσι ώστε

$$E(V_g \times B(x,\delta_g)) \subset B(g(x),\varepsilon/2).$$

Από την συμπάγεια της G, υπάρχουν $g_1,...,g_k \in G$ ώστε

$$G = \bigcup_{i=1}^{k} V_{g_i}.$$

Εστω $\delta = \min\{\delta_{g_1},...,\delta_{g_k}\}$. Για κάθε $g \in G$ και για κάθε $y \in B(x,\delta)$ υπάρχει $i \in \{1,...,k\}$ με $g \in V_{g_i}$ και $y \in B(x,\delta_{g_i})$. Τότε

$$g(y) \in E(V_{g_i} \times B(x,\delta_{g_i})) \subset B(g_i(x),\varepsilon/2)$$

και

$$g(x) \in B(g_i(x),\varepsilon/2).$$

Αρα

$$d(g(x),g(y)) \leq d(g(x),g_i(x)) + d(g_i(x),g(x)) < \varepsilon$$

για κάθε $g \in G$. Ειδικότερα ισχύει $d(f^n(x),f^n(y)) < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. □

Ορισμός 3.1.5. Εστω X ένας συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος. Ενας ομοιομορφισμός $f : X \to X$ λέγεται κανονικός αν η οικογένεια $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι ισοσυνεχής.

Αν η ομάδα G είναι διακριτή, τότε επειδή σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα είναι συμπαγής, πρέπει να είναι πεπερασμένη. Ετσι σ' αυτή την περίπτωση υπάρχει $n \neq 0$ ώστε $f^n = id$, δηλαδή ο f είναι περιοδικός.

Αν η G δεν είναι διακριτή, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ακέραιος $n \neq 0$ ώστε $0 < d(f^n, id) < \varepsilon$, όπου d είναι η μετρική στο $H(X)$, που ορίζει την συμπαγή - ανοιχτή τοπολογία. Ετσι λοιπόν σε κάθε περίπτωση για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ακέραιος $n \neq 0$, ώστε $d(f^n, id) < \varepsilon$.

Εστω X ένας συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος, $f : X \to X$ ένας ομοιομορφισμός και $x \in X$. Θέτουμε

$$O(x, f) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\},$$

$$O^+(x, f) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\},$$

$$O^-(x, f) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}, n \leq 0\}.$$

Θυμίζουμε ότι το οριακό σύνολο του $x \in X$ είναι το

$$L(x, f) = L^+(x, f) \cup L^-(x, f).$$

Παρατηρούμε ότι αν το $A \subset X$ είναι ένα συμπαγές f - αναλλοίωτο σύνολο, τότε και ο $f\,|_A$ είναι κανονικός ομοιομορφισμός, αν ο f είναι.

Λήμμα 3.1.6. *Έστω X ένας συμπαγής, μετρικοποιήσιμος χώρος και $f : X \to X$ ένας ομοιομορφισμός.*
(1) Εστω $x \in X$ ένα κανονικό σημείο και έστω ότι υπάρχουν ακολουθίες $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στο X και $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{Z}$, ώστε $x_i \to x$ και $f^{n_i}(x_i) \to z$. Τότε $f^{n_i}(x) \to z$.
(2) Αν τα σημεία x, y είναι κανονικά, τότε $f^{n_i}(x) \to y$ αν και μόνο αν $f^{-n_i}(y) \to x$.
(3) Ενα κανονικό σημείο ανήκει στο οριακό του σύνολο $L(x, f)$, ακριβώς τότε αν το $L(x, f)$ περιέχει ένα κανονικό σημείο.
(4) Αν ένα κανονικό σημείο $x \in X$ ανήκει στο οριακό του σύνολο $L(x, f)$, τότε

$$L^+(x, f) = L^-(x, f) = cl_X O(x, f).$$

Απόδειξη. Για κάθε $\varepsilon > 0$ θέτουμε

$$\phi(x, \varepsilon) = \sup\{\delta > 0 : d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{Z} \text{ και } y \in B_\delta(x, \varepsilon)\}.$$

(1) Εστω $\varepsilon > 0$ και $\delta = \varphi(x, \varepsilon)$. Για αρκετά μεγάλο i έχουμε $d(x_i, x) < \delta$ και $d(f^{n_i}(x_i), z) < \delta$. Από την ισοσυνέχεια έχουμε ότι $d(f^{n_i}(x_i), f^{n_i}(x)) < \varepsilon$, επομένως

$$d(f^{n_i}(x), z) < d(f^{n_i}(x), f^{n_i}(x_i)) + d(f^{n_i}(x_i), z) < \varepsilon + \delta < 2\varepsilon,$$

για αρκετά μεγάλο i. Αρα $f^{n_i}(x) \to z$.
(2) Εστω $\varepsilon > 0$ και $\delta = \varphi(x, \varepsilon)$. Για αρκετά μεγάλο i έχουμε $d(f^{n_i}(x), y) < \delta$. Επομένως από την ισοσυνέχεια, έχουμε ότι

$$d(f^n(f^{n_i}(x), f^n(y))) < \varepsilon,$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Αρα για $n = -n_i$, προκύπτει ότι $d(x, f^{-n_i}(y)) < \varepsilon$ για μεγάλο i, δηλαδή $f^{-n_i}(y) \to x$. Ομοια δείχνουμε ότι αν $f^{-n_i}(y) \to x$, τότε $f^{n_i}(x) \to y$.
(3) Θα δείξουμε ότι $x \in L(x, f)$ τότε και μόνο τότε, αν υπάρχει ένα κανονικό σημείο $y \in L(x, f)$. Εστω $y \in L(x, f)$ ένα κανονικό σημείο και $\varepsilon > 0$, $\delta = \varphi(y, \varepsilon)$. Υπάρχουν τότε $n > m > 0$ ώστε $d(y, f^n(x)) < \delta$ και $d(y, f^m(x)) < \delta$.

Ομως το y είναι κανονικό, άρα $d(f^k(y), f^{k+n}(x)) < \varepsilon$ και $d(f^k(y), f^{k+m}(x)) < \varepsilon$, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αρα $d(f^{-m}(y), f^{n-m}(x)) < \varepsilon$ και $d(f^{-m}(y), x) < \varepsilon$. Συνεπώς $d(x, f^{n-m}(x)) < 2\varepsilon$. Αυτό δείχνει ότι $x \in L(x, f)$.

Το αντίστροφο είναι προφανές.

(4) Εστω x ένα κανονικό σημείο ώστε $x \in L(x, f)$. Αν $x \in L^+(x, f)$ τότε εξ' ορισμού $x = \lim f^{n_i}(x)$, για κάποια $n_i \to \pm\infty$. Από το (2) προκύπτει ότι $x = \lim f^{-n_i}(x)$ συνεπώς $x \in L^-(x, f)$, άρα $L^+(x, f) \subset L^-(x, f)$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $L^-(x, f) \subset L^+(x, f)$, άρα $O(x, f) \subset L^+(x, f) = L^-(x, f) = L(x, f) \subset cl_X O(x, f)$.□

Στην συνέχεια της παραγράφου αυτής θα κατατάξουμε τους κανονικούς ομοιομορφισμούς του S^1 που διατηρούν τον προσανατολισμό.

Λήμμα 3.1.7. *Εστω $f : S^1 \to S^1$ ένας κανονικός ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό. Αν υπάρχει σταθερό σημείο υπό τον f, τότε $f = id$.*

Απόδειξη. Εστω $x_0 \in Fix(f)$ και $\varepsilon > 0$. Λόγω κανονικότητας υπάρχει $\delta_0 > 0$ τέτοιο ώστε αν $d(x, x_0) < \delta_0$ τότε $d(f^n(x), x_0) < \varepsilon$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Για κάθε $\delta \leq \delta_0$ θεωρούμε το ανοιχτό και f - αναλλοίωτο σύνολο

$$U_\delta = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(B(x_0, \delta)).$$

Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, τα ανοιχτά σύνολα $f^n(B(x_0, \delta))$ είναι συνεκτικά και επειδή

$$x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(B(x_0, \delta)),$$

το U_δ είναι ανοιχτό διάστημα (δηλαδή τόξο). Εστω ότι το U_δ έχει άκρα a_δ και b_δ.

Προφανώς $f(\partial U_\delta) = \partial f(U_\delta) = \partial U_\delta = \{a_\delta, b_\delta\}$ άρα $f(a_\delta) = a_\delta$, $f(b_\delta) = b_\delta$, διότι ο f διατηρεί τον προσανατολισμό. Αφού $a_\delta \in \partial U_\delta$, υπάρχουν $c_k \in B(x_0, \delta)$ και $n_k \in \mathbb{Z}$, ώστε $a_\delta = \lim_{k \to \infty} f^{n_k}(c_k)$. Λόγω της συμπάγειας του $cl(B(x_0, \delta))$, η ακολουθία $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ίδια συγκλίνει σε κάποιο $c \in cl(B(x_0, \delta))$.

Από το λήμμα 3.1.6 έχουμε ότι $f^{n_k}(c) \to a_\delta$, συνεπώς πάλι από το λήμμα 3.1.6 έχουμε και $f^{-n_k}(a_\delta) \to c$. Επειδή $f(a_\delta) = a_\delta$ θα έχουμε $a_\delta = c$, άρα $a_\delta \in \partial B(x_0, \delta)$. Ομοια αποδεικνύεται ότι $b_\delta \in \partial B(x_0, \delta)$. Ετσι $f(B(x_0, \delta)) = B(x_0, \delta)$ με σταθερά άκρα για κάθε $\delta \leq \delta_0$. Αυτό δείχνει ότι για κάθε $x_0 \in Fix(f)$, υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $B(x_0, \delta_0) \subset Fix(f)$, άρα το $Fix(f)$ είναι ανοιχτό και κλειστό, μη κενό υποσύνολο του συνεκτικού S^1. Συνεπώς $Fix(f) = S^1$, δηλαδή $f = id$. □

Θεώρημα 3.1.8. *Εστω $f : S^1 \to S^1$ ένας κανονικός ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό. Τότε ο f είναι τοπολογικά συζυγής με στροφή.*

Απόδειξη. Αν $\rho(f) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, τότε, σύμφωνα με την παρατήρηση 1.3.3, υπάρχουν $m_0 \in \mathbb{Z}$, $x_0 \in S^1$ τέτοια ώστε $f^{m_0}(x_0) = x_0$. Αρα $Fix(f^{m_0}) \neq \emptyset$ και επομένως από το λήμμα 3.1.7, $f^{m_0} = id$. Από την πρόταση 2.1.2 ο f είναι τοπολογικά συζυγής με ρητή στροφή.

Εστω τώρα ότι $\rho(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Αφού ο f είναι κανονικός, τότε από την πρόταση 1.3.5 και το λήμμα 3.1.6 προκύπτει ότι $L^+(x, f) = L^-(x, f) = S^1$, για κάθε $x \in S^1$ δηλαδή ο f έχει πυκνές τροχιές στον S^1. Αρα από το θεώρημα 1.3.6 ο f είναι τοπολογικά συζυγής με άρρητη στροφή. □

3.2. Κανονικοί ομοιομορφισμοί της S^2

Στην παράγραφο αυτή θα κατατάξουμε τους κανονικούς ομοιομορφισμούς της σφαίρας S^2 που διατηρούν τον προσανατολισμό. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε ότι κάθε τέτοιος ομοιομορφισμός της S^2 είναι τοπολογικά συζυγής με στροφή. Το πρώτο βήμα στην απόδειξη του Θεωρήματος, είναι να δείξουμε ότι γύρω από ένα σταθερό σημείο ενός κανονικού ομοιμορφισμού f της σφαίρας, υπάρχουν απλές κλειστές καμπύλες f - αναλλοίωτες.

Ορισμός 3.2.1. Εστω K ένας τοπολογικός χώρος. Ενα σημείο $a \in K$ λέγεται σημείο αποκοπής, αν το $K \setminus \{a\}$ είναι μη συνεκτικό.

Ορισμός 3.2.2. Ενας χώρος X λέγεται τοπικά συνεκτικός, αν έχει μια βάση η οποία αποτελείται από ανοιχτά συνεκτικά σύνολα.

Λήμμα 3.2.3. *Εστω X ένας τοπολογικός χώρος με την ιδιότητα: Για κάθε $x \in X$ και κάθε ανοιχτή περιοχή U του x, υπάρχει ένα συνεκτικό σύνολο K ώστε $x \in intK \subset K \subset U$. Τότε ο X είναι τοπικά συνεκτικός.*

Απόδειξη. Εστω $G \subset X$ ένα ανοιχτό σύνολο και C μια συνεκτική συνιστώσα του G. Αν $x \in C$, υπάρχει V ανοιχτό με $x \in V \subset G$, αφού $x \in G$. Από την υπόθεση υπάρχει συνεκτικό $K \subset X$ με $x \in intK \subset K \subset V \subset G$. Κατά συνέπεια $K \subset C$. Αυτό δείχνει ότι το C είναι ανοιχτό, άρα κάθε συνεκτική συνιστώσα ανοιχτού συνόλου είναι ανοιχτό σύνολο. Επειδή η οικογένεια όλων των συνιστωσών από όλα τα ανοιχτά σύνολα στο X αποτελούν βάση του, προκύπτει ότι ο X είναι τοπικά συνεκτικός. □

Πρόταση 3.2.4. *Έστω X ένας συμπαγής, μετρικοποιήσιμος χώρος και d μια συμβατή μετρική στον X. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(1) Ο X είναι τοπικά συνεκτικός.
(2) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και συμπαγή συνεκτικά σύνολα $K_1, ...K_n$ με

$$X = K_1 \cup ... \cup K_n$$

και $diam(K_i) < \varepsilon, 1 \leq i \leq n$.

Απόδειξη. Εστω ότι ο X είναι τοπικά συνεκτικός και $\varepsilon > 0$. Τότε οι συνεκτικές συνιστώσες των $B(x, \varepsilon/2)$ με $x \in X$, είναι ανοιχτά συνεκτικά σύνολα και καλύπτουν τον X. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν κατά συνέπεια ανοιχτά, συνεκτικά σύνολα $V_1, ...V_n$ με

$$X = V_1 \cup ... \cup V_n$$

και $diam(V_i) < \varepsilon, 1 \leq i \leq n$. Αρκεί τώρα να πάρουμε $K_i = \overline{V_i}, 1 \leq i \leq n$.

Αντίστροφα, έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Τότε από την υπόθεση υπάρχουν συμπαγή συνεκτικά σύνολα $K_1, ...K_n$ με

$$X = K_1 \cup ... \cup K_n$$

και $diam(K_i) < \varepsilon, 1 \leq i \leq n$. Αν $x \in \bigcap_{i=1}^n K_i$ θέτουμε $\delta_x = 1$, αλλιώς θέτουμε

$$\delta_x = d(x, \bigcup_{x \notin K_i} K_i) > 0.$$

Προφανώς

$$B(x,\delta_x) \subset \bigcup_{x\in K_i} K_i.$$

Το $K = \bigcup_{x\in K_i} K_i$, είναι συνεκτικό και $x \in intK \subset K \subset B(x,\varepsilon)$.

Από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι ο X είναι τοπικά συνεκτικός. $\square$

Το παρακάτω είναι κλασικό αποτέλεσμα της τοπολογίας της S^2. (βλ. [8], Th. 2.6.)

Θεώρημα 3.2.5. *Εστω K ένα μη εκφυλισμένο, τοπικά συνεκτικό, συμπαγές και συνεκτικό υποσύνολο της σφαίρας το οποίο δεν περιέχει σημεία αποκοπής. Τότε το σύνορο κάθε συνεκτικής συνιστώσας του $S^2 \setminus K$ είναι απλή κλειστή καμπύλη.*

Λήμμα 3.2.6. *Εστω $f : S^2 \to S^2$ ένας κανονικός ομοιομορφισμός και $D \subset S^2$ ένας κλειστός δίσκος. Τότε το συμπαγές σύνολο*

$$K = cl(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(D))$$

είναι τοπικά συνεκτικό.

Απόδειξη. Εστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε μια τριγωνοποίηση του D, από πεπερασμένου πλήθους κλειστά 2 - τρίγωνα $e_1, ...e_r$, ώστε $diam(e_i) < \varphi(\varepsilon)$, $i = 1, ..., r$, όπου $\varphi(\varepsilon) = \sup\{\delta > 0 : d(f^n(x), f^n(y) < \varepsilon$ όταν $d(x,y) < \delta\}$. Επομένως για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$f^n(D) = \bigcup_{i=1}^{r} e_i^n,$$

όπου έχουμε θέσει $e_i^n = f^n(e_i)$, $i = 1, 2, ..., r$.

Εστω $\rho > 0$, τέτοιο ώστε κάθε 2 - τρίγωνο e_i να περιέχει στο εσωτερικό του έναν δίσκο $B(x_i, \rho)$. Ετσι, λόγω της ομοιόμορφης ισοσυνέχειας

$$f^{-n}(B(f^n(x_i), \varphi(\rho)) \subset B(x_i, \rho)$$

και επομένως

$$B(f^n(x_i), \varphi(\rho)) \subset f^n(B(x_i, \rho)) \subset f^n(e_i) = e_i^n$$

για κάθε i και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Η οικογένεια $\{e_i^n : i = 1, ..., r, \quad n \in \mathbb{Z}\}$ περιέχει μόνο πεπερασμένα, μη τεμνόμενα ανά ζεύγη 2 - τρίγωνα. Πράγματι, λόγω ομοιόμορφης ισοσυνέχειας το $\varphi(\rho)$ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων και σταθερό. Επίσης το εμβαδό του D λόγω συμπάγειας είναι πεπερασμένο. Συνεπώς κάθε 2 - τρίγωνο e_i^n θα έχει εμβαδό μεγαλύτερο από $\pi\varphi(\rho)^2$, άρα αν υπήρχαν άπειρα μη τεμνόμενα ανά ζεύγη 2-τρίγωνα, το D θα είχε άπειρο εμβαδό.

Εστω $\{e_{i_1}^{n_1}, ..., e_{i_\rho}^{n_\rho}\}$, η μέγιστη συλλογή από ανά ζεύγη μη τεμνόμενα 2-τρίγωνα. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και για κάθε $i \in \{1, ..., r\}$, υπάρχει $j \in \{1, ..., r\}$ τέτοιο ώστε

$$e_{i_j}^{n_j} \cap e_i^n \neq \emptyset.$$

Για κάθε $k \in \{1, ..., \rho\}$, θέτουμε

$$M_k = cl(\cup\{e_i^n : e_i^n \cap e_{i_k}^{n_k} \neq \emptyset\}).$$

Το M_k είναι συμπαγές και συνεκτικό σύνολο με $diam(M_k) < 3\varepsilon$, αφού $diam(e_i^n) < \varepsilon$ για $i = 1, ..., r$, $n \in \mathbb{Z}$.Προφανώς

$$cl(\bigcup_{k=1}^{\rho}(\cup\{e_i^n : e_i^n \cap e_{i_k}^{n_k} \neq \emptyset\})) = cl(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(D)) = K.$$

Αυτό δείχνει ότι το K είναι τοπικά συνεκτικό. □

Πρόταση 3.2.7. *Έστω f ένας κανονικός ομοιομορφισμός της σφαίρας και x ένα σταθερό σημείο του f. Τότε υπάρχουν τοπολογικοί κλειστοί δίσκοι, αναλλοίωτοι από τον f και οι οποίοι αποτελούν βάση περιοχών του x.*

Απόδειξη. Εστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $\delta = \varphi(\varepsilon)$ και $\eta = \varphi(\delta/2)$. Εστω D° ο ανοιχτός δίσκος κέντρου $x \in Fix(f)$ και ακτίνας η. Θεωρούμε το σύνολο

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(D^\circ).$$

Προφανώς το U είναι ανοιχτό συνεκτικό και f - αναλλοίωτο.

Από την ομοιόμορφη ισοσυνέχεια, Προκύπτει ότι $f^n(D^\circ) \subset B(x, \delta/2)$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Επομένως $U \subset B(x, \delta/2)$. Τότε αν $D = \overline{D^\circ}$, ισχύει

$$U \subset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(D) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(\overline{D^\circ}) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \overline{f^n(D^\circ)} \subset \overline{U},$$

άρα

$$cl(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(D)) = \overline{U}.$$

Από το λήμμα 3.2.6 το $\overline{U}$ είναι λοιπόν τοπικά συνεκτικό.

Το $\overline{U}$ δεν έχει σημεία αποκοπής διότι το σύνολο $\overline{U} \setminus \{a\}$, είναι συνεκτικό για κάθε $a \in \overline{U}$. Επομένως από το Θεώρημα 3.2.5 προκύπτει ότι το σύνορο κάθε συνεκτικής συνιστώσας του $S^2 \setminus \overline{U}$, είναι απλή κλειστή καμπύλη.

Λόγω της ομοιόμορφης ισοσυνέχειας και του γεγονότος ότι $x \in Fix(f)$, έχουμε ότι

$$f^{-1}(B(x,\delta)) \subset B(x,\varepsilon),$$

οπότε

$$S^2 \setminus B(x,\varepsilon) \subset S^2 \setminus f^{-1}(B(x,\delta)) = f^{-1}(S^2 \setminus B(x,\delta)),$$

άρα $f(S^2 \setminus B(x,\varepsilon)) \subset S^2 \setminus B(x,\delta) \subset S^2 \setminus \overline{U}$.

Εστω C η συνεκτική συνιστώσα του $S^2 \setminus \overline{U}$ που περιέχει το $S^2 \setminus B(x,\delta)$ άρα και το $f(S^2 \setminus B(x,\varepsilon))$. Επειδή ο ομοιομορφισμός $f\mid_{S^2\setminus\overline{U}}$ απεικονίζει συνεκτικές συνιστώσες του $S^2 \setminus \overline{U}$, σε συνεκτικές συνιστώσες του $S^2 \setminus \overline{U}$, το σύνολο $f(C)$ είναι συνεκτική συνιστώσα του $S^2 \setminus \overline{U}$. Ομως $f(S^2 \setminus B(x,\varepsilon)) \subset f(C)$ και επειδή $f(S^2 \setminus B(x,\varepsilon)) \subset S^2 \setminus B(x,\delta) \subset C$ έχουμε $f(C) = C$, δηλαδή η συνεκτική συνιστώσα C του $S^2 \setminus \overline{U}$ που περιέχει το $S^2 \setminus B(x,\delta)$ είναι f - αναλλοίωτη.

Το $\partial C = \gamma$ είναι απλή κλειστή καμπύλη f - αναλλοίωτη, που αποτελεί σύνορο ενός τοπολογικού ανοιχτού δίσκου Δ° με

$$x \in \Delta^\circ = S^2 \setminus C, \quad \partial\Delta^\circ = \partial C = \gamma, \quad f(\Delta^\circ) = \Delta^\circ$$

και προφανώς $\Delta^\circ \subset B(x,\delta)$. □

Εστω $f : S^2 \to S^2$ ένας ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό. Τότε $\deg(f) = 1$, άρα $f \simeq id$. Κατά συνέπεια

$$L(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dim H_k(S^2; \mathbb{Q}) = \chi(S^2) = 2 \neq 0.$$

Από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Lefschetz προκύπτει ότι ο f έχει σταθερό σημείο, έστω το $x \in S^2$. Αν επιπλέον ο f είναι κανονικός τότε όπως έχουμε δει, υπάρχει κλειστός δίσκος Δ, f - αναλλοίωτος, τέτοιος ώστε $x \in \Delta^\circ$. Επομένως το $D = S^2 \setminus \Delta^\circ$ που είναι ομοιομορφικό με κλειστό δίσκο είναι f - αναλλοίωτο. Τώρα από το Θεώρημα του Brouwer υπάρχει σταθερό σημείο $x_0 \in D$ με $x_0 \neq x$, συνεπώς ο f έχει τουλάχιστο δύο σταθερά σημεία.

Αν γ είναι μια f -αναλλοίωτη απλή κλειστή καμπύλη, θα συμβολίζουμε τον αριθμό στροφής του Poincaré του περιορισμού του f στην γ, με $\rho(\gamma, f)$.

Λήμμα 3.2.8. *Έστω f ένας κανονικός ομοιομορφισμός της σφαίρας που διατηρεί τον προσανατολισμό και γ μια f - αναλλοίωτη απλή κλειστή καμπύλη. Αν $\rho(\gamma, f) = 0$, τότε $f = id$.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση ο f έχει σταθερό σημείο επί της γ. Επειδή η γ είναι f - αναλλοίωτη, ο $f|_\gamma$ είναι κανονικός ομοιομορφισμός. Από το λήμμα 3.1.7 έχουμε ότι $f|_\gamma = id$, συνεπώς $\gamma \subset Fix(f)$.

Εστω Γ η συνεκτική συνιστώσα του $Fix(f)$ που περιέχει την γ. Η Γ είναι κλειστό σύνολο. Αρκεί να δείξουμε ότι η Γ είναι ανοιχτό υποσύνολο της S^2.

Εστω $x \in \Gamma$ και $\varepsilon > 0$ με $diam(\gamma) > 2\varepsilon$ και $\delta = \varphi(\varepsilon)$. Από την Πρόταση 3.2.7 για κάθε ανοιχτή περιοχή $B(x, r)$ με $r < \delta$, υπάρχει f - αναλλοίωτος τοπολογικός κλειστός δίσκος Δ_r, με $x \in \Delta_r^\circ$, $\Delta_r \subset B(x, \delta)$.Εστω $\gamma_r = \partial \Delta_r$.

Αφού $diam(\gamma) > 2\varepsilon$ τότε $\gamma \not\subset B(x, \varepsilon)$ και άρα $\Gamma \not\subset B(x, \varepsilon)$, επομένως $\Gamma \not\subset \Delta_r$. Λόγω συνεκτικότητας του Γ, έχουμε ότι $\Gamma \cap \gamma_r \neq \emptyset$. Επομένως, από το λήμμα 3.1.7 προκύπτει $f|_{\gamma_r} = id$, άρα $\gamma_r \subset \Gamma$.

Οπως δείχνει η απόδειξη της πρότασης 3.2.7 η γ_r είναι το σύνορο της συνεκτικής συνιστώσας του $S^2 \setminus \overline{U}_r$ που περιέχει το $S^2 \setminus B(x, \delta)$, όπου

$$U_r = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(B(x, r)).$$

Αρα

$$\gamma_r \subset \partial(S^2 \setminus \overline{U}_r) = \partial \overline{U}_r \subset \partial U_r \subset \partial(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(B(x, r))) \subset cl(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(C_r))$$

όπου $C_r = \partial B(x, r)$.

Εστω $y \in \gamma_r$. Τότε $y = \lim f^{n_k}(x_k)$, όπου $x_k \in C_r$ και $n_k \in \mathbb{Z}$. Λόγω συμπάγειας του C_r η ακολουθία $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Ετσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\lim x_k = x_0$ για κάποιο $x_0 \in C_r$. Επομένως από το λήμμα 3.1.6 έχουμε $y = \lim f^{n_k}(x_0)$ και $x_0 = \lim f^{-n_k}(y) = y$.

Αυτό δείχνει ότι $\gamma_r \subset C_r$ επομένως $\gamma_r = C_r$, αφού αυτές είναι απλές κλειστές καμπύλες. Επειδή το $0 < r < \delta$ είναι οποιοδήποτε, συμπεραίνουμε ότι $B(x, \delta) \subset \Gamma$.

Αρα το Γ είναι ανοιχτό, όπως επίσης και κλειστό, μη κενό υποσύνολο του S^2. Συνεπώς, λόγω της συνεκτικότητας της S^2, θα πρέπει $\Gamma = S^2$, άρα $f = id_{S^2}$. $\square$

Εστω f ένας κανονικός ομοιομορφισμός της σφαίρας που διατηρεί τον προσανατολισμό. Αν γ είναι μια f - αναλλοίωτη απλή κλειστή καμπύλη και

$$G = cl_{H(S^2)}\{f^n : n \in \mathbb{Z}\},$$

τότε μια f - αναλλοίωτη απλή κλειστή καμπύλη γ είναι g - αναλλοίωτη για κάθε $g \in G$. Επίσης κάθε $g \in G$ είναι κανονικός ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό.

Λήμμα 3.2.9. *Η απεικόνιση $\rho_\gamma : G \to S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ με $\rho_\gamma(g) = \rho(\gamma, g)$ είναι ένας συνεχής μονομορφισμός.*

Απόδειξη. Από το θεώρημα 1.3.4 η ρ_γ είναι συνεχής. Επίσης ισχύει ότι

$$\rho_\gamma(f^n) = \rho(\gamma, f^n) = n\rho(\gamma, f) = n\rho_\gamma(f)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Συνεπώς η ρ_γ είναι ομομορφισμός ομάδων.

Εστω $g \in \ker \rho_\gamma$. Τότε $\rho_\gamma(g) = \rho(\gamma, g) = 0$. Σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα 3.2.8 έχουμε $g = id_{S^2}$, δηλαδή η ρ_γ είναι μονομορφισμός ομάδων. $\square$

Σύμφωνα με το πόρισμα 1.1.5 και το προηγούμενο λήμμα 3.2.9, η G είναι ισόμορφη είτε με πεπερασμένη κυκλική ομάδα είτε με τον S^1. Στην πρώτη περίπτωση ο f είναι περιοδικός και όπως αποδείξαμε στο Κεφάλαιο II τοπολογικά συζυγής με ρητή στροφή.

Πρόταση 3.2.10. *Αν $G \cong S^1$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα.*
(1) Το $Fix(f)$ αποτελείται ακριβώς από δύο σημεία $N, S \in S^2$.
(2) Η G δρα ελεύθερα επί του $S^2 \setminus \{N, S\}$ μέσω της απεικόνισης εκτίμησης.
(3) Κάθε τροχιά της δράσης της G στο $S^2 \setminus \{N, S\}$ είναι μια απλή κλειστή καμπύλη, μη ομοτοπική με σταθερά στο $S^2 \setminus \{N, S\}$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι ένας κανονικός ομοιομορφισμός $f : S^2 \to S^2$ που διατηρεί τον προσανατολισμό, έχει δύο τουλάχιστον σταθερά σημεία N, S. Επίσης από την πρόταση 3.2.7 υπάρχει f - αναλλοίωτη απλή κλειστή καμπύλη γ, η οποία διαχωρίζει τα σημεία N, S.

Από το λήμμα 3.2.9 για κάθε $g \in G$ με $g \neq id$, ισχύει ότι $\rho(\gamma, g) \neq 0$ και το g δεν έχει σταθερό σημείο επί της γ. Εστω ότι υπάρχει και ένα άλλο G - σταθερό σημείο x_0 και έστω y ένα σημείο της γ. Θεωρούμε ένα τόξο

$$\gamma_{x_0} : [0,1] \to S^2 \setminus \{N, S\}$$

με $\gamma_{x_0}(0) = x_0$ και $\gamma_{x_0}(1) = y$.
Η απεικόνιση

$$\theta = E \circ (id \times \gamma_{x_0}) : G \times [0,1] \to S^2 \setminus \{N, S\},$$

όπου E είναι η απεικόνιση εκτίμησης, είναι συνεχής και

$$\theta(g, 0) = E(g, \gamma_{x_0}(0)) = g(x_0) = x_0,$$

$$\theta(g, 1) = E(g, \gamma_{x_0}(1)) = g(y).$$

Ομως από το λήμμα 1.1.6 έχουμε $\gamma = G(y)$. Κατα συνέπεια η θ είναι ομοτοπία στο $S^2 \setminus \{N, S\}$ μεταξύ της γ και της σταθερής καμπύλης στο x_0. Το γεγονός αυτό έρχεται σε αντίθεση με το ότι η γ δεν είναι ομοτοπική με σταθερά στο $S^2 \setminus \{N, S\}$.

Από το λήμμα 1.1.6 κάθε G - τροχιά ενός σημείου, εκτός από των N, S, είναι απλή κλειστή καμπύλη στο $S^2 \setminus \{N, S\}$.

Εστω ότι ένα στοιχείο $g_0 \in G$ έχει ένα σταθερό σημείο x_0 στο $S^2 \setminus \{N, S\}$ και $G(x_0)$ η G - τροχιά του. Επειδή $G(x_0) \approx S^1$ και $g_0(G(x_0)) = G(x_0)$, άμεσα από το λήμμα 3.2.8 προκύπτει ότι $g_0 = id$. Επομένως για κάθε $x \in S^2 \setminus \{N, S\}$, ισχύει $G_x = \{id\}$, άρα η G δρα ελεύθερα επί του $S^2 \setminus \{N, S\}$. □

Στην συνέχεια υποθέτουμε πάντα ότι $G \cong S^1$. Είδαμε ότι κάθε G - τροχιά ενός σημείου του $S^2 \setminus \{N, S\}$ είναι απλή κλειστή καμπύλη στο $S^2 \setminus \{N, S\}$ και ότι η G δρα ελεύθερα στο $S^2 \setminus \{N, S\}$, με δράση την απεικόνιση εκτίμησης $E : G \times S^2 \to S^2$.

Λήμμα 3.2.11. *Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν x, y είναι δύο διαφορετικά σημεία μιας G - τροχιάς γ και αν $d(x, y) < \delta$, τότε ένα από τα δύο τόξα στην γ που έχουν άκρα x, y, έχει διάμετρο μικρότερη από ε.*

Απόδειξη. Αφού το N (αντίστοιχα το S) είναι G - σταθερό σημείο, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια G - τροχιά $\gamma_N \subset B(N, \varepsilon/2)$ (αντίστοιχα $\gamma_S \subset B(S, \varepsilon/2)$). Εστω A ο G - αναλλοίωτος δακτύλιος με σύνορο τις γ_N, γ_S. Το λήμμα χρειάζεται απόδειξη μόνο για τις G - τροχιές στο A. Για κάθε $x \in A$ η $G(x)$ είναι απλή κλειστή καμπύλη. Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει τόξο πάνω στην $G(x)$ με διάμετρο μικρότερη από $\varepsilon/2$, δηλαδή υπάρχει $\mu > 0$ τέτοιο ώστε αν $I_\mu = [-\mu, \mu] \subset G$ τότε $d(x, g(x)) < \varepsilon/2$, για κάθε $g \in I_\mu$, όπου το 0 αντιστοιχεί στην id.

Επειδή η G δρα ελεύθερα υπάρχει τότε $\delta > 0$, ώστε $d(x, g(x)) \geq \delta$ για κάθε $g \in G \setminus I_\mu$, γιατί αλλιώς υπάρχουν $g_n \in S^1 \setminus I_\mu$ τέτοια ώστε $d(x, g_n(x)) < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Επομένως το $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει ένα οριακό σημείο $g \in G$ και $g(x) = x$ άτοπο.

Αν τα διαφορετικά σημεία x, y ανήκουν σε μια G - τροχιά με $d(x, y) < \delta$, τότε σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχουμε $y = g(x)$, για κάποιο $g \in I_\mu$. Αρα για κάθε $x \in A$, το τόξο $\gamma_x : [0, \mu] \to A$ με $\gamma_x(g) = g(x)$ έχει διάμετρο μικρότερη από ε. □

Εστω γ, γ' δύο απλές κλειστές καμπύλες οι οποίες διαχωρίζουν τα σημεία N, S. Θα σημειώνουμε $\gamma \leq \gamma'$ (αντίστοιχα $\gamma < \gamma'$) ακριβώς τότε αν η γ περιέχεται στον τοπολογικό κλειστό (αντίστοιχα ανοιχτό) δίσκο με σύνορο την γ', ο οποίος περιέχει το S. Αυτή η σχέση εισάγει μια ολική διάταξη στο σύνολο όλων των G - τροχιών (με την σύμβαση $S \leq \gamma$ και $\gamma \leq N$ για κάθε G - τροχιά γ.).

Μια πεπερασμένη ακολουθία σημείων $\{x_0, ..., x_n\}$ τέτοια ώστε $d(x_k, x_{k+1}) < \mu$ και $G(x_k) < G(x_{k+1})$ καλείται μονότονη μ - αλυσίδα από το x_0 στο x_n.

Λήμμα 3.2.12. *Εστω f ένας κανονικός ομοιομορφισμός της S^2 που διατηρεί τον προσανατολισμό και $G = cl_{H(S^2)}\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Αν d είναι μια οποιαδήποτε μετρική συμβατή με την τοπολογία της S^2, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, ώστε αν $d(x, y) < \delta$ τότε $d_H(G(x), G(y)) < \varepsilon$, όπου d_H είναι η μετρική Hausdorff στο σύνολο των μη - κενών, συμπαγών υποσυνόλων της S^2.*

Απόδειξη. Λόγω της ισοσυνέχειας της οικογένειας $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$, έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $d(x, y) < \delta$ τότε $d(g(x), g(y)) < \varepsilon$ για κάθε $g \in G$. Ομως

$$d(g(x), G(y)) < d(g(x), g(y)) < \varepsilon$$

για κάθε $g \in G$. Επομένως

$$\sup_{g \in G} d(g(x), G(y)) < \varepsilon.$$

Εντελώς συμμετρικά προκύπτει ότι

$$\sup_{g \in G} d(g(y), G(x)) < \varepsilon.$$

Αρα

$$d_H(G(x), G(y)) = \max\{\sup_{g \in G} d(g(x), G(y), \sup_{g \in G} d(g(y), G(x))\} < \varepsilon.$$

□

Λήμμα 3.2.13. *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε αν x, y είναι διαφορετικά σημεία με $d(x,y) < \delta$ και $G(x) < G(y)$, αυτά μπορούν να συνδεθούν με μια μονότονη μ - αλυσίδα διαμέτρου μικρότερης από ε, για κάθε $\mu > 0$.*

Απόδειξη. Εστω $0 < \delta < \varepsilon$ όπως στο λήμμα 3.2.11 και $0 < \mu < \delta$. Εστω x, y δύο σημεία που βρίσκονται σε διαφορετικές G - τροχιές με $d(x,y) < \delta/2$. Σύμφωνα με το λήμμα 3.2.12, υπάρχει $\mu' > 0$, τέτοιο ώστε αν $d(x,y) < \mu'/3$ τότε

$$d_H(G(x), G(y)) < \mu/3.$$

Λόγω συνεκτικότητας της S^2, υπάρχει $\mu'/3$ - αλυσίδα $\{x = \overline{x}_0, \overline{x}_1, ..., \overline{x}_n = y\}$ με $0 < d(\overline{x}_i, \overline{x}_{i+1}) < \mu'/3$, συνεπώς

$$d_H(G(\overline{x}_i), G(\overline{x}_{i+1})) < \mu/3,\ i = 0, ..., n-1.$$

Αφού κάθε G - τροχιά διαχωρίζει τα σημεία N, S, τα σημεία $\overline{x}_i$, για $i = 0, ..., n$, ύστερα από κατάλληλη αναδιάταξη, μπορούν να επιλεγούν έτσι ώστε

$$G(x) < G(\overline{x}_1) < ... < G(y).$$

Εστω $\overline{xy}$ το γεωδαισιακό τόξο που συνδέει τα x, y, με μήκος μικρότερο από $\delta/2$. Λόγω συνεκτικότητας, το $\overline{xy}$ για κάθε $k \in \{1, ..., n\}$, τέμνει την απλή κλειστή καμπύλη $\gamma_k = G(\overline{x}_k)$ και επιλέγουμε ένα σημείο $x_k \in \gamma_k \cap \overline{xy}$. Αν τώρα για κάθε $k \in \{1, ..., n\}$ ισχύει $d(x_k, x_{k+1}) < \mu$, τότε η ακολουθία $\{x_1, ..., x_n\}$ είναι μ - μονότονη με διάμετρο μικρότερη από $\delta/2$.

Εστω ότι για κάποιο $r \in \{0, ..., n-1\}$ ισχύει $d(x_r, x_{r+1}) \geq \mu$. Εχουμε ότι

$$d(x_r, \gamma_{r+1}) \leq d_H(\gamma_r, \gamma_{r+1}) < \mu/3.$$

Από την συμπάγεια του γ_{r+1}, υπάρχει $x'_{r+1} \in \gamma_{r+1}$ ώστε $d(x_r, x'_{r+1}) < \mu/3$. Αρα

$$d(x_{r+1}, x'_{r+1}) \leq d(x_{r+1}, x_r) + d(x_r, x'_{r+1}) < \delta/2 + \mu/3 < \delta.$$

Σύμφωνα με το λήμμα 3.2.10, ένα από τα τόξα στην γ_{r+1} με σύνορο τα σημεία x_{r+1}, x'_{r+1} έχει διάμετρο μικρότερη από ε. Διαιρούμε αυτό το τόξο σε $s \in \mathbb{N}$ μικρότερα τόξα, διαμέτρου το καθένα μικρότερης από $\mu/3$ και συμβολίζουμε τα σύνορα αυτών με

$$x'_{r+1} = z^0_{r+1}, z^1_{r+1}, ..., z^s_{r+1} = x_{r+1}.$$

Επιλέγουμε s στο πλήθος G - τροχιές $\gamma^i,\ i = 0, ..., s$ τέτοιες ώστε

$$\gamma_r = G(x_r) = \gamma^0 < \gamma^1 < ... < \gamma^s = G(x_{r+1}) = \gamma_{r+1}$$

Τότε

$$d_H(\gamma^k, G(x_{r+1})) < \mu/3,\quad k \in \{1, ..., s-1\},$$

διότι

$$d_H(G(x_r), G(x_{r+1})) < \mu/3.$$

Ακόμη ισχύει

$$d(z_{r+1}^k, \gamma^k) < d_H(\gamma^k, G(x_{r+1})) < \mu/3, \ \ k \in \{1, ..., s-1\}.$$

Από την συμπάγεια της γ^k, υπάρχει σημείο x_{r+1}^k επί της γ^k, ώστε

$$d(x_{r+1}^k, z_{r+1}^k) < \mu/3.$$

Αρα η ακολουθία

$$x_{r+1}^0 = x_r, x_{r+1}^1, ..., z_{r+1}^s = x_{r+1}$$

είναι μια μονότονη μ - ακολουθία διότι,

$$d(x_{r+1}^k, x_{r+1}^{k+1}) \leq d(x_{r+1}^k, z_{r+1}^k) + d(z_{r+1}^k, x_{r+1}^{k+1}) < \mu/3 + 2\mu/3 = \mu$$

Ενώνοντας την παραπάνω μ - αλυσίδα με την υπόλοιπη, παίρνουμε τελικά μια μονότονη μ - αλυσίδα από το x στο y διαμέτρου $4\varepsilon + \delta/2$. □

Λήμμα 3.2.14. *Για κάθε δύο διαφορετικά σημεία x, y με $G(x) \cap G(y) = \emptyset$, υπάρχει ένα απλό τόξο που τα συνδέει και τέμνει κάθε G - τροχιά, το πολύ σε ένα σημείο.*

Απόδειξη. Από το λήμμα 3.2.13 επιλέγουμε ακολουθία $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θετικών μη μηδενικών όρων τέτοια ώστε, κάθε δύο σημεία x, y με $d(x, y) < \delta_n$, να μπορούν να ενωθούν για κάθε $\mu > 0$, με μονότονη μ - αλυσίδα διαμέτρου μικρότερης από $1/2^n$.

Θα κατασκευάσουμε επαγωγικά μια ακολουθία $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, της οποίας ο n - όρος είναι μια μονότονη δ_n - αλυσίδα, διαμέτρου μικρότερης από $1/2^n$.

Αρχίζουμε κατασκευάζοντας την μονότονη δ_0 - αλυσίδα X_0 από το x στο y σύμφωνα με το λήμμα 3.2.13. Αν έχει κατασκευαστεί η μονότονη δ_n - αλυσίδα $\{x_0^n, x_1^n, ..., x_m^n\}$, τότε κάθε συνεχόμενο ζεύγος $\{x_k^n, x_{k+1}^n\}$ της X_n, μπορεί να συνδενθεί με μονότονη δ_{n+1} - αλυσίδα διαμέτρου μικρότερης από $1/2^{n+1}$. Ετσι με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε τελικά την μονότονη δ_{n+1} - αλυσίδα X_{n+1} από το x στο y, που μάλιστα περιέχει την X_n.

Θεωρούμε το σύνολο

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

Από το θεώρημα 2-27 του [6], προκύπτει ότι η κλειστότητα $\overline{X}$του X στην S^2 είναι απλό κλειστό τόξο από το x στο y. Θα δείξουμε ότι το $\overline{X}$, τέμνει το πολύ σε ένα σημείο κάθε G - τροχιά.

Πράγματι αν $x, y \in \overline{X}$ και $x \neq y$, τότε λόγω της μονοτονίας υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $z \in X_n$ ώστε $G(x) < G(z) < G(y)$ ή $G(y) < G(z) < G(x)$. Κατά συνέπεια, $G(x) \cap G(y) = \emptyset$. □

Θεώρημα 3.2.15. *Ενας κανονικός ομοιομορφισμός $f : S^2 \to S^2$ που διατηρεί τον προσανατολισμό είναι τοπολογικά συζυγής με στροφή.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε ένα απλό τόξο όπως στο λήμμα 3.2.14 από το N στο S και έστω

$$x(r), \ \ r \in [0, \infty]$$

μια παραμετρικοποίηση του απλού τόξου με $x(\infty) = N, \ \ x(0) = S$.

Η ευκλείδεια στροφή κατά γωνία a, γύρω από τον z - άξονα είναι η απεικόνιση

$$R : S^2 \to S^2, \ \ R(z) = ze^{ia}, \ \ R(\infty) = \infty.$$

Θεωρούμε έναν συνεχή ισομορφισμό $\phi : S^1 \to G$ και την συνεχή απεικόνιση $h : S^2 \to S^2$ με $h(re^{i\theta}) = E(\phi(e^{i\theta}), x(r))$, όπου E είναι η απεικόνιση εκτίμησης. Εχουμε τώρα $h \circ R_a(re^{i\theta}) = h(re^{i(\theta+a)}) = E(\phi(e^{i(\theta+a)}), x(r)) = E(\phi(e^{ia}) \circ \phi(e^{i\theta}), x(r))$ (αφού η ϕ είναι ομομορφισμός ομάδων). Το τελευταίο μέλος της ισότητας είναι ίσο με $E(\phi(e^{ia}), E(\phi(e^{i\theta}), x(r)))$ το οποίο είναι ίσο με $E(\phi(e^{ia}), h(re^{i\theta}))$. Με άλλα λόγια $E_{\phi(e^{ia})} \circ h = h \circ R_a$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Τέλος η h είναι προφανώς επί και 1 - 1, αφού το τόξο που επιλέξαμε από το N στο S τέμνει κάθε G - τροχιά σε ένα ακριβώς σημείο και η ϕ είναι ισομορφισμός. Αρα η h είναι τοπολογική συζυγία μεταξύ της G και της ομάδας των Ευκλειδείων στροφών γύρω από τον z - άξονα. □

3.3. Ομοιομορφισμοί με ολικά μη συνεκτικό ιδιάζων σύνολο

Εστω X ένας συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος και $f : X \to X$ ένας ομοιομορφισμός. Συμβολίζουμε με $\Sigma(f)$ την κλειστότητα του συνόλου των μη - κανονικών σημείων του f.

Πρόταση 3.3.1. *Το σύνολο $R = \{x \in X \setminus \Sigma(f) : x \in L(x, f)\}$ είναι ανοιχτό και κλειστό στο $X \setminus \Sigma(f)$.*

Απόδειξη. Εστω $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο R, ώστε $x_k \to x \in X \setminus \Sigma(f)$. Από την υπόθεση, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n_k > k$ ώστε $d(f^{n_k}(x_k), x_k) < \frac{1}{k}$. Κατά συνέπεια $f^{n_k}(x_k) \to x$ με $n_k \to +\infty$, άρα από το λήμμα 3.1.6, $x \in L(x, f)$. Επομένως το R είναι κλειστό στο $X \setminus \Sigma(f)$.

Αν $x \in R$ τότε $f^{n_k}(x) \to x$, όπου $n_k \to \pm\infty$. Το $X \setminus \Sigma(f)$ είναι ανοιχτό, συνεπώς υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\overline{B(x, \varepsilon)} \subset X \setminus \Sigma(f)$. Από την ισοσυνέχεια στο x υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $d(x, y) < \delta$ τότε $d(f^{n_k}(x), f^{n_k}(y)) < \varepsilon/2$. Ομως υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $k \geq k_0$ να ισχύει $d(f^{n_k}(x), x) < \varepsilon/2$. Αρα για κάθε $k \geq k_0$ και $y \in B(x, \delta)$ ισχύει $d(f^{n_k}(y), x) < \varepsilon$, δηλαδή $f^{n_k}(y) \in B(x, \varepsilon)$. Συνεπώς

$$\emptyset \neq L(y, f) \cap \overline{B(x, \varepsilon)} \subset L(y, f) \cap (X \setminus \Sigma(f)),$$

οπότε από το λήμμα 3.1.6 έχουμε $y \in L(y, f)$ για κάθε $y \in B(x, \delta)$. Αυτό δείχνει ότι το R είναι ανοιχτό στο $X \setminus \Sigma(f)$. □

Λήμμα 3.3.2. *Εστω $x \in X \setminus \Sigma(f)$. Αν $x \in L(x, f)$, τότε για κάθε περιοχή U του x, υπάρχει ένας ακέραιος $N \geq 0$ τέτοιος ώστε*

$$O(x, f) \subset \bigcup_{i=0}^{N} f^i(U).$$

Απόδειξη. Εστω $x \in X \setminus \Sigma(f)$ με $x \in L(x, f)$. Από το λήμμα 3.1.6 έχουμε $cl(O(x, f)) = L^+(x, f) = L^-(x, f)$. Το $X \setminus \Sigma(f)$ είναι ανοιχτό. Εστω U μια συμπαγής περιοχή U του x, τέτοια ώστε $x \in U \subset X \setminus \Sigma(f)$.

Εστω $V \subset U$ μια ανοιχτή περιοχή του x. Για κάθε $y \in L(x, f) \cap U$ ισχύει $f^{n_k}(x) \to y$, που $n_k \to -\infty$. Επειδή τα x, y είναι κανονικά, θα έχουμε $f^{-n_k}(y) \to x$, απ' το λήμμα 3.1.6. Υπάρχει τότε $n(y) > 0$, ώστε $f^{n(y)}(y) \in V$. Λόγω της συνέχειας του $f^{n(y)}$, υπάρχει ανοιχτή περιοχή V_y του y τέτοια ώστε

$$f^{n(y)}(V_y) \subset V \subset U.$$

Η οικογένεια $\{V_y : y \in L(x,f) \cap U\}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του συμπαγούς συνόλου $L(x,f) \cap U$. Συνεπώς υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{V_1, ..., V_r\}$ του $L(x,f) \cap U$, δηλαδή $L(x,f) \cap U \subset V_1 \cup ... \cup V_r$.

Σε κάθε $V_i,\ i = 1, ..., r$ αντιστοιχεί ένας θετικός ακέραιος n_i, τέτοιος ώστε $f^{n_i}(V_i) \subset V$. Αν $N = \max\{n_i : i \in \{1, ..., r\}\}$, τότε για κάθε $z \in L(x,f) \cap U$, υπάρχει $n \in \{0, 1, ..., N\}$ τέτοιο ώστε $f^n(z) \in V$.

Επειδή μπορούμε να κατασκευάσουμε μια αύξουσα ακολουθία $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ακεραίων με $m_i \to +\infty$, τέτοια ώστε $m_{i+1} - m_i \leq N$ και $f^{m_i}(x) \in V \subset U$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$O(x,f) \subset L^+(x,f) = cl(O^+(x,f)) \subset \bigcup_{i=0}^{N} f^i(U).$$

$\square$

Πόρισμα 3.3.3. *Εστω $x \in X \setminus \Sigma(f)$. Τότε $L(x,f) \cap \Sigma(f) \neq \emptyset$, αν και μόνο αν, $L(x,f) \subset \Sigma(f)$.*

Απόδειξη. Εστω $x \in X \setminus \Sigma(f)$ με $L(x,f) \not\subset \Sigma(f)$. Τότε από το λήμμα 3.1.6 έχουμε $x \in L(x,f)$. Από το λήμμα 3.3.2, για κάθε συμπαγή περιοχή $U \subset X \setminus \Sigma(f)$ του x, υπάρχει $N \geq 0$ τέτοιο ώστε

$$O(x,f) \subset \bigcup_{i=0}^{N} f^i(U) \subset X \setminus \Sigma(f).$$

Συνεπώς $L(x,f) \subset cl(O(x,f)) \subset X \setminus \Sigma(f)$, άρα $L(x,f) \cap \Sigma(f) = \emptyset$. $\square$

Εστω $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία μη κενών υποσυνόλων, ενός συμπαγούς μετρικοποιήσιμου χώρου X. Ορίζουμε ως $\liminf(A_n)$, το σύνολο των σημείων $x \in X$, έτσι ώστε κάθε περιοχή του $x \in X$ να έχει μη κενή τομή για όλα τα A_n, εκτός από πεπερασμένο πλήθος. Δηλαδή $x \in \liminf(A_n)$, αν και μόνο αν, υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_n \in A_n$, η οποία να συγκλίνει στο x.

Ως $\limsup(A_n)$, ορίζουμε το σύνολο των σημείων του X, για τα οποία κάθε περιοχή ενός τέτοιου σημείου, να έχει μη κενή τομή με τα A_n, για άπειρα $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή $x \in \limsup(A_n)$, αν και μόνο αν, υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_n \in A_n$, η οποία να έχει υποακολουθία που να συγκλίνει στο x.

Λήμμα 3.3.4. *Εστω X ένας συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία μη κενών συμπαγών, συνεκτικών υποσυνόλων του X, ώστε $\liminf A_n \neq \emptyset$. Τότε το $\limsup(A_n)$ είναι συμπαγές, συνεκτικό, μη κενό σύνολο.*

Απόδειξη. Προφανώς το $\limsup(A_n)$ είναι μη κενό και κλειστό υποσύνολο του X, άρα συμπαγές. Εστω ότι δεν είναι συνεκτικό. Τότε $\limsup(A_n) = A \cup B$, όπου τα A, B είναι μη κενά συμπαγή και $A \cap B = \emptyset$. Εστω $x \in A$ και $y \in B$. Επιλέγουμε μια ανοιχτή περιοχή U του A και μια ανοιχτή περιοχή V του B ώστε $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Αφού $\liminf(A_n) \neq \emptyset$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x \in \liminf(A_n)$. Υπάρχουν τώρα $x_n \in A_n$ ώστε $x_n \to x$. Επίσης υπάρχουν $n_k \to +\infty$ και $y_{n_k} \in A_{n_k}$ ώστε $y_{n_k} \to y$. Συνεπώς υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_{n_k} \in U$ και $y_{n_k} \in V$ για κάθε $k \geq k_0$. Συμπεραίνουμε τώρα ότι $A_{n_k} \cap \partial U \neq \emptyset$, αφού το A_{n_k} είναι συνεκτικό για κάθε $k \geq k_0$. Εστω $z_{n_k} \in A_{n_k} \cap \partial U$. Λόγω της συμπάγειας, η ακολουθία $(z_{n_k})_{k\geq k_0}$ έχει τουλάχιστον ένα οριακό σημείο $z \in \partial U$. Προφανώς τότε $z \in \limsup(A_n)$ και $z \notin A \cup B$, που είναι αντίφαση. $\square$

Για την απόδειξη του παρακάτω λήμματος παραπέμπουμε στο [7], Th.4, Ch.12.

Λήμμα 3.3.5. *Εστω C ένα ολικά μη συνεκτικό συμπαγές υποσύνολο μετρικού χώρου και $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχουν ξένα μεταξύ τους κλειστά σύνολα με $diam(G_i) < \varepsilon$, για κάθε $i = 1, ..., n$, ώστε $C = G_1 \cup ... \cup G_n$.*

Πόρισμα 3.3.6. *Αν C είναι ένα ολικά μη συνεκτικό συμπαγές, γνήσιο υποσύνολο ενός συμπαγούς μετρικοποιήσιμου μετρικού χώρου X, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή U του C, $U \neq X$, η οποία είναι ένωση από ξένα μεταξύ τους ανοιχτά σύνολα, το καθένα διαμέτρου μικρότερης από ε.*

Απόδειξη. Εστω $C = G_1 \cup ... \cup G_n$ με $diam(G_i) < \varepsilon/3$ και τα G_i, $i = 1, ..., n$, είναι συμπαγή και ξένα μεταξύ τους. Τότε

$$G_1 \cap (\bigcup_{i=2}^{n} G_i) = \emptyset.$$

Επειδή το G_1 είναι συμπαγές υπάρχει $0 < \delta < \varepsilon/3$ ώστε

$$0 < \delta < \inf_{x \in G_1} d(x, \bigcup_{i=2}^{n} G_i)$$

και υπάρχουν $x_1, ..., x_m \in G_1$ ώστε αν

$$U_1 = \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \delta),$$

τότε $G_1 \subset \overline{U}_1$. Προφανώς $diam U_1 < \delta + \varepsilon/3 + \delta < \varepsilon$ και

$$\overline{U}_1 \cap (\bigcup_{i=2}^{n} G_i) = \emptyset.$$

Ομοια, παίρνοντας το $\overline{U}_1$ στην θέση του G_1 βρίσκουμε ένα ανοιχτό σύνολο U_2 με $G_2 \subset U_2$, $diam U_2 < \varepsilon$ και τέτοιο ώστε το $\overline{U}_2$ να είναι ξένο προς τα $\overline{U}_1, G_3, ..., G_n$. Επαγωγικά λοιπόν φτάνουμε στο αποτέλεσμα. $\square$

Θεώρημα 3.3.7. *Εστω X ένας συμπαγής, τοπικά συνεκτικός, μετρικοποιήσιμος χώρος και $f : X \to X$ ένας ομοιομορφισμός, τέτοιος ώστε το $\Sigma(f)$ να είναι ολικά μη συνεκτικό. Τότε:*
(1) Για κάθε $s \in \Sigma(f)$, το οποίο δεν είναι κανονικό σημείο, υπάρχει $x \in X \setminus \Sigma(f)$ τέτοιο ώστε το s να ανήκει στο οριακό σύνολο $L(x, f)$ του x.
(2) Για κάθε $x_0 \in X \setminus \Sigma(f)$ και για κάθε ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ του $\mathbb{Z}$, τέτοια ώστε $\lim f^{n_k}(x_0) = s \in \Sigma(f)$, η ακολουθία συναρτήσεων $(f^{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$, συγκλίνει ομοιόμορφα στο s, σε μια περιοχή U του x_0 και το σύνολο

$$E_s = \{x \in X \setminus \Sigma(f) : \lim f^{n_k}(x) = s\}$$

είναι ανοιχτό και κλειστό στο $X \setminus \Sigma(f)$.

Απόδειξη. (1) Εστω $s \in \Sigma(f)$ ένα σημείο το οποίο δεν είναι κανονικό. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ και ακολουθίες $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ του X, με $z_p \to s$ και $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ του $\mathbb{Z}$, τέτοιες ώστε $d(f^{n_p}(z_p), f^{n_p}(s)) \geq \varepsilon$, για κάθε $p \in \mathbb{N}$.

Το $\Sigma(f)$ είναι γνήσιο υποσύνολο του X. Διαφορετικά αν $X = \Sigma(f)$, τότε το $\Sigma(f)$ είναι τοπικά συνεκτικό, ολικά μη συνεκτικό συμπαγές σύνολο. Συνεπώς από το λήμμα 3.3.5, υπάρχουν ξένα μεταξύ τους συμπαγή σύνολα $K_1, ..., K_r$ τέτοια ώστε να ισχύει $\Sigma(f) = K_1 \cup ... \cup K_r$. Κάθε K_i είναι ταυτόχρονα και ανοιχτό στο $\Sigma(f)$. Αρα οι συνεκτικές συνιστώσες του K_i είναι ανοιχτά και κλειστά υποσύνολα του $\Sigma(f)$, αφού ο $\Sigma(f)$ είναι τοπικά συνεκτικός. Λόγω της συμπάγειας του $\Sigma(f)$, υπάρχουν κατά συνέπεια ξένα μεταξύ τους συμπαγή και συνεκτικά σύνολα $K_1', ..., K_l'$, τέτοια ώστε να ισχύει $\Sigma(f) = K_1' \cup ... \cup K_l'$. Αφού ο $\Sigma(f)$ είναι ολικά μη συνεκτικός κάθε K_i' είναι μονοσύνολο. Συνεπώς το $X = \Sigma(f)$ θα είναι πεπερασμένο, άρα $X = \Sigma(f) = \emptyset$.

Ετσι το $\Sigma(f)$ είναι συμπαγές, ολικά μη συνεκτικό, γνήσιο υποσύνολο του X. Από το πόρισμα 3.3.6 υπάρχει περιοχή U του $\Sigma(f)$ με $U \neq X$, η οποία είναι ένωση από ξένα μεταξύ τους ανοιχτά σύνολα, διαμέτρου μικρότερης από ε. Αν

$$K = cl(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(X \setminus U))$$

τότε $X \setminus U \subset K$, άρα $X \setminus K \subset U$. Αφού ο X είναι τοπικά συνεκτικός, οι συνεκτικές συνιστώσες του $X \setminus K$ είναι ανοιχτά σύνολα, με διάμετρο μικρότερη από ε. Εστω ότι $s \notin K$. Τότε το s ανήκει σε συνεκτική συνιστώσα C του $X \setminus K$ και το C είναι ανοιχτό. Αρα υπάρχει περιοχή V του s, τέτοια ώστε $s \in V \subset C \subset X \setminus K$.

Επειδή $z_p \to s$, για μεγάλο p, τα σημεία z_p και s θα βρίσκονται στο V, επομένως για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ τα $f^n(z_p), f^n(s)$ θα βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $X \setminus K$, άρα θα ισχύει $d(f^n(z_p), f^n(s)) < \varepsilon$. Αυτό αντιφάσκει με την υπόθεση, άρα $s \in K \subset X \setminus U$. Συνεπώς υπάρχουν ακολουθίες $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ του $X \setminus U$ και $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ του $\mathbb{Z}$, τέτοιες ώστε $f^{n_i}(x_i) \to s$.

Το $X \setminus U$ είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς X, άρα είναι συμπαγές. Η ακολουθία τότε $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, την οποία θεωρούμε ως την ίδια. Ετσι $x_i \to x \in X \setminus U$. Από το λήμμα 3.1.6 έχουμε $f^{n_i}(x) \to s$ άρα $s \in L(x, f)$.

(2) Εστω $x_0 \in X \setminus \Sigma(f)$ και $f^{n_k}(x_0) \to s \in \Sigma(f)$. Εστω ότι $x_0 \in L^+(x_0, f)$. Τότε $L^+(x_0, f) \not\subset \Sigma(f)$, αφού $x_0 \notin \Sigma(f)$. Κατα συνέπεια από το πόρισμα 3.3.4 έχουμε $L(x_0, f) \cap \Sigma(f) = \emptyset$, που αποτελεί αντίφαση, επομένως $x_0 \notin L^+(x_0, f)$. Ομοια δείχνουμε ότι $x_0 \notin L^-(x, f)$, άρα $x_0 \notin R = \{X \setminus \Sigma(f) : x \in L(x, f)\}$.

Από την πρόταση 3.3.1, το R είναι ανοιχτό και κλειστό στο $X \setminus \Sigma(f)$, άρα το $X \setminus R$ είναι ανοιχτό στο $X \setminus \Sigma(f)$. Επομένως υπάρχει V ανοιχτή περιοχή του $x_0 \in X \setminus R$ ώστε

$$V \subset X \setminus R \subset X \setminus \Sigma(f) \subset X.$$

Επειδή ο X είναι τοπικά συνεκτικός, υπάρχει συμπαγής και συνεκτική περιοχή U του x_0, τέτοια ώστε

$$x_0 \in intU \subset U \subset V$$

δηλαδή $x \notin L(x, f)$, για κάθε $x \in U$. Για την ακολουθία των συμπαγών, συνεκτικών συνόλων $(f^{n_k}(U))_{k\in\mathbb{N}}$ έχουμε ότι $s \in \liminf(f^{n_k}(U))$. Συνεπώς από το λήμμα 3.3.4 το $\limsup(f^{n_k}(U))$ είναι συμπαγές και συνεκτικό σύνολο.

Αν το $\limsup(f^{n_k}(U))$ περιέχει κάποιο σημείο $y \in X \setminus \Sigma(f)$, θα υπάρχει ακολουθία $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{Z}$ και ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ του U, έτσι ώστε $f^{m_k}(x_k) \to y$. Λόγω της συμπάγειας του U, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $x_k \to x \in U$. Από το λήμμα 3.1.6

έχουμε $f^{m_k}(x) \to y$, άρα $y \in L(x,f)$. Δηλαδή το $L(x,f)$ περιέχει κανονικό σημείο, άρα από το λήμμα 3.1.6 θα πρέπει $x \in L(x,f)$, αντίφαση με το ότι $x \in U$.

Αρα $\limsup f^{n_k}(U) \subset \Sigma(f)$ και λόγω της ολικής μη συνεκτικότητας του $\Sigma(f)$ προκύπτει ότι $\limsup f^{n_k}(U) = \{s\}$. Αυτό δείχνει ότι $U \subset E_s$, άρα το E_s είναι ανοιχτό στο $X \setminus \Sigma(f)$ και $f^{n_k}(x) \to s$ ομοιόμορφα για κάθε $x \in U$.

Εστω τώρα $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ακολουθία του E_s, με $x_i \to x$. Τότε για κάθε $i \in \mathbb{N}$ έχουμε $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x_i) = s$ και συνεπώς υπάρχει υπακολουθία $(x_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ της $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, ώστε

$$\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x_{i_k}) = s.$$

Από το λήμμα 3.1.6 συνεπάγεται ότι $f^{n_k}(x) \to s$, άρα $x \in E_s$, αφού $x \in X \setminus \Sigma(f)$. Αυτό δείχνει ότι το E_s είναι κλειστό στο $X \setminus \Sigma(f)$. □

Πόρισμα 3.3.8. *Εστω f ένας ομοιομορφισμός μιας συμπαγούς και συνεκτικής τοπολογικής πολλαπλότητας M, διάστασης ≥ 2. Αν το $\Sigma(f)$ είναι ολικά μη συνεκτικό, τότε έχει πληθάριθμο ≤ 2.*

Απόδειξη. Εστω ότι το $\Sigma(f)$ είναι μη κενό και $s \in \Sigma(f)$, ένα μη κανονικό σημείο. Από το θεώρημα 3.3.7 υπάρχει $x_0 \in M \setminus \Sigma(f)$, τέτοιο ώστε $s \in L(x_0, f)$. Ας υποθέσουμε ότι $s \in L^+(x_0, f)$. Τότε υπάρχει ακολουθία $n_k \to +\infty$, τέτοια ώστε $f^{n_k}(x_0) \to s$.

Από το θεώρημα 3.3.7 το σύνολο $E_s = \{x \in M \setminus \Sigma(f) : \lim f^{n_k}(x) = s\}$ είναι ανοιχτό και κλειστό στο $M \setminus \Sigma(f)$ και η σύγκλιση $f^{n_k}(x) \to s$, είναι ομοιόμορφη σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του E_s. Το $M \setminus \Sigma(f)$ είναι συνεκτικό σύνολο αφού η M είναι συνεκτική και έχει διάσταση ≥ 2.

Ομως $E_s \subset M \setminus \Sigma(f)$, άρα $E_s = M \setminus \Sigma(f)$. Επίσης ισχύει $L(x,f) \cap \Sigma(f) \neq \emptyset$, διότι $s \in \Sigma(f)$ και $s \in L(x,f)$, συνεπώς από το πόρισμα 3.3.3 θα έχουμε τελικά $\{s\} \subset L(x,f) \subset \Sigma(f)$, για κάθε $x \in M \setminus \Sigma(f)$. Επειδή το σύνολο $M \setminus \Sigma(f)$ είναι συνεκτικό και κάθε $y \in M \setminus \Sigma(f)$ έχει κατά τόξα συνεκτική περιοχή, το $M \setminus \Sigma(f)$ είναι κατά τόξα συνεκτικό (βλ. [5], Th.5.5, σελ. 116.)

Εστω a ένα τόξο που συνδέει τα σημεία x και $f(x)$ στο $M \setminus \Sigma(f)$. Τότε το σύνολο

$$\limsup(f^n(a([0,1]))) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{k\geq n} f^k(a([0,1]))}$$

είναι μη κενό, συμπαγές, συνεκτικό, και βρίσκεται ολόκληρο στο $\Sigma(f)$. Διαφορετικά αν δεν ισχύει αυτό, θα υπάρχουν ακολουθίες $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ του $\mathbb{Z}$ και $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ του $[0,1]$, ώστε $f^{n_k}(a(t_k)) \to y \notin \Sigma(f)$, όταν $k \to +\infty$.

Λόγω της συμπάγειας του $[0,1]$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $t_k \to t_0$ για κάποιο $t_0 \in [0,1]$ και ότι $a(t_k) \to a(t_0)$, επομένως από το λήμμα 3.1.6 θα έχουμε $f^{n_k}(a(t_0)) \to y$, άρα $y \in L(a(t_0), f)$ με $a(t_0) \in M \setminus \Sigma(f)$ οπότε $L(a(t_0), f) \not\subset \Sigma(f)$, άτοπο.

Αφού $s \in \limsup(f^n(a([0,1])) \subset \Sigma(f)$ και το $\Sigma(f)$ είναι ολικά μη συνεκτικό, τότε $\{s\} = \limsup(f^n(a([0,1]))$ και $L^+(x,f) = \{s\}$ για κάθε $x \in M \setminus \Sigma(f)$. Αν το $\Sigma(f)$ περιέχει και άλλο μη κανονικό σημείο $s' \neq s$, τότε $L^-(x,f) = s'$, για κάθε $x \in M \setminus \Sigma(f)$.

Πράγματι, αν $s' \neq s$ με $s' \in \Sigma(f)$ τότε υπάρχει $x_0' \in M \setminus \Sigma(f)$, τέτοιο ώστε $s' \in L(x_0', f) = \{s\} \cup L^-(x_0', f)$. Αρα $s' \in L^-(x_0', f)$, αφού $L^+(x,f) = \{s\}$ για κάθε $x \in M \setminus \Sigma(f)$. Συνεπώς το $\Sigma(f)$ δεν μπορεί να περιέχει περισσότερα από δύο σημεία. □

3.4. Σύμμορφοι αυτομορφισμοί της S^2

Υπενθυμίζουμε ότι κάθε σύμμορφος αυτομορφισμός της σφαίρας του Riemann μπορεί να εκφρασθεί σαν ένας ρητός γραμμικός μετασχηματισμός

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

όπου οι συντελεστές είναι μιγαδικοί αριθμοί και ικανοποιούν την συνθήκη $ad-bc \neq 0$. Κάθε μη ταυτοτικός αυτομορφισμός αυτού του τύπου έχει δύο διαφορετικά σταθερά σημεία ή ένα διπλό σταθερό σημείο στην σφαίρα του Riemann. Οι μη ταυτοτικοί αυτομορφισμοί της σφαίρας του Riemann χωρίζονται στις παρακάτω τρείς κατηγορίες:
(α) Ενας αυτομορφισμός f λέγεται *ελλειπτικός*, αν έχει δύο διαφορετικά σταθερά σημεία και το μέτρο της παραγώγου είναι 1.
(β) Ενας αυτομορφισμός f λέγεται *υπερβολικός*, αν έχει δύο διαφορετικά σταθερά σημεία και το μέτρο της παραγώγου είναι διαφορετικό από 1.
(γ) Ο αυτομορφισμός f λέγεται *παραβολικός*, αν έχει ακριβώς ένα διπλό σταθερό σημείο.

Ως προς τοπολογική συζυγία υπάρχει ένας μόνο παραβολικός αυτομορφισμός, ο οποίος είναι η μεταφορά $T(z) = z+1$. Επίσης ο μετασχηματισμός $V(z) = 2z$ είναι ο μοναδικός υπερβολικός αυτομορφισμός. Τέλος υπάρχει μια μονοπαραμετρική οικογένεια ελλειπτικών αυτομορφισμών $R_a(z) = e^{ia}z$, οι οποίοι δεν είναι τοπολογικά συζυγείς μεταξύ τους.

Θεώρημα 3.4.1. *Ενας ομοιομορφισμός $f : S^2 \to S^2$, που διατηρεί τον προσανατολισμό και ο οποίος έχει ακριβώς ένα μη κανονικό σημείο, είναι τοπολογικά συζυγής με την απεικόνιση $T : S^2 \to S^2$, με $T(z) = z+1$, $z \in \mathbb{C}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι $\Sigma(f) = \{N\}$. Προφανώς το N είναι σταθερό σημείο του f. Από την απόδειξη του πορίσματος 3.3.8 έχουμε ότι $L^+(x,f) = L^-(x,f) = \{N\}$, για κάθε $x \in S^2$. Επίσης, από το ίδιο πόρισμα, η ακολουθία συναρτήσεων $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο N, σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $X = S^2 \setminus \{N\}$.

Αν υπήρχε σημείο $x_0 \in X$ και $n_0 \in \mathbb{Z}$ ώστε $f^{n_0}(x_0) = x_0$, τότε το x_0 θα ήταν n_0 - περιοδικό σημείο, γεγονός που αντιφάσκει με το ότι $f^n(x_0) \to N$. Συνεπώς η ομάδα $G = < f >$, δρα ελεύθερα επί του X. Θα δείξουμε ότι η G δρα γνήσια ασυνεχώς επί του X.

Εστω $x \in X$. Υπάρχουν συμπαγείς περιοχές U του x και V του N ώστε $U \cap V = \emptyset$. Από την ομοιόμορφη σύγκλιση της $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ στα συμπαγή υποσύνολα του X, για κάθε $\varepsilon > 0$ με $B(N,\varepsilon) \subset V$, υπάρχει $n_0 = n_0(U,\varepsilon)$ ώστε $f^n(U) \subset B(N,\varepsilon) \subset V$, για κάθε $|n| \geq n_0$. Επίσης υπάρχουν συμπαγείς περιοχές $U_1, ..., U_{n_0}$ του x, τέτοιες ώστε $f^i(U_i) \cap U_i = \emptyset$ για $1 \leq |i| \leq n_0$. Επομένως για κάθε $x \in X$, υπάρχει η περιοχή

$$U_x = \bigcap_{i=0}^{n_0} U_i^\circ \cap U^\circ$$

ώστε $f^n(U_x) \cap U_x = \emptyset$, για κάθε $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Επειδή το X είναι κατά τόξα συνεκτικό και επειδή η G δρα ελεύθερα και γνήσια ασυνεχώς επί του X, η φυσική προβολή

$$\pi : X \to X/G$$

είναι απεικόνιση επικάλυψης του X/G και ο X είναι κανονικός χώρος επικάλυψης. Το $X \approx \mathbb{R}^2$ είναι απλά συνεκτικό και η G είναι η ομάδα των αυτομορφισμών της π, που είναι η καθολική επικάλυψη του X, άρα

$$\mathbb{Z} \cong G \cong \pi_1(X/G, x_0).$$

Συνεπώς ο χώρος X/G είναι ομοιομορφικός με τον κύλινδρο $S^1 \times \mathbb{R}$. Εστω τώρα $\widetilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$.

Ο κύλινδρος έχει καθολικό χώρο επικάλυψης τον $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ με απεικόνιση επικάλυψης την $\rho = \exp \times id$. Επίσης ο X είναι καθολικός χώρος επικάλυψης του X/G, διότι ο X είναι απλά συνεκτικός. Από την μοναδικότητα του καθολικού χώρου επικάλυψης, υπάρχουν ομοιομορφισμοί h, H ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} (X, \widetilde{x}_0) & \xrightarrow{H} & (\mathbb{R}\times\mathbb{R}, (0,0)) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \rho \\ (X/G, x_0) & \xrightarrow{h} & (S^1 \times \mathbb{R}, (1,0)) \end{array}$$

Εχουμε τώρα $H(f(\widetilde{x}_0)) = (1,0)$, αφού ο f είναι ο γεννήτορας της G και ο γεννήτορας των αυτομορφισμών της ρ είναι η απεικόνιση $(x,y) \mapsto (x+1,y)$. Επομένως $H(f(\widetilde{x}_0)) = H(\widetilde{x}_0) + (1,0)$. Αν $p_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, είναι η προβολή στην πρώτη συντεταγμένη, η τελευταία ισότητα γράφεται

$$p_1(H(f(\widetilde{x}_0)) - H(\widetilde{x}_0)) = 1.$$

Για κάθε $x \in X$ ισχύει $\pi(x) = \pi(f(x))$ άρα $h(\pi(x)) = h(\pi(f(x)))$ οπότε έχουμε, $H(f(x)) = H(x) + (k,0)$, ισοδύναμα $p_1(H(f(x)) - H(x)) = k$, για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$.

Επειδή η συνάρτηση $F : X \to \mathbb{Z}$ με $F(x) = p_1(H(f(x)) - H(x))$, είναι συνεχής επί του συνεκτικού X και επειδή $F(x_0) = 1$, θα πρέπει να ισχύει $F(x) = 1$ για κάθε $x \in X$. Αρα $H(f(x)) = H(x) + (1,0)$ για κάθε $x \in X$ ή ισοδύναμα

$$H(f(x)) = T(H(x)),$$

όπου $T(z) = z + 1$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Επίσης αν θέσουμε $H(N) = \infty$, τότε προφανώς $H(f(N)) = H(N) = \infty = T(\infty) = T(H(N))$ και ο $H : S^2 \to S^2$ είναι ομοιομορφισμός.

Αρα $f = H^{-1} \circ T \circ H$, δηλαδή ο f είναι τοπολογικά συζυγής με την T. □

Θεώρημα 3.4.2. *Ενας ομοιομορφισμός $f : S^2 \to S^2$, που διατηρεί τον προσανατολισμό και ο οποίος έχει ακριβώς δύο μη κανονικά σημεία, είναι τοπολογικά συζυγής με την απεικόνιση $V : S^2 \to S^2$ με $V(z) = 2z$, $z \in \mathbb{C}$.*

Απόδειξη. Εστω N, S τα δύο μη κανονικά σημεία. Τότε $\Sigma(f) = \{N, S\}$ και από την απόδειξη του πορίσματος 3.3.8 θα έχουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} f^n(x) = N$ και $\lim_{n\to-\infty} f^n(x) = S$, ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $X = S^2 \setminus \Sigma(f)$. Ακριβώς όπως στο θεώρημα 3.4.1, η ομάδα $< f >$ δρα ελεύθερα και γνήσια ασυνεχώς επί του κυλίνδρου X.

Ο X είναι κατά τόξα συνεκτικός και το ζεύγος (X, π), όπου $\pi : X \to X/ < f >$ είναι η φυσική προβολή, αποτελεί καθολικό χώρο επικάλυψης του X/f. Επειδή ο f διατηρεί τον προσανατολισμό, ο $X/ < f >$ είναι προσανατολίσιμη τοπολογική επιφάνεια.

Εστω $\gamma \subset X$ μια απλή κλειστή καμπύλη, που διαχωρίζει τα σημεία N, S. Αφού $f^n(\gamma) \to N$, υπάρχει $n \geq 2$ ώστε $f^n(\gamma) \cap \gamma = \emptyset$. Οι απλές κλειστές καμπύλες $f^n(\gamma), \gamma$ είναι δύο τεμνόμενες και μη ομοτοπικές με σταθερά, συνεπώς αποτελούν σύνορο ενός κλειστού δακτυλίου A του κυλίνδρου X.

Το σύνολο

$$B = intA \cap f^{-n}(S^2 \setminus A)$$

είναι ανοιχτό και κλειστό στο A. Επειδή ο f διατηρεί τον προσανατολισμό, υπάρχουν σημεία του $intA$ που η εικόνα τους μέσω του f^n, βρίσκεται στο $S^2 \setminus A$. Αρα το σύνολο B είναι μη κενό, συνεπώς λόγω της συνεκτικότητας του $intA$ θα πρέπει να ισχύει $intA = B$. Αυτό σημαίνει ότι

$$X/ < f^n > \approx T^2.$$

Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $p : X/ < f^n > \to X/ < f >$ με $p([x]_{f^n}) = [x]_f$, είναι απεικόνιση επικάλυψης του $X/ < f >$.

Η $g : X/ < f^n > \to X/ < f^n >$ με $g([x]_{f^n}) = [f(x)]_{f^n}$ είναι ομοιομορφισμός. Αν υπάρχει g - σταθερό σημείο $[x]_{f^n}$, τότε

$$[f(x)]_{f^n} = [x]_{f^n},$$

άρα $f^{kn}(x) = f(x)$, για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$, άρα $f^{kn-1}(x) = x$. Ατοπο.

Επομένως η g δεν έχει σταθερό σημείο και επειδή $g^n = id$, η ομάδα $< g > \cong \mathbb{Z}_n$ δρα γνήσια ασυνεχώς επί του $X/ < f^n >$. Συνεπώς ο $X/ < f^n >$ είναι κανονικός χώρος επικάλυψης του $X/ < f^n > / < g >$ με απεικόνιση κάλυψης την φυσική προβολή

$$\pi : X/ < f^n > \to X/ < f^n > / < g > .$$

Η απεικόνιση $P : X/ < f^n > / < g > \to X/f$ με $P \circ \pi = p$, ορίζεται καλά, είναι συνεχής και επί. Εστω $P([[x]_{f^n}]_g) = P([[y]_{f^n}]_g)$. Τότε $y = f^k(x)$, για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$. Υπάρχουν $q \in \mathbb{Z}$ και $r \in [0, n)$ ώστε $k = qn + r$, επομένως $y = f^{qn+r}(x) = f^{nq}(f^r(x))$ άρα

$$[y]_{f^n} = [f^r(x)]_{f^n} = g^r([x]_{f^n})$$

επομένως

$$[[x]_{f^n}]_g = [[y]_{f^n}]_g.$$

Αρα η P είναι ένα προς ένα και συνεπώς ομοιομορφισμός λόγω της συμπάγειας. Επομένως η p είναι απεικόνιση επικάλυψης. Από την πρόταση του [3], Ch.4, Th. 13.5, έχουμε ότι

$$0 = \chi(X/ < f^n >) = n\chi(X/ < f >).$$

Αρα $\chi(X/ < f >) = 0$, δηλαδή ο $X/ < f >$ είναι ομοιόμορφος με τον τόρο T^2 ή την φιάλη του Klein. Ομως ο $X/ < f >$ είναι προσανατολίσιμη τοπολογική επιφάνεια, συνεπώς είναι ομοιόμορφος με τον τόρο T^2.

Επειδή η μοναδική, ως προς ισομορφισμό, απεικόνιση επικάλυψης του T^2 με ομάδα αυτομορφισμών $\mathbb{Z}$ είναι η $id \times \exp : S^1 \times \mathbb{R} \to T^2$ υπάρχουν ομοιομορφισμοί h, H που καθιστούν το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} (X, \widetilde{x}_0) & \xrightarrow{H} & (S^1 \times \mathbb{R}, (1,0)) \\ \pi \downarrow & & \downarrow id \times \exp \\ (X/ < f >, x_0) & \xrightarrow{h} & (S^1 \times S^1, (1,1)) \end{array}$$

Αν $p_1 : S^1 \times \mathbb{R} \to S^1$ και $p_2 : S^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, είναι οι προβολές στην πρώτη και δεύτερη συντεταγμένη αντίστοιχα, τότε

$$H(f(\widetilde{x}_0)) = (p_1(H((\widetilde{x}_0)), p_2(H(\widetilde{x}_0)) + 1),$$

άρα

$$p_2(H(f(\widetilde{x_0})) - H(\widetilde{x_0})) = 1.$$

Αν $x \in X$ τότε $p_2(H(f(x)) - H(x)) = k$, για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$.

Επειδή η συνάρτηση $F : X \to \mathbb{Z}$ με $F(x) = p_2(H(f(x)) - H(x))$, είναι συνεχής επί του συνεκτικού X και επειδή $F(x_0) = 1$, θα πρέπει να ισχύει $F(x) = 1$ για κάθε $x \in X$. Αρα

$$H(f(x)) = T(H(x)),$$

όπου $T : S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}$ είναι η απεικόνιση $T(z,t) = (z, t+1)$. Αρα για κάθε $x \in X$ έχουμε $f = H^{-1} \circ T \circ H$.

Εστω τώρα $R : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to S^1 \times \mathbb{R}$ ο ομοιομορφισμός με $R(re^{i\theta}) = (e^{i\theta}, \log r / \log 2)$. Τότε για κάθε $z = re^{i\theta}, r > 0$, έχουμε

$$R(V(z)) = R(2z) = (e^{i\theta}, 1 + \frac{\log r}{\log 2}) = T(R(z)).$$

Αρα $T = R \circ V \circ R^{-1}$ και κατά συνέπεια

$$f = (H^{-1} \circ R) \circ V \circ (R^{-1} \circ H).$$

Θέτοντας $(H^{-1} \circ R)(0) = S$ και $(H^{-1} \circ R)(\infty) = N$, επεκτείνουμε συνεχώς, οπότε η τελευταία συζυγία ισχύει σ' ολόκληρη την σφαίρα S^2. □

Από τα θεωρήματα 3.2.15, 3.4.1 και 3.4.2 έχουμε τώρα τον ακόλουθο τοπολογικό χαρακτηρισμό των σύμμορφων αυτομορφισμών της σφαίρας.

Θεώρημα 3.4.3. *Εστω $f : S^2 \to S^2$, ένας ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό. Αν το $\Sigma(f)$ είναι ολικά μη συνεκτικό, τότε ο f είναι τοπολογικά συζυγής με έναν σύμμορφο αυτομορφισμό της S^2.* □

Βιβλιογραφία

[1] K. Athanassopoulos, *Notes of the Ergodic Theory of Dynamical Systems from a geometric point of view*, unpublished notes.

[2] G. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, 1972.

[3] G. Bredon, *Geometry and Topology, Springer - Verlang*, 1993.

[4] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin and Ya. G. Sinai, *Ergodic Theory*, Springer - Verlang, 1982.

[5] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, 1966.

[6] J. G. Hocking and C. S. Young, *Topology*, Addison - Wesley Publishing Company, 1961.

[7] E. Moise, *Geometric Topology in Dimension 2 and 3,* Springer - Verlang, 1977.

[8] Pommerenke, *Boundary Behavior of Conformal Maps*, Springer - Verlang, 1992.