

Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών

Εισαγωγή στα
Διακριτά Δυναμικά Συστήματα
Σημειώσεις

Κωνσταντίνος Αθανασόπουλος



Ηράκλειο 2012

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές αντιστοιχούν στο μάθημα *Θέματα Ανάλυσης: Χάος και Δυναμικά Συστήματα*, που δίδαξα κατά το εαρινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2011-12 στα πλαίσια του προπτυχιακού προγράμματος σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Το περιεχόμενο αναφέρεται σε Δυναμικά Συστήματα διακριτού χρόνου σε μονοδιάστατους χώρους και πιο συγκεκριμένα στην πραγματική ευθεία και στον κύκλο. Ένας από τους λόγους για τον περιορισμό αυτό είναι το γεγονός ότι η μελέτη Δυναμικών Συστημάτων σε χώρους ανώτερης διάστασης απαιτεί την χρήση προχωρημένων τεχνικών από περιοχές των Μαθηματικών, με τις οποίες οι προπτυχιακοί φοιτητές των Μαθηματικών Τμημάτων σπάνια έρχονται σε επαφή κατά τη διάρκεια των σπουδών τους, όπως για παράδειγμα η Διαφορική Τοπολογία. Για την ευχερή κατανόηση του περιεχομένου των σημειώσεων αυτών απαιτούνται βασικές γνώσεις Μαθηματικής Ανάλυσης που (πρέπει να) διδάσκονται όλοι οι προπτυχιακοί φοιτητές Μαθηματικών και καλύπτονται από το δημοφιλές σε παγκόσμια κλίμακα καθιερωμένο βιβλίο του Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Mc Graw-Hill, που εκδόθηκε το 1952 και έκτοτε έχει υποστεί πολλές επανεκδόσεις.

Η φιλοσοφία με την οποία έχουν γραφτεί αυτές οι σημειώσεις αντανακλά την γενικότερη άποψη του συγγραφέα για το τι είναι τα Μαθηματικά, πώς παράγονται οι μαθηματικές θεωρίες και πώς πρέπει να διδάσκονται. Αντίθετα από τη σχολαστική άποψη των Bourbaki, Hardy κ.ά. που κυριαρχεί στα Τμήματα Μαθηματικών της Ελλάδας, αλλά σε μεγάλο βαθμό και παγκοσμίως, δεν ξεκινάμε με την παράθεση γενικών και αφηρημένων εννοιών. Αντί αυτού, έχει προτιμηθεί η παρουσίαση συγκεκριμένων προβλημάτων και παραδειγμάτων, η μελέτη των οποίων οδηγεί στη δημιουργία γενικών εννοιών και θεωριών, μέσα από τη διαδικασία της αφαίρεσης. Έτσι ο αναγνώστης μπορεί να πάρει μια ιδέα για τον τρόπο λειτουργίας του ερευνητή των Μαθηματικών, αλλά και να αποκτήσει ενδεχομένως το ενδιαφέρον για παραπέρα μελέτη.

Μια ευρύτερη άποψη για τον κλάδο των Δυναμικών Συστημάτων μπορεί ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης να πάρει από τα ακόλουθα βιβλία προπτυχιακού επιπέδου:

1. R.L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley, 1989.
2. R.A. Holmgren, *A first course in discrete dynamical systems*, Springer, 1996.
3. B. Hasselblatt and A. Katok, *A first course in dynamics*, Cambridge University Press, 2003.

Κωνσταντίνος Αθανασόπουλος
Ηράκλειο, Μάιος 2012

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	3
1.1	Πληθυσμιακά μοντέλα	4
1.2	Η μέθοδος Newton-Raphson	6
1.3	Μηχανικά Συστήματα	11
2	Δυναμικά Συστήματα στο \mathbb{R}	15
2.1	Συστολές και σταθερά σημεία	15
2.2	Υπερβολικά περιοδικά σημεία	19
2.3	Η λογιστική απεικόνιση	22
2.4	Η μετατόπιση στο χώρο ακολουθιών δύο συμβόλων	30
2.5	Τοπολογική συζυγία	34
2.6	Χάος	36
2.7	Το Θεώρημα του Sarkovskii	42
3	Δυναμικά Συστήματα στον κύκλο	51
3.1	Στροφές του κύκλου	51
3.2	Ομοιομορφισμοί του κύκλου	60
3.3	Ο ρόλος του βαθμού διαφορισμότητας	69
4	Απαντήσεις επιλεγμένων ασκήσεων	79
4.1	Ασκήσεις από το κεφάλαιο 1	79
4.1.1	Ασκήσεις της παραγράφου 1.2.	79
4.2	Ασκήσεις από το κεφάλαιο 2	79
4.2.1	Ασκήσεις της παραγράφου 2.1.	79
4.2.2	Ασκήσεις της παραγράφου 2.2.	80
4.2.3	Ασκήσεις της παραγράφου 2.3.	81
4.2.4	Ασκήσεις της παραγράφου 2.4.	83
4.2.5	Ασκήσεις της παραγράφου 2.5.	84
4.2.6	Ασκήσεις της παραγράφου 2.6.	85
4.2.7	Ασκήσεις της παραγράφου 2.7.	86
4.3	Ασκήσεις από το κεφάλαιο 3	87
4.3.1	Ασκήσεις της παραγράφου 3.1.	87
4.3.2	Ασκήσεις της παραγράφου 3.2.	88
4.3.3	Ασκήσεις της παραγράφου 3.3.	88

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Με την ευρεία έννοια Δυναμικό Σύστημα είναι ένα οποιοδήποτε σύστημα εξελίσσεται με την πάροδο του χρόνου. Η επαναστατική για την εποχή της θέση του Isaac Newton, που άλλαξε την φυσική φιλοσοφία, ήταν ότι τα φυσικά φαινόμενα υπακούουν σε αναλλοίωτους νόμους, που είναι δυνατόν να διατυπωθούν μαθηματικά. Δηλαδή, οι αρχές που διέπουν τη λειτουργία της Φύσης μπορούν να περιγραφούν με μαθηματικούς όρους και η εξέλιξη των φυσικών φαινομένων μπορεί να προβλεφθεί και να καθορισθεί με μαθηματική βεβαιότητα. Αυτό το φιλοσοφικό ρεύμα στις φυσικές επιστήμες αποκλήθηκε αιτιοκρατία (determinism) και αποτελεί τη φιλοσοφική βάση της επιτυχίας της Κλασικής Μηχανικής. Ιδιαίτερα επιτυχημένη, με βάση αυτό, ήταν η αντιμετώπιση προβλημάτων της Ουράνιας Μηχανικής κατά τον 19ο αιώνα, όπως η περιγραφή της κίνησης των ουρανίων σωμάτων του ηλιακού μας συστήματος.

Η σύγχρονη θεωρία των Δυναμικών Συστημάτων αρχίζει στα τέλη του 19ου και τις αρχές του 20ου αιώνα με τον Henri Poincaré, που διεύρυνε την αιτιοκρατική φιλοσοφία. Αν και, σύμφωνα με την αιτιοκρατική άποψη, η αρχική κατάσταση ενός συστήματος καθορίζει κάθε επόμενη, στην πράξη είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε την αρχική κατάσταση μόνο κατά προσέγγιση. Κατά τον Henri Poincaré, αν μπορούμε να προβλέψουμε τις μελλοντικές καταστάσεις με τον ίδιο βαθμό προσέγγισης, τότε αυτό επαρκεί για να πούμε ότι το φαινόμενο είναι αιτιοκρατικό. Δυστυχώς αυτό δεν συμβαίνει πάντα. Είναι δυνατόν πολύ μικρές αλλαγές στις αρχικές συνθήκες να προκαλέσουν πολύ μεγάλες διαφορές στην εξέλιξη ενός συστήματος. Στην περίπτωση αυτή η πρόβλεψη για μεγάλα χρονικά διαστήματα είναι αδύνατη. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί μεταξύ των άλλων η πρόγνωση των καιρικών συνθηκών. Αυτή η θέση του Henri Poincaré είναι η βάση της θεωρίας των Δυναμικών Συστημάτων μέχρι τις μέρες μας. Το κεντρικό πρόβλημα είναι η μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των πάσης φύσεως συστημάτων με ποιοτικές, δηλαδή γεωμετρικές, μεθόδους που δεν χρειάζονται τον εκ των προτέρων υπολογισμό των λύσεων, από κοινού με πιθανοθεωρητικές μεθόδους.

Τα περισσότερα φυσικά φαινόμενα, όπως τα μηχανικά, εξελίσσονται σε συνεχή χρόνο και περιγράφονται από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Ένας τρόπος μελέτης μπορεί να γίνει με την διακριτοποίηση του χρόνου, για τον επιπλέον λόγο ότι ο ανθρώπινος νους σφέρεται σε διακριτά χρονικά διαστήματα. Όμως υπάρχουν και συστήματα που εξελίσσονται σε διακριτό χρόνο, τόσο στη φύση όσο και στην κοινωνία, όπως για παράδειγμα στην οικονομία. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε μερικά τέτοια φαινόμενα, καθώς επίσης και το ρόλο των Δυναμικών Συστημάτων στη διευκρίνιση μεθόδων στα Μαθηματικά, όπως είναι η προσεγγιστική εύρεση των ριζών μιας εξίσωσης με επαναληπτικές μεθόδους.

1.1 Πληθυσμιακά μοντέλα

Οι βιολόγοι που μελετούν την πανίδα ενδιαφέρονται για τη χρονική εξέλιξη των πληθυσμών διαφόρων ειδών μεμονωμένα ή σε αλληλεπίδραση μεταξύ τους. Το βασικό ερώτημα που καλούνται να απαντήσουν είναι τί συμβαίνει με την πάροδο του χρόνου σε έναν αρχικό πληθυσμό από $x_0 > 0$ άτομα του είδους. Στην εξέλιξη του πληθυσμού παίζουν ρόλο παράγοντες που πρέπει να συνυπολογιστούν, όπως το κλίμα, η ποσότητα της διαθέσιμης τροφής, ο περιορισμένος ενδεχομένως χώρος ή η ύπαρξη ανταγωνιστικών και αρπακτικών ειδών.

Το πιο απλοϊκό μοντέλο παίρνει ως μοναδική υπόθεση ότι ο πληθυσμός ενός μεμονωμένου είδους μεταβάλλεται ανάλογα με τον ήδη υπάρχοντα πληθυσμό. Δηλαδή, η στιγμιαία μεταβολή του πληθυσμού την χρονική στιγμή t είναι ευθέως ανάλογη του πληθυσμού με μια σταθερή αναλογία k . Αν $x(t)$ είναι ο πληθυσμός τη χρονική στιγμή t , το μοντέλο περιγράφεται μαθηματικά από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

που έχει λύση $x(t) = x_0 e^{kt}$, όπου $x(0) = x_0$. Αν $k > 0$, τότε $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$ και έχουμε ανεξέλεγκτο υπερπληθυσμό, ενώ αν $k < 0$, τότε $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ και το είδος τείνει προς εξαφάνιση. Η εμπειρία όμως δείχνει ότι η πραγματικότητα είναι πιο περίπλοκη από αυτό το μοντέλο, που προβλέπει μόνο υπερπληθυσμό ή εξαφάνιση.

Ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο για την εξέλιξη του πληθυσμού ενός μεμονωμένου είδους είναι μια παραλλαγή του προηγούμενου, που θέτει ένα άνω όριο $b > 0$, πέρα από το οποίο θα έχουμε μείωση του πληθυσμού, που μπορεί να οφείλεται στην περιορισμένη τροφή για παράδειγμα. Έτσι, αν $x(t) < b$, τότε ο πληθυσμός θα έχει αυξητική τάση, ενώ αν $x(t) > b$, φθίνουσα. Ένα απλό μαθηματικό μοντέλο που ικανοποιεί αυτές τις υποθέσεις περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = kx(b - x).$$

Υποθέτοντας ότι $k > 0$, έχουμε ότι

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{kx(b-x)} dx = \int_0^t dt$$

και αφού

$$\frac{1}{kx(b-x)} = \frac{1}{bkx} + \frac{1}{bk(b-x)}$$

προκύπτει ότι

$$\frac{x(t)}{b-x(t)} = \frac{x_0 e^{bkt}}{b-x_0}.$$

Κατά συνέπεια

$$x(t) = \frac{bx_0}{(b-x_0)e^{-bkt} + x_0}.$$

Εδώ λοιπόν έχουμε $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = b$. Δηλαδή, ο πληθυσμός τείνει να σταθεροποιηθεί στο άνω όριο, σύμφωνα με αυτό το μοντέλο.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε ένα παρόμοιο μοντέλο διακριτού χρόνου. Τα διακριτά μοντέλα είναι πιο φυσικά στη μελέτη της εξέλιξης πληθυσμών, όταν οι γενιές είναι ξένες

μεταξύ τους. Αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, στα έντομα, όπως οι πεταλούδες, όπου κάθε γενιά ζει από την άνοιξη μέχρι το φθινόπωρο και τα μέλη της δεν έχουν κοινή περίοδο βίου με μέλη της επόμενης. Υποθέτουμε φυσικά σταθερές εξωτερικές συνθήκες, όπως το κλίμα. Αν υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε μια απομονωμένη αποικία πεταλούδων σ' έναν περιορισμένο χώρο, τότε για τους ίδιους λόγους, όπως προηγουμένως, είναι κάπως ρεαλιστικό να υποθέσουμε ότι, αρχίζοντας από το έτος $n = 0$, αν x_n είναι ο πληθυσμός της αποικίας το έτος n , το επόμενο έτος $n + 1$ ο πληθυσμός είναι

$$x_{n+1} = kx_n(b - x_n),$$

όπου $k, b > 0$. Έτσι, αν $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $g(x) = kx(b - x)$, τότε

$$x_{n+1} = g(x_n) = g(g(x_{n-1})) = \dots = g^{n+1}(x_0),$$

όπου $g^i = g \circ g \circ \dots \circ g$ i φορές. Ένα προφανές τεχνικό μειονέκτημα του μοντέλου αυτού είναι ότι αν $x_n > b$, τότε $x_{n+1} < 0$.

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = x/b$, παίρνουμε το ισοδύναμο μοντέλο $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(y) = (h \circ g \circ h^{-1})(y) = h(g(h^{-1}(y))) = h(kbh^{-1}(y)(1 - h^{-1}(y))) = \lambda y(1 - y),$$

όπου θέσαμε $\lambda = bk$ να είναι η νέα σταθερά. Με άλλα λόγια, το ισοδύναμο μοντέλο f παίρνεται πηγαίνοντας από τη νέα μεταβλητή y στη παλιά με την h^{-1} , εφαρμόζοντας την παλιά απεικόνιση g και επιστρέφοντας πάλι στη νέα μεταβλητή με την h . Σχηματικά, αυτή η διαδικασία παριστάνεται από το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \end{array}$$

Η αλλαγή μεταβλητής που κάναμε μπορεί να εκληφθεί και ως αλλαγή του συστήματος μονάδων που χρησιμοποιούμε για τις μετρήσεις μας. Δεν έχουμε καμία απαίτηση για χρήση κάποιου συγκεκριμένου συστήματος μονάδων μέτρησης.

Έτσι καταλήγουμε σ' ένα μοντέλο για την εξέλιξη του πληθυσμού των πεταλούδων, που παρίσταται από τις επαναλήψεις της συνεχούς απεικόνισης $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x), \quad \lambda > 0,$$

που λέγεται *λογιστική απεικόνιση*.

Αν $0 < \lambda < 1$, τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_\lambda^n(x) = 0$ για κάθε $0 < x < 1$, γιατί $0 < f_\lambda^n(x) < \lambda^n x$. Επίσης, για $\lambda = 1$, η ακολουθία $(f_1^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ φθίνει και κατά συνέπεια συγκλίνει σε κάποιο όριο $0 \leq a < 1$, αφού είναι κάτω φραγμένη από το 0. Επειδή $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_1^n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_1^{n+1}(x)$, προκύπτει ότι $a = a(1 - a)$, δηλαδή $a = 0$. Αυτά σημαίνουν ότι αν $0 < \lambda \leq 1$, τότε για κάθε αρχικό πληθυσμό $0 < x < 1$ η αποικία θα εξαφανιστεί.

Είναι αναμενόμενο ότι η αλλαγή της παραμέτρου λ μπορεί να επιφέρει αλλαγή στη συμπεριφορά του μοντέλου. Βιολογική σημασία έχει το μοντέλο για αρχικούς πληθυσμούς $0 \leq x \leq 1$ για τους οποίους $0 \leq f_\lambda^n(x) \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς, όταν $0 < \lambda \leq 4$, τότε $0 \leq f_\lambda(x) \leq 1$ για κάθε $0 \leq x \leq 1$. Για παράδειγμα, ας πάρουμε $\lambda = 2$. Αν έχουμε έναν αρχικό πληθυσμό $0 < x < 1/2$, τότε $x < f_2(x) = 2x(1 - x) < 1/2$. Συνεπώς, η ακολουθία

$(f_2^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από το $1/2$. Το όριο a ικανοποιεί την εξίσωση $a = 2a(1 - a)$, δηλαδή $a = 1/2$. Αυτό σημαίνει ότι ένας αρχικά μικρός πληθυσμός αυξάνει με την πάροδο του χρόνου και τείνει να σταθεροποιηθεί κοντά στο $1/2$.

Η λογιστική απεικόνιση θα μελετηθεί λεπτομερώς σε επόμενο κεφάλαιο. Θα κλείσουμε αυτή την παράγραφο με μια απλή αναφορά σε ένα δημοφιλές μοντέλο αλληλεπίδρασης δύο ανταγωνιστικών μεταξύ τους πληθυσμών x και y . Το μοντέλο οφείλεται στους Alfred Lotka και Vito Volterra και περιγράφεται από το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + c_1xy, \quad \frac{dy}{dt} = a_2y + c_2xy,$$

όπου $a_1, c_2 > 0$ και $a_2, c_1 < 0$. Αυτά σημαίνουν ότι ο πληθυσμός $y > 0$ είναι αρπακτικό είδος που τρέφεται από το είδος με πληθυσμό $x > 0$. Όπως δείχνει η πρώτη εξίσωση, η μείωση του πληθυσμού x είναι ανάλογη του αριθμού του πληθυσμού των αρπακτικών και η αύξηση του αριθμού των αρπακτικών είναι ανάλογη του αριθμού του πληθυσμού του είδους με το οποίο τρέφονται. Ελλάτωση αυτού του πληθυσμού προκαλεί ελλάτωση του πληθυσμού των αρπακτικών, αφού αυτά δεν θα βρίσκουν επαρκή τροφή.

Βιολογική σημασία έχουν μόνο λύσεις που ικανοποιούν αρχικές συνθήκες $x(0) = x_0 > 0$ και $y(0) = y_0 > 0$ τη χρονική στιγμή $t = 0$. Μια προφανής λύση στο $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ είναι η σταθερή $(-a_2/c_2, -a_1/c_1)$. Εστω $H : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η C^∞ συνάρτηση με

$$H(x, y) = a_1 \log y - a_2 \log x + c_1y - c_2x.$$

Αν $(x(t), y(t))$, $t \in I$, είναι μια λύση ορισμένη σ' ένα ανοιχτό διάστημα $I \subset \mathbb{R}$, από τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(H(x(t), y(t))) &= \frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t))(a_1x + c_1xy) + \frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t))(a_2y + c_2xy) \\ &= -\left(\frac{a_2}{x} + c_2\right)(a_1x + c_1xy) + \left(\frac{a_1}{y} + c_1\right)(a_2y + c_2xy) = 0. \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι τροχιές των λύσεων βρίσκονται πάνω στα σύνολα της μορφής

$$\{(x, y) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty) : H(x, y) = \text{σταθ.}\}.$$

Τα σύνολα αυτά είναι κλειστές καμπύλες. Μάλιστα για την τιμή της σταθεράς ίση με $a_1 \log(-a_1/c_1) - a_2 \log(-a_2/c_2) - a_1 + a_2$ αυτό είναι το μονοσύνολο $\{(-a_2/c_2, -a_1/c_1)\}$, ενώ για τις υπόλοιπες τιμές είναι απλή κλειστή καμπύλη. Από αυτό προκύπτει ότι οι μη-σταθερές λύσεις στο $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ είναι περιοδικές.

1.2 Η μέθοδος Newton-Raphson

Η αναζήτηση μεθόδων υπολογισμού των λύσεων, αν υπάρχουν, της εξίσωσης $f(x) = 0$, όπου f είναι μια συνάρτηση, χρονολογείται από πολύ παλιά. Ιδιαίτερα, η προσπάθεια επίλυσης της πολυωνυμικής εξίσωσης 2ου βαθμού $ax^2 + bx + c = 0$ άρχισε από την αρχαιότητα. Κατά τον 16ο αιώνα κατέστη δυνατή η επίλυση των πολυωνυμικών εξισώσεων 3ου και 4ου βαθμού, ενώ στις αρχές του 19ου αιώνα αποδείχθηκε ότι αυτό δεν είναι πάντα δυνατό για τις πολυωνυμικές εξισώσεις 5ου ή ανώτερου βαθμού. Ο Isaac Newton ανέπτυξε μια μέθοδο για την προσεγγιστική εκτίμηση των λύσεων εξισώσεων, η οποία αργότερα βελτιώθηκε από

τον Joseph Raphson και είναι σήμερα γνωστή ως η μέθοδος *Newton-Raphson*. Η μέθοδος προϋποθέτει ότι η συνάρτηση f είναι τουλάχιστον διαφορίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Θεώρημα 1.2.1. *Εστω $a < b$ και $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση. Εστω $a < \xi < b$ με $f(\xi) = 0$. Αν $f'(\xi) \neq 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\xi - \delta < x_0 < \xi + \delta$, η επαγωγικά ορισμένη ακολουθία*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

συγκλίνει στο ξ .

Απόδειξη. Επειδή η f' υποτίθεται συνεχής και $f'(\xi) \neq 0$, υπάρχει $\theta > 0$ ώστε $f'(x) \neq 0$ για κάθε $\xi - \theta \leq x \leq \xi + \theta$. Ορίζεται λοιπόν καλά η συνάρτηση $g : [\xi - \theta, \xi + \theta] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Προφανώς, $g(\xi) = \xi$ και $x_{n+1} = g(x_n)$. Επειδή η f υποτίθεται C^2 , η g είναι C^1 και

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

για κάθε $\xi - \theta \leq x \leq \xi + \theta$. Προφανώς, $g'(\xi) = 0$, αφού $f(\xi) = 0$. Η συνέχεια της g' στο ξ σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $0 < \delta < \theta$ ώστε $|g'(x)| = |g'(x) - g'(\xi)| < \epsilon$, όταν $|x - \xi| < \delta$. Από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής, όταν $|x - \xi| < \delta$ υπάρχει κάποιος ζ μεταξύ του x και του ξ ώστε

$$|g(x) - \xi| = |g(x) - g(\xi)| = |g'(\zeta)| \cdot |x - \xi| < \epsilon|x - \xi|.$$

Επιλέγοντας ένα οποιοδήποτε $0 < \epsilon < 1$, παραδείγματος χάριν $\epsilon = \frac{1}{2}$, καταλήγουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|g(x) - \xi| < \frac{1}{2}|x - \xi|$$

όταν $|x - \xi| < \delta$. Κατά συνέπεια, για κάθε $\xi - \delta < x_0 < \xi + \delta$ έχουμε

$$|g(g(x_0)) - \xi| < \frac{1}{2}|g(x_0) - \xi| < \frac{1}{2^2}|x_0 - \xi|$$

και επαγωγικά

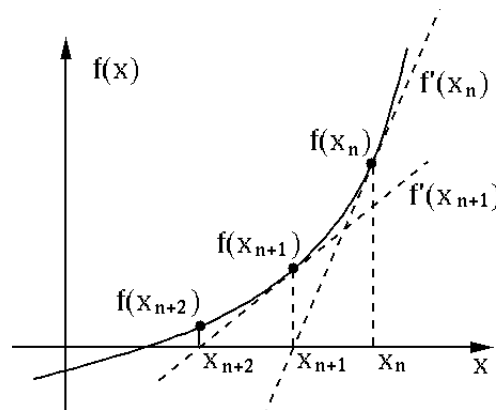
$$|x_n - \xi| < \frac{1}{2^n}|x_0 - \xi|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Είναι τώρα φανερό ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \xi$. \square

Από τον επαγωγικό ορισμό της ακολουθίας $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φανερό ότι ο όρος x_{n+1} είναι η ρίζα της γραμμικής προσέγγισης της f στο x_n , δηλαδή της συνάρτησης

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

για κάθε $n \geq 0$. Αυτή είναι η γεωμετρική ιδέα πάνω στην οποία βασίζεται η μέθοδος Newton-Raphson. Αν η f είναι της μορφής $f(x) = \lambda x + \mu$, όπου $\lambda \neq 0$, τότε η εξίσωση



Σχήμα 1.1: Γραφική αναπαράσταση της μεθόδου Newton-Raphson

$f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = -\lambda/\mu$. Αν η f είναι μια οποιαδήποτε διαφορίσιμη συνάρτηση, τότε προσεγγίζεται κοντά στο x_0 από την

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Η ιδέα του Newton ήταν ότι η ρίζα x_1 της εξίσωσης $y = 0$ πρέπει να είναι καλύτερη προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$, όταν το x_0 είναι αρκετά κοντά στο ξ , καλύτερη από το x_0 . Αν εφαρμόσουμε στη συνέχεια την ίδια διαδικασία με το x_1 στη θέση του x_0 , αναμένουμε να πάρουμε μια ακόμα καλύτερη προσέγγιση του ξ . Συνεχίζουμε έτσι μέχρι να πάρουμε μια ικανοποιητική προσέγγιση του ξ .

Όπως δείχνει η απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.1, η ρίζα ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι σταθερό σημείο της απεικόνισης g και $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(x_0) = \xi$. Ένα μειονέκτημα της μεθόδου Newton-Raphson είναι ότι δεν είναι καθορισμένο το δ , δηλαδή το πόσο κοντά στο ξ πρέπει να επιλέξουμε την αρχική εκτίμηση x_0 . Με άλλα λόγια, για να ξεκινήσουμε, πρέπει με κάποιο ακαθόριστο τρόπο να εκτιμήσουμε πού περίπου βρίσκεται το ξ και να επιλέξουμε το x_0 . Αυτό εξαρτάται από τη συνάρτηση f , που έχουμε κάθε φορά και μειώνει την αξιοπιστία της μεθόδου. Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς της απόδειξης του Θεωρήματος 1.2.1, το πρόβλημα του καθορισμού του συνόλου

$$\{x \in (\xi - \theta, \xi + \theta) : \lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(x) = \xi\},$$

που λέγεται πεδίο έλξης του σταθερού σημείου ξ της g , δεν είναι τετριμένο.

Παράδειγμα 1.2.2. Η (θετική) τετραγωνική ρίζα ενός πραγματικού αριθμού $c > 0$ είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2 - c = 0$. Εδώ λοιπόν έχουμε $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - c$. Επειδή $f'(x) = 2x$ για κάθε $x > 0$, η απεικόνιση g ορίζεται σ' όλο το $(0, +\infty)$ και έχει τύπο

$$g(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{c}{x} \right).$$

Προφανώς, η g είναι C^∞ και $g(x) > \sqrt{c}$ για κάθε $x > 0$. Επιπλέον,

$$g'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c}{x^2} \right)$$

και συνεπώς $0 < g'(x) < \frac{1}{2}$ για κάθε $x > \sqrt{c}$. Αν επιλέξουμε ένα οποιοδήποτε $x_0 > 0$, τότε έχουμε $x_1 = g(x_0) > \sqrt{c}$ και από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής υπάρχει κάποιος $\sqrt{c} < \zeta < x_1$ ώστε

$$g(x_1) - \sqrt{c} = g(x_1) - g(\sqrt{c}) = g'(\zeta)(x_1 - \sqrt{c}) < \frac{1}{2}(x_1 - \sqrt{c}).$$

Επαγωγικά βλέπουμε ότι

$$|g^n(x_1) - \sqrt{c}| < \frac{1}{2^n}|x_1 - \sqrt{c}|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_1) = \sqrt{c}$ για κάθε $x_0 > 0$. Στη περίπτωση αυτή λοιπόν το πεδίο έλξης του σταθερού σημείου \sqrt{c} της g είναι το $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα 1.2.3. Η πολυωνυμική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x^3 - 2x + 2$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα $-2 < \xi < -1$, γιατί $f(-2) = -2 < 0$ και $f(-1) = 3 > 0$. Έχουμε $f'(x) = 3x^2 - 2$ και αν $f'(x) = 0$ τότε $f(x) \neq 0$, όπως αμέσως υπολογίζουμε. Συνεπώς, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1.2.1. Η συνάρτηση g της απόδειξης του 1.2.1 ορίζεται στο σύνολο $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\}$ και έχει τύπο

$$g(x) = x - \frac{x^3 - 2x + 2}{3x^2 - 2}.$$

Αν επιλέξουμε $x_0 = 0$, τότε παρατηρούμε ότι $g(0) = 1$, $g(1) = 0$, οπότε

$$g^n(x_0) = \begin{cases} 1, & \text{για } n \text{ περιττό} \\ 0, & \text{για } n \text{ άρτιο} \end{cases}$$

και προφανώς το 0 και το 1 δεν είναι ρίζες. Η ακολουθία λοιπόν $(g^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει σε καμία ρίζα της f και βέβαια όχι στην ξ . Η επιλογή αυτή του αρχικού σημείου αποδείχθηκε ανεπιτυχής, δηλαδή δεν βρίσκεται στο πεδίο έλξης του ξ , γιατί μεταξύ του ξ και του x_0 υπάρχει κρίσιμο σημείο της f , συγκεκριμένα το $-\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Η υπόθεση $f'(\xi) \neq 0$ στο Θεώρημα 1.2.1 σημαίνει ότι η ρίζα ξ είναι απλή. Στη συνέχεια θα περιοριστούμε σε πολυωνυμικές συναρτήσεις. Υπενθυμίζουμε ότι αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, ένας πραγματικός αριθμός ξ λέγεται ρίζα της f με πολλαπλότητα $k > 1$ όταν $f(\xi) = 0$, $f'(\xi) = 0, \dots, f^{(k-1)}(\xi) = 0$, και $f^{(k)}(\xi) \neq 0$ ή ισοδύναμα υπάρχει μια πολυωνυμική συνάρτηση $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = (x - \xi)^k h(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $h(\xi) \neq 0$. Ακολουθώντας τα βήματα της απόδειξης του Θεωρήματος 1.2.1, υπάρχει $\theta > 0$ ώστε $f^{(k)}(x) \neq 0$ για κάθε $\xi - \theta \leq x \leq \xi + \theta$. Η συνάρτηση g ορίζεται στο $[\xi - \theta, \xi + \theta] \setminus \{\xi\}$ και έχει τύπο

$$g(x) = x - \frac{(x - \xi)^k h(x)}{k(x - \xi)^{k-1} h(x) + (x - \xi)^k h'(x)} = x - \frac{(x - \xi)h(x)}{kh(x) + (x - \xi)h'(x)}.$$

Κατά συνέπεια, η g ορίζεται σε ολόκληρο το διάστημα $[\xi - \theta, \xi + \theta]$ και βέβαια $g(\xi) = \xi$. Επιπλέον, η g είναι C^1 και υπολογίζουμε

$$g'(x) = \frac{k(k-1)(h(x))^2 + 2k(x-\xi)(h'(x))^2 + (x-\xi)^2 h(x)h''(x)}{[kh(x) + (x-\xi)h'(x)]^2}$$

για κάθε $\xi - \theta < x < \xi + \theta$. Ειδικά,

$$g'(\xi) = 1 - \frac{1}{k}.$$

Αρα υπάρχει $0 < \delta < \theta$ ώστε

$$|g(x) - \xi| < \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)|x - \xi|$$

όταν $|x - \xi| < \delta$. Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.1, για κάθε $\xi - \delta < x < \xi + \delta$ έχουμε

$$|g^n(x) - \xi| < \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^n |x - \xi|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από όπου συμπεραίνουμε πάλι ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(x) = \xi$.

Ασκήσεις

1. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η πολυωνυμική συνάρτηση

$$f(x) = x^{10} + x - 1.$$

(α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα στο ανοιχτό διάστημα $(-\infty, -10^{-1/9})$, ενώ είναι γνήσια αύξουσα στο ανοιχτό διάστημα $(-10^{-1/9}, +\infty)$.

(β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις στο \mathbb{R} . Η μία βρίσκεται στο ανοιχτό διάστημα $(-2, -1)$ και η άλλη στο διάστημα $(0, 1)$.

Έστω $g : \mathbb{R} \setminus \{-10^{-1/9}\} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

(γ) Έστω $0 < \xi < 1$ με $f(\xi) = 0$. Να αποδειχθεί ότι $g([\xi, x]) \subset [\xi, x]$ για κάθε $x > \xi$.

(δ) Να αποδειχθεί ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(x) = \xi$ για κάθε $x > \xi$ και ειδικά $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(1) = \xi$.

2. Εστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η C^∞ συνάρτηση

$$f(x) = 2x - \log x - 4.$$

(α) Να ευρεθούν τα σημεία στα οποία η f έχει τοπικό (ή ολικό) ακρότατο και τα διαστήματα μονοτονίας της, όπως και το είδος της μονοτονίας.

(β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις στο $(0, +\infty)$. Η μία βρίσκεται στο ανοιχτό διάστημα $(\frac{1}{e^4}, \frac{1}{2})$ και η άλλη στο ανοιχτό διάστημα $(2, 3)$.

Έστω $g : (0, +\infty) \setminus \{\frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

(γ) Έστω $2 < \xi < 3$ με $f(\xi) = 0$. Να αποδειχθεί ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(x) = \xi$ για κάθε $x > \xi$ και ειδικά $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(x) = \xi$ για κάθε $x \geq 3$.

3. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η C^∞ συνάρτηση

$$f(x) = x^2 + 2 - e^x.$$

(α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, ενώ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Συνεπώς η εξίσωση $x^2 + 2 - e^x = 0$ έχει ακριβώς μία λύση $\xi \in \mathbb{R}$. Μάλιστα, $1 < \xi < 2$.

Έστω $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η C^∞ συνάρτηση

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

(β) Να αποδειχθεί ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(x) = \xi$ για κάθε $x > \xi$ και ειδικά $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(2) = \xi$.

(γ) Να αποδειχθεί ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(1) = \xi$.

1.3 Μηχανικά Συστήματα

Στο κέντρο της Κλασικής Μηχανικής βρίσκεται ο νόμος του Newton, που συμπυκνώνει την φιλοσοφία του, στην οποία αναφερθήκαμε στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου. Μια εξωτερική δύναμη F που δρά πάνω σ' ένα μηχανικό σύστημα (π.χ. ένα υλικό σημείο, ένα στερεό σώμα, ένας πλανήτης, κ.ο.κ.) προκαλεί μια ανάλογη μεταβολή της ταχύτητας. Με μαθηματικούς όρους

$$F = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

όπου m είναι η συνολική μάζα και x είναι το διάνυσμα θέσης. Αυτή είναι μια 2ης τάξης διαφορική εξίσωση.

Αν η θέση είναι ένα σημείο του \mathbb{R}^n , τότε η παραπάνω διαφορική εξίσωση ανάγεται στην $2n$ -διάστατη διαφορική εξίσωση 1ης τάξης

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} \cdot F,$$

όπου έχουμε εισάγει ως νέα ανεξάρτητη μεταβλητή την ταχύτητα $v = dx/dt$.

Όταν η εξωτερική δύναμη F είναι συνάρτηση μόνο της θέσης x και όχι του χρόνου t (αυτό δεν συμβαίνει για τις δυνάμεις τριβής, για παράδειγμα), τότε η προηγούμενη $2n$ -διάστατη διαφορική εξίσωση είναι της μορφής $X' = f(X)$, όπου στην περίπτωση μας $X = (x, v)$ και $f(x, v) = (v, \frac{1}{m}F(x))$. Το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (x, v) λέγεται συνήθως *χώρος φάσεων* του μηχανικού συστήματος. Επιπλέον, αν το διανυσματικό πεδίο F είναι C^1 , το ίδιο είναι και το διανυσματικό πεδίο f και όπως παρατηρούμε $\operatorname{div} f = 0$.

Έστω $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ένα C^k διανυσματικό πεδίο, $1 \leq k \leq \infty$. Υποθέτουμε ότι οι λύσεις της n -διάστατης διαφορικής εξίσωσης $x' = f(x)$, όπου $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ορίζονται σε όλο το \mathbb{R} . Επειδή η f υποτίθεται C^k , για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει

μια μοναδική λύση $\phi(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ με αρχική συνθήκη $\phi(0, x) = x$. Με αυτό τον τρόπο ορίζεται η συνάρτηση ροής $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ και

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) = f(\phi(t, x)).$$

Συνήθως γράφουμε $\phi(t, x) = \phi_t(x)$. Αποδεικνύεται ότι η ϕ είναι C^k (και C^{k+1} ως προς t) και δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι έχει τις ακόλουθες ιδιότητες: (α) $\phi_0(x) = x$ και (β) $\phi_{t+s}(x) = \phi_t(\phi_s(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $t, s \in \mathbb{R}$. Από αυτό προκύπτει ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ η απεικόνιση $\phi_t = \phi(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι C^k , αντιστρέψιμη και $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$. Αφού $\phi_{-t} \circ \phi_t = id$, παραγωγίζοντας προκύπτει ότι $D\phi_{-t}(\phi_t(x)) \cdot D\phi_t(x) = I_n$, από τον κανόνα της αλυσίδας. Συνεπώς, ο ιακωβιανός πίνακας $D\phi_t(x)$ είναι αντιστρέψιμος, οπότε $\det D\phi_t(x) \neq 0$. Ειδικά για $t = 0$ έχουμε $D\phi_0(x) = I_n$. Η συνάρτηση $\delta_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ με $\delta_x(t) = \det D\phi_t(x)$ είναι συνεχής και άρα διατηρεί πρόσημο. Αφού $\delta_x(0) = 1$, προκύπτει ότι $\det D\phi_t(x) > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}^n$.

Αν $I \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τότε ο όγκος του $\phi_t(I)$ είναι

$$\text{Vol}(\phi_t(I)) = \int_{\phi_t(I)} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_I \det D\phi_t \cdot dx_1 dx_2 \cdots dx_n,$$

από τον τύπο αλλαγής μεταβλητής κατά την ολοκλήρωση.

Στη συνέχεια θα υποθέτουμε για λόγους απλότητας ότι το αρχικό διανυσματικό πεδίο είναι C^∞ , οπότε και η αντίστοιχη συνάρτηση ροής ϕ είναι επίσης C^∞ .

Θεώρημα 1.3.1. *Εστω $I \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η C^∞ συνάρτηση με $g(t) = \text{Vol}(\phi_t(I))$. Τότε*

$$g'(t) = \int_{\phi_t(I)} \text{div } f \cdot dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} g'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_{\phi_h(\phi_t(I))} dx_1 dx_2 \cdots dx_n - \int_{\phi_t(I)} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\phi_t(I)} [\det D\phi_h(x) - 1] dx_1 dx_2 \cdots dx_n, \end{aligned}$$

από τον τύπο αλλαγής μεταβλητής. Επειδή η ϕ είναι C^∞ ως προς t , από το Θεώρημα του Taylor, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $h \in \mathbb{R}$ υπάρχει $0 < |\xi| < |h|$ ώστε

$$\phi_h(x) = \phi_0(x) + h \frac{\partial \phi}{\partial t}(0, x) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\xi, x) = x + hf(x) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\xi, x).$$

Παραγωγίζοντας ως προς x έχουμε

$$D\phi_h(x) = I_n + hDf(x) + h^2G(h, x),$$

όπου η $G = (G_{ij}) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση. Υπολογίζουμε τώρα ότι

$$\begin{aligned} \det D\phi_h(x) &= \begin{vmatrix} 1 + h\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + h^2 G_{11}(h, x) & \cdots & h\frac{\partial f_1}{\partial x_n} + h^2 G_{1n}(h, x) \\ h\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + h^2 G_{21}(h, x) & \cdots & h\frac{\partial f_2}{\partial x_n} + h^2 G_{2n}(h, x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h\frac{\partial f_n}{\partial x_1} + h^2 G_{n1}(h, x) & \cdots & 1 + h\frac{\partial f_n}{\partial x_n} + h^2 G_{nn}(h, x) \end{vmatrix} \\ &= \left[1 + h\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + h^2 G_{11}(h, x) \right] \cdot \begin{vmatrix} 1 + h\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + h^2 G_{22}(h, x) & \cdots & h\frac{\partial f_2}{\partial x_n} + h^2 G_{2n}(h, x) \\ h\frac{\partial f_3}{\partial x_2} + h^2 G_{32}(h, x) & \cdots & h\frac{\partial f_3}{\partial x_n} + h^2 G_{3n}(h, x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h\frac{\partial f_n}{\partial x_2} + h^2 G_{n2}(h, x) & \cdots & 1 + h\frac{\partial f_n}{\partial x_n} + h^2 G_{nn}(h, x) \end{vmatrix} \\ &\quad + h^2 B_1(h, x) \\ &= \cdots = 1 + h \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + h^2 B(h, x), \end{aligned}$$

όπου η $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση. Συνεπώς,

$$\frac{1}{h} [\det D\phi_h(x) - 1] = \operatorname{div} f + hB(h, x).$$

Επειδή το $\phi_t(I)$ είναι συμπαγές σύνολο και η B είναι συνεχής, προκύπτει ότι

$$g'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\phi_t(I)} [\operatorname{div} f + hB(h, x)] dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_{\phi_t(I)} \operatorname{div} f \cdot dx_1 dx_2 \cdots dx_n. \quad \square$$

Το διανυσματικό πεδίο f λέγεται *ασυμπίεστο* και η αντίστοιχη ροή $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ *ασυμπίεστη*, όταν $\operatorname{Vol}(\phi_t(I)) = \operatorname{Vol}(I)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και για κάθε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $I \subset \mathbb{R}^n$.

Πόρισμα 1.3.2. *Ενα C^∞ διανυσματικό πεδίο $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ασυμπίεστο τότε και μόνο τότε όταν $\operatorname{div} f = 0$.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς του προηγούμενου Θεωρήματος 1.3.1, το f είναι ασυμπίεστο τότε και μόνο τότε όταν για κάθε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $I \subset \mathbb{R}^n$ η συνάρτηση $g(t) = \operatorname{Vol}(\phi_t(I))$ είναι σταθερή, δηλαδή

$$\int_{\phi_t(I)} \operatorname{div} f \cdot dx_1 dx_2 \cdots dx_n = 0$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Ειδικά για $t = 0$ παίρνουμε

$$\int_I \operatorname{div} f \cdot dx_1 dx_2 \cdots dx_n = 0$$

για κάθε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $I \subset \mathbb{R}^n$. Αν τώρα $x \in \mathbb{R}^n$ και I_k είναι ο κύβος κέντρου x και ακμής $1/k$, $k \in \mathbb{N}$, υπάρχει $x_k \in I_k$ ώστε

$$0 = \int_{I_k} \operatorname{div} f \cdot dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \operatorname{div} f(x_k) \cdot \operatorname{Vol}(I_k)$$

και συνεπώς από την συνέχεια $\operatorname{div} f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \operatorname{div} f(x_k) = 0$. \square

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι οι μετασχηματισμοί του χώρου φάσεων ενός κλασικού μηχανικού συστήματος του Newton που συναπαρτίζουν την αντίστοιχη ροή διατηρούν τους όγκους των υποσυνόλων του, για τα οποία αυτός ορίζεται.

Κεφάλαιο 2

Δυναμικά Συστήματα στο \mathbb{R}

2.1 Συστολές και σταθερά σημεία

Εστω X ένα μη-κενό σύνολο, $A \subset X$ και $f : A \rightarrow X$ μια απεχόνιση. Το $x \in A$ λέγεται σταθερό σημείο της f όταν $f(x) = x$. Τα σταθερά σημεία είναι πολύ σημαντικά, όχι μόνο στα Δυναμικά Συστήματα, αλλά γενικά στα Μαθηματικά και τις εφαρμογές τους στις άλλες επιστήμες. Η πιο απλή πρόταση ύπαρξης σταθερού σημείου είναι η ακόλουθη.

Πρόταση 2.1.1. *Εστω $a < b$ και $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Αν $[a, b] \subset f([a, b])$ (ή $f([a, b]) \subset [a, b]$), τότε υπάρχει $a \leq x_0 \leq b$ ώστε $f(x_0) = x_0$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $a \leq x_0 \leq b$ ώστε $g(x_0) = 0$. Από την υπόθεση, υπάρχουν $c, d \in [a, b]$ ώστε $a = f(c)$ και $b = f(d)$. Συνεπώς, $g(c) = a - c \leq 0$ και $g(d) = b - d \geq 0$. Αν $g(c) = 0$ ή $g(d) = 0$, τότε το c ή το d , αντίστοιχα, είναι σταθερό σημείο. Αλλιώς, $g(c) < 0$ και $g(d) > 0$, οπότε $c \neq d$ και από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει κάποιο x_0 μεταξύ των c και d ώστε $g(x_0) = 0$. \square

Το σταθερό σημείο της Πρότασης 2.1.1 ενδέχεται να μην είναι μοναδικό. Μια συνθήκη για μοναδικότητα δίνεται στη συνέχεια.

Πρόταση 2.1.2. *Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα κλειστό διάστημα και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση με $I \subset f(I)$. Αν $|f'(x)| < 1$ για κάθε $x \in I$, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in I$ ώστε $f(x_0) = x_0$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής, για κάθε $x, y \in I$ με $x \neq y$ υπάρχει $\zeta \in I$ μεταξύ των x και y ώστε $f(x) - f(y) = f'(\zeta)(x - y)$. Συνεπώς, $|f(x) - f(y)| < |x - y|$. Αν λοιπόν υπάρχουν δύο διαφορετικά σταθερά σημεία x και y , τότε προκύπτει ότι

$$|x - y| < |f(x) - f(y)| < |x - y|,$$

που είναι αντίφαση. \square

Όπως δείχνει η προηγούμενη απόδειξη, η συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις υποθέσεις της Πρότασης 2.1.2, έχει την ιδιότητα $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ για κάθε $x, y \in I$ με $x \neq y$.

Δηλαδή η f είναι Lipschitz με σταθερά 1. Γενικά, αν (X, d) και (Y, ρ) είναι δύο μετρικοί χώροι, μια συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ λέγεται Lipschitz με σταθερά λ όταν

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$$

για κάθε $x, y \in X$. Προφανώς, κάθε συνάρτηση Lipschitz είναι ομοιόμορφα συνεχής. Μια συνάρτηση Lipschitz με σταθερά $\lambda < 1$ λέγεται συστολή.

Λήμμα 2.1.3. *Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό και κυρτό σύνολο και $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ μια C^1 συνάρτηση. Αν υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε $\|Df(x)\| \leq \lambda$ για κάθε $x \in A$, τότε*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$$

για κάθε $x, y \in A$.

Απόδειξη. Επειδή το A υποτίθεται κυρτό, το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα x και y περιέχεται στο A , δηλαδή $\gamma(t) = (1-t)x + ty \in A$ για κάθε $0 \leq t \leq 1$. Από τον κανόνα της αλυσίδας, η συνάρτηση (παραμετρισμένη καμπύλη) $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι C^1 και

$$(f \circ \gamma)'(t) = Df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = Df((1-t)x + ty) \cdot (y - x).$$

Συνεπώς και η συνάρτηση $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $F(t) = \langle f(y) - f(x), f((1-t)x + ty) \rangle$ είναι C^1 , όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο. Από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής, υπάρχει $0 < \zeta < 1$ ώστε $F(1) - F(0) = F'(\zeta)$. Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\|^2 &= \langle f(y) - f(x), Df((1-\zeta)x + \zeta y) \cdot (y - x) \rangle \\ &\leq \|f(y) - f(x)\| \cdot \|Df((1-\zeta)x + \zeta y) \cdot (y - x)\| \leq \|f(y) - f(x)\| \cdot \lambda \cdot \|y - x\|. \quad \square \end{aligned}$$

Πόρισμα 2.1.4. *Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό και κυρτό σύνολο και $f : A \rightarrow A$ μια C^1 απεικόνιση. Αν υπάρχει $\lambda < 1$ ώστε $\|Df(x)\| \leq \lambda$ για κάθε $x \in A$, η f είναι συστολή. \square*

Παραδείγματα 2.1.5. (α) Εστω $c \in \mathbb{R}$ και $f_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η απεικόνιση

$$f_c(x) = \frac{1}{2}x + \frac{c}{2}.$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο Πόρισμα 2.1.4 η f_c είναι συστολή. Τα σταθερά σημεία της είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f_c(x) = x$. Συνεπώς, το μοναδικό σταθερό σημείο της f_c είναι το c . Προκύπτει επαγωγικά ότι

$$|f_c^n(x) - c| = |f_c^n(x) - f_c^n(c)| = \frac{1}{2^n} |x - c|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αρα $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_c^n(x) = c$.

(β) Οπως είδαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.1, η συνάρτηση g , που ορίστηκε εκεί, είναι συστολή και το όριο $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(x)$ είναι το σταθερό σημείο της.

(γ) Εστω $a < b$ και $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^1 συνάρτηση. Αν $|f'(x)| < 1$ για κάθε $a \leq x \leq b$, η f είναι συστολή. Πράγματι, επειδή η f είναι C^1 , υπάρχει $a \leq x_0 \leq b$ ώστε $|f'(x)| \leq |f'(x_0)|$ για κάθε $a \leq x \leq b$. Αν λοιπόν θέσουμε $\lambda = |f'(x_0)|$, τότε $\lambda < 1$ και η f είναι συστολή, αφού από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής έχουμε $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$ για κάθε $x, y \in [a, b]$.

Το ακόλουθο πολύ σημαντικό θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη μοναδικού σταθερού σημείου για τις συστολές.

Θεώρημα 2.1.6. *Εστω (X, d) ένας πλήρης μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow X$ μια συστολή, δηλαδή υπάρχει $\lambda < 1$ ώστε $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$. Τότε η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο.*

Απόδειξη. Αν η f έχει δύο σταθερά σημεία $x_0 \neq y_0$, τότε

$$0 < d(x_0, y_0) = d(f(x_0), f(y_0)) \leq \lambda d(x_0, y_0) < d(x_0, y_0),$$

που είναι αντίφαση. Προχωρούμε τώρα στην απόδειξη της ύπαρξης σταθερού σημείου. Εστω $x \in X$ ένα οποιοδήποτε σημείο. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leq \lambda d(f^{n-1}(x), f^n(x)) \leq \dots \leq \lambda^n d(x, f(x))$$

και συνεπώς για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m > n$ έχουμε

$$\begin{aligned} d(f^n(x), f^m(x)) &\leq d(f^n(x), f^{n+1}(x)) + d(f^{n+1}(x), f^{n+2}(x)) + \dots + d(f^{m-1}(x), f^m(x)) \\ &\leq (\lambda^n + \lambda^{n+1} + \dots + \lambda^{m-1})d(x, f(x)) \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+n}\right)d(x, f(x)) = \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \cdot d(x, f(x)). \end{aligned}$$

Αφού $\lambda < 1$, η $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy. Επειδή ο X είναι πλήρης, υπάρχει ένα $x_0 \in X$ ώστε $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = x_0$. Το x_0 είναι σταθερό σημείο της f , γιατί λόγω της συνέχειας $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{n+1}(x) = x_0$. \square

Παράδειγμα 2.1.7. Εστω $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ η απεικόνιση με τύπο

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Η f είναι C^∞ και $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ για κάθε $x > 0$, οπότε η f είναι γνήσια φθίνουσα. Το διάστημα $(0, +\infty)$ εφοδιασμένο με την συνηθισμένη απόσταση δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος. Έχουμε όμως $f(3/2) = 5/3$ και $f(2) = 3/2$. Λόγω της μονοτονίας λοιπόν

$$f\left(\left[\frac{3}{2}, 2\right]\right) \subset \left[\frac{3}{2}, 2\right].$$

Επιπλέον,

$$|f'(x)| = \frac{1}{x^2} \leq \frac{4}{9} < 1$$

για κάθε $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$. Το κλειστό διάστημα $[\frac{3}{2}, 2]$ είναι τώρα πλήρης μετρικός χώρος και η $f|_{[\frac{3}{2}, 2]}$ είναι συστολή. Κατά συνέπεια, η f έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο a στο διάστημα

$[\frac{3}{2}, 2]$ και $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x)$ για κάθε $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$, όπως δείχνει η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.6. Το όριο a είναι η θετική λύση της εξίσωσης

$$a = 1 + \frac{1}{a},$$

δηλαδή $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Δίνουμε τώρα μερικούς γενικούς ορισμούς εννοιών που έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει.

Ορισμός 2.1.8. Εστω X ένα μη-κενό σύνολο και $f : X \rightarrow X$ μια απεικόνιση. Για κάθε $x \in X$ το σύνολο

$$\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}^+\} = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\}$$

λέγεται *τροχιά* του σημείου x . Όταν η f είναι αντιστρέψιμη, τότε *τροχιά* λέγεται το σύνολο

$$\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, f^{-n}(x), \dots, f^{-1}(x), x, f(x), \dots, f^n(x), \dots\},$$

ενώ το προηγούμενο λέγεται *θετική ημιτροχιά*.

Ορισμός 2.1.9. Εστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow X$ μια συνεχής απεικόνιση. Αν το $x_0 \in X$ είναι ένα σταθερό σημείο της f , το σύνολο

$$W(x_0) = \{x \in X : \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = x_0\}$$

λέγεται *πεδίο έλξης* του σταθερού σημείου x_0 .

Όπως δείχνει η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.6, το πεδίο έλξης του μοναδικού σταθερού σημείου μιας συστολής $f : X \rightarrow X$ ενός πλήρους μετρικού χώρου (X, d) είναι ολόκληρος X .

Παράδειγμα 2.1.10. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η απεικόνιση $f(x) = -x^3$. Όπως βλέπουμε επαγωγικά, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $f^n(x) = (-1)^n x^{3^n}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Προφανώς, $f(0) = 0$ και $f(1) = -1$, $f(-1) = 1$. Αν $|x| > 1$, τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f^n(x)| = +\infty$, ενώ για $|x| < 1$ έχουμε $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 0$. Συνεπώς, το πεδίο έλξης του σταθερού σημείου 0 είναι το ανοιχτό διάστημα $(-1, 1)$.

Ασκήσεις

1. Εστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η απεικόνιση

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{2x}.$$

Να αποδειχθεί ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = \sqrt{5}$ για κάθε $x > 0$.

2. Εστω $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ η απεικόνιση $f(x) = \sqrt{x+2}$. Να αποδειχθεί ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 2$ για κάθε $x \geq 0$.
3. Εστω $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ η απεικόνιση $f(x) = x + e^{-x}$. Να αποδειχθεί ότι $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, όταν $x \neq y$, αλλά η f δεν έχει κανένα σταθερό σημείο.
4. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^2 απεικόνιση και $x_0 \in \mathbb{R}$ ένα σταθερό σημείο της ώστε $|f'(x_0)| = 1$ και $f''(x_0) \neq 0$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$ ώστε $x \notin W(x_0)$.
5. Εστω (X, d) ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow X$ μία συνεχής απεικόνιση. Αν $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$, να αποδειχθεί ότι η f έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο $\xi \in X$ και $W(\xi) = X$, δηλαδή $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = \xi$ για κάθε $x \in X$.

2.2 Υπερβολικά περιοδικά σημεία

Εστω X ένα μη-κενό σύνολο, $A \subset X$ και $f : A \rightarrow X$ μια απεικόνιση. Το $x \in A$ λέγεται περιοδικό σημείο της f όταν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f^n(x) = x$. Ο θετικός ακέραιος

$$N = \min\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) = x\}$$

λέγεται περίοδος του περιοδικού σημείου x . Προφανώς, αν το x είναι περιοδικό σημείο της f περιόδου N , τότε η τροχιά του είναι το πεπερασμένο σύνολο $\{x, f(x), \dots, f^{N-1}(x)\}$. Κάθε σταθερό σημείο είναι περιοδικό σημείο περιόδου 1. Αν το $x \in X$ είναι περιοδικό σημείο της f περιόδου N και $f^n(x) = x$, τότε ο N διαιρεί τον n , όπως εύκολα βλέπουμε.

Το $x \in A$ λέγεται τελικά σταθερό σημείο της f όταν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $f^{n+1}(x) = f^n(x)$ για κάθε $n \geq n_0$. Το x λέγεται τελικά περιοδικό σημείο όταν υπάρχουν $n_0 \in \mathbb{N}$ και $N \in \mathbb{N}$ ώστε $f^{n+N}(x) = f^n(x)$ για κάθε $n \geq n_0$.

Ορισμός 2.2.1. Εστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow X$ μια συνεχής απεικόνιση. Αν το $x_0 \in X$ είναι ένα περιοδικό σημείο της f περιόδου N , το σύνολο

$$W(x_0) = \{x \in X : \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{nN}(x) = x_0\}$$

λέγεται πεδίο έλξης του x_0 .

Από τη συνέχεια είναι προφανές ότι αν $x \in W(x_0)$, τότε $f^k(x) \in W(f^k(x_0))$ για κάθε ακέραιο $0 \leq k < N$.

Παραδείγματα 2.2.2. (α) Η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -x^3$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο το 0 και $f(1) = -1$, $f(-1) = 1$. Συνεπώς, τα 1 και -1 είναι περιοδικά σημεία της f περιόδου 2 και συναποτελούν μια περιοδική τροχιά. Δεν υπάρχουν άλλα περιοδικά σημεία της f . Εύκολα βλέπουμε ότι $W(1) = \{1\}$ και $W(-1) = \{-1\}$.

(β) Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η απεικόνιση $f(x) = |x - 1|$. Προφανώς, $f(0) = 1$ και $f(1) = 0$, που σημαίνει ότι τα 0 και 1 είναι περιοδικά περιόδου 2. Ομως, $f(-1) = 2$ και $f(-k) = k + 1$, $f(k) = k - 1$ για κάθε ακέραιο $k \geq 2$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε ακέραιος είναι τελικά περιοδικό σημείο της f . Το $W(0)$ είναι το σύνολο των άρτιων ακεραίων, γιατί αν ο k είναι

έναν θετικό ακέραιο τότε $f^{2(n+1)}(-2k) = f^{2n}(2k) = 0$ για $n \geq k$.

Πρόταση 2.2.3. *Εστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow X$ μια συνεχής απεικόνιση. Αν $x_1, x_2 \in X$ είναι δύο περιοδικά σημεία της f και $x_1 \neq x_2$, τότε $W(x_1) \cap W(x_2) = \emptyset$.*

Απόδειξη. Εστω N_1 και N_2 οι περίοδοι των x_1 και x_2 , αντίστοιχα. Προχωρούμε με απαγωγή στο άτοπο υποθέτοντας ότι υπάρχει κάποιο $x \in W(x_1) \cap W(x_2)$, δηλαδή $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{nN_1}(x) = x_1$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{nN_2}(x) = x_2$. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x_1, f^{nN_1}(x)) < \epsilon/2$ και $d(x_2, f^{nN_2}(x)) < \epsilon/2$ για κάθε $n \geq n_0$. Προκύπτει ότι

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, f^{n_0 N_1 N_2}(x)) + d(x_2, f^{n_0 N_1 N_2}(x)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

για κάθε $\epsilon > 0$, δηλαδή $d(x_1, x_2) = 0$. Συνεπώς, $x_1 = x_2$. \square

Ορισμός 2.2.4. Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^1 απεικόνιση. Ένα περιοδικό σημείο $x_0 \in I$ της f με περίοδο N λέγεται υπερβολικό όταν $|(f^N)'(x_0)| \neq 1$.

Η σημασία της υπερβολικότητας καταδεικνύεται από την ακόλουθη.

Πρόταση 2.2.5. *Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^1 απεικόνιση. Εστω $x_0 \in I$ ένα υπερβολικό σταθερό σημείο της f .*

- (α) *Αν $|f'(x_0)| < 1$, τότε υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $J \subset I$ με $x_0 \in J \subset W(x_0)$.*
 (β) *Αν $|f'(x_0)| > 1$, τότε υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $J \subset I$ με $x_0 \in J$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in J$ με $x \neq x_0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f^n(x) \notin J$.*

Απόδειξη. (α) Επειδή η f είναι C^1 , υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $J \subset I$ με κέντρο x_0 ώστε

$$|f'(x)| < \frac{1}{2}(1 + |f'(x_0)|) < 1$$

για κάθε $x \in J$. Αν θέσουμε $\lambda = \frac{1}{2}(1 + |f'(x_0)|)$, για κάθε $x \in J$ με $x \neq x_0$ έχουμε

$$|f(x) - x_0| = |f(x) - f(x_0)| < \lambda|x - x_0|$$

από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής. Ειδικά, $f(x) \in J$ και το $f^2(x) = f(f(x))$ ορίζεται. Επαγωγικά τώρα βλέπουμε ότι

$$|f^n(x) - x_0| < \lambda^n|x - x_0|$$

και $f^n(x) \in J$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $0 < \lambda < 1$, προκύπτει ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f^n(x) - x_0| = 0$.

(β) Υπάρχει $1 < \lambda < |f'(x_0)|$ και πάλι λόγω της συνέχειας της f' υπάρχει ένα φραγμένο ανοιχτό διάστημα $J \subset I$ με κέντρο x_0 ώστε $|f'(x)| > \lambda$ για κάθε $x \in J$. Από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής, για κάθε $x \in J$ με $x \neq x_0$ έχουμε

$$|f(x) - x_0| = |f(x) - f(x_0)| > \lambda|x - x_0|.$$

Αν $f^n(x) \in J$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε επαγωγικά βλέπουμε ότι

$$|f^n(x) - x_0| > \lambda^n|x - x_0|,$$

οπότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f^n(x) - x_0| = +\infty$, αφού $\lambda > 1$. Αυτή η αντίφαση ολοκληρώνει την απόδειξη της πρότασης. \square

Πόρισμα 2.2.6. Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^1 απεικόνιση. Εστω $x_0 \in I$ ένα υπερβολικό περιοδικό σημείο της f περιόδου N .
 (α) Αν $|(f^N)'(x_0)| < 1$, τότε υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $J \subset I$ με $x_0 \in J \subset W(x_0)$.
 (β) Αν $|(f^N)'(x_0)| > 1$, τότε υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $J \subset I$ με $x_0 \in J$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in J$ με $x \neq x_0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f^{nN}(x) \notin J$. \square

Οδηγούμετε έτσι στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.2.7. Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^1 απεικόνιση. Ένα υπερβολικό περιοδικό σημείο $x_0 \in I$ της f με περίοδο N λέγεται *ελκυστικό* όταν $|(f^N)'(x_0)| < 1$ και *απωθητικό* όταν $|(f^N)'(x_0)| > 1$.

Παραδείγματα 2.2.6. (α) Η πολυωνυμική απεικόνιση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x)$ έχει τα σταθερά σημεία $0, 1$ και -1 . Έχουμε $f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 + 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ειδικά $f'(0) = 1/2$, $f'(\pm 1) = 2$. Συνεπώς, το 0 είναι ελκυστικό υπερβολικό σταθερό σημείο και τα $1, -1$ είναι απωθητικά.

(β) Η πολυωνυμική απεικόνιση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x - x^3$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο το 0 . Εδώ έχουμε $f'(x) = 1 - 3x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ειδικά $f'(0) = 1$. Συνεπώς, το 0 δεν είναι υπερβολικό σταθερό σημείο. Ομως, $|f'(x)| < 1$ για $0 < |x| < \sqrt{\frac{2}{3}}$, οπότε από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής προκύπτει ότι $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}) \subset W(0)$.

(γ) Το 0 είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της πολυωνυμικής απεικόνισης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x + x^3$ και $f'(x) = 1 + 3x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αφού $f'(0) = 1$, το 0 δεν είναι υπερβολικό σταθερό σημείο. Εδώ έχουμε $f'(x) > 1$ για κάθε $x \neq 0$ και συνεπώς $W(0) = \{0\}$, ενώ $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f^n(x)| = +\infty$ για $x \neq 0$.

(δ) Η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x - 1$ είναι C^∞ και το 0 είναι σταθερό σημείο της. Έχουμε $f'(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ειδικά $f'(0) = 1$. Συνεπώς, το 0 δεν είναι υπερβολικό σταθερό σημείο. Προφανώς, $f'(x) > 1$ για $x > 0$ και $0 < f'(x) < 1$ για $x < 0$. Από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής προκύπτει ότι $W(0) = (-\infty, 0]$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = +\infty$ για $x > 0$.

Ασκήσεις

- Να ευρεθούν τα περιοδικά σημεία των παρακάτω απεικονίσεων.
 - $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x - x^2$.
 - $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x$.
 - $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \arctan x$.
 - $f : (-1, 1) \rightarrow (-1, 1)$ με $f(x) = \sin x$.
 - $f : (-1, 1) \rightarrow (-1, 1)$ με $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$.

Ποιά από αυτά είναι υπερβολικά; Ποιά είναι τα πεδία έλξης τους;

2. Να αποδειχθεί ότι το μοναδικό σταθερό σημείο της $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ είναι υπερβολικό και ελκυστικό, και έχει πεδίο έλξης όλο το \mathbb{R} .

3. Εστω $a > 0$ και $f_a : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ η απεικόνιση με

$$f_a(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right).$$

Να ευρεθούν τα περιοδικά σημεία της f_a και να εξεταστεί αν είναι υπερβολικά. Αν $x_0 > 0$, ποιο είναι το όριο της $(f_a^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$;

4. Για κάθε $c > 0$ να ευρεθούν τα σταθερά σημεία της $f_c : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ με $f_c(x) = x^2 + c$ και να εξεταστεί αν είναι υπερβολικά.

5. Θεωρούμε την παραμετρισμένη οικογένεια C^∞ απεικονίσεων $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που δίνεται από τον τύπο $f_a(x) = x^3 - ax$ για $a \leq 1$.

(α) Αν $a \leq -1$, να αποδειχθεί ότι η f_a έχει μοναδικό σταθερό σημείο το 0, που δεν είναι υπερβολικό για $a = -1$ και είναι υπερβολικό-απωθητικό για $a < -1$. Επιπλέον, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_a^n(x)| = +\infty$ για κάθε $x \neq 0$. Μάλιστα, η f_a είναι αντιστρέψιμη και το πεδίο έλξης του 0 ως προς την f_a^{-1} είναι όλο το \mathbb{R} .

(β) Εστω ότι $-1 < a \leq 1$. Να αποδειχθεί ότι η f_a έχει ακριβώς τρία σταθερά σημεία $\xi_- < 0 < \xi_+$, όπου $\xi_- = -\xi_+$, από τα οποία τα ξ_- , ξ_+ είναι υπερβολικά-απωθητικά και το 0 είναι υπερβολικό-ελκυστικό για $|a| < 1$, ενώ δεν είναι υπερβολικό για $a = 1$. Να αποδειχθεί επίσης ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_a^n(x)| = +\infty$ για $|x| > \xi_+$ και $W(0) = (\xi_-, \xi_+)$.

2.3 Η λογιστική απεικόνιση

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την δυναμική της λογιστικής απεικόνισης $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$$

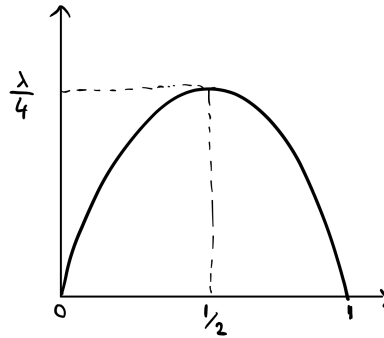
για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda > 0$. Στην πραγματικότητα έχουμε μια οικογένεια πολυωνυμικών απεικονίσεων 2ου βαθμού. Όπως είδαμε στην παράγραφο 1.1, η απεικόνιση αυτή περιγράφει ένα σχετικά ρεαλιστικό μοντέλο για την εξέλιξη πληθυσμών στα οποία οι γενιές είναι ξένες μεταξύ τους. Η παράμετρος λ είναι ο συντελεστής γονιμότητας. Βιολογικό ενδιαφέρον έχει η δυναμική στο διάστημα $[0, 1]$, γιατί η μεταβλητή x παριστά τον ποσοστιαίο πληθυσμό σε σχέση με ένα άνω όριο, πέρα από το οποίο έχουμε μείωση.

Η f_λ έχει σταθερά σημεία τα 0 και $1 - \frac{1}{\lambda}$, ενώ $f_\lambda(1) = 0$ και $f_\lambda(\frac{1}{\lambda}) = 1 - \frac{1}{\lambda}$, δηλαδή τα 1 και $1/\lambda$ είναι τελικά σταθερά. Προφανώς, $f'_\lambda(x) = \lambda - 2\lambda x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ειδικά

$$f'_\lambda(0) = \lambda, \quad f'_\lambda(1 - \frac{1}{\lambda}) = 2 - \lambda.$$

Η μέγιστη τιμή της f είναι $f_\lambda(1/2) = \lambda/4$. Συνεπώς, $f_\lambda([0, 1]) \subset [0, 1]$, για $0 < \lambda \leq 4$.

Αν $0 < \lambda < 1$, τα σταθερά σημεία είναι υπερβολικά. Το 0 είναι ελκυστικό και το $1 - \frac{1}{\lambda}$ είναι απωθητικό. Στην περίπτωση $\lambda = 1$, το 0 είναι το μοναδικό σταθερό σημείο και δεν είναι



Σχήμα 2.1: Γραφική παράσταση της λογιστικής απεικόνισης

υπερβολικό. Όπως διαπιστώσαμε στην παράγραφο 1.1, η δυναμική στο $[0, 1]$ για $0 < \lambda \leq 1$ είναι πολύ απλή, αφού τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_\lambda^n(x) = 0$, για κάθε $0 \leq x \leq 1$.

Στη συνέχεια θα υποθέτουμε ότι $\lambda > 1$. Τότε το 0 είναι απωθητικό υπερβολικό σταθερό σημείο και το δεύτερο σταθερό σημείο $1 - \frac{1}{\lambda}$ ανήκει στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$. Σύμφωνα με την πρόταση που ακολουθεί, η δυναμική των σημείων εκτός του διαστήματος $[0, 1]$ είναι πολύ απλή και συνεπώς στην συνέχεια θα επικεντρωθούμε στην δυναμική στο $[0, 1]$.

Πρόταση 2.3.1. Αν $x < 0$ ή $x > 1$, τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_\lambda^n(x) = -\infty$.

Απόδειξη. Όταν $x > 1$, τότε $f_\lambda(x) < 0$, οπότε η περίπτωση αυτή ανάγεται στην περίπτωση $x < 0$. Αν $x < 0$, τότε $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x) < x$ και συνεπώς η ακολουθία $(f_\lambda^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνήσια φθίνουσα. Αν είναι κάτω φραγμένη, τότε τό όριο της είναι σταθερό σημείο της f_λ στο διάστημα $(-\infty, 0)$, που δεν υπάρχει. \square

Πρόταση 2.3.2. Αν $1 < \lambda < 3$, τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_\lambda^n(x) = 1 - \frac{1}{\lambda}$ για κάθε $0 < x < 1$.

Απόδειξη. Εστω πρώτα ότι $1 < \lambda \leq 2$. Σε αυτή την περίπτωση $1 - \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{2}$ και η f_λ είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα $[0, 1 - \frac{1}{\lambda}]$, οπότε $x < f_\lambda(x) < 1 - \frac{1}{\lambda}$ για κάθε $0 < x < 1 - \frac{1}{\lambda}$.

Από αυτό προκύπτει ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_\lambda^n(x) = 1 - \frac{1}{\lambda}$ για κάθε $0 < x < 1 - \frac{1}{\lambda}$.

Επειδή η f_λ είναι συμμετρική περί το $1/2$, δηλαδή $f_\lambda(1-x) = f_\lambda(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε $0 < f_\lambda(x) = f_\lambda(1-x) < 1 - \frac{1}{\lambda}$ για κάθε $\frac{1}{\lambda} < x < 1$ και συνεπώς

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_\lambda^n(x) = 1 - \frac{1}{\lambda}$. Τέλος, για $1 - \frac{1}{\lambda} < x \leq \frac{1}{\lambda}$ έχουμε

$$1 - \frac{1}{\lambda} \leq f_\lambda(x) \leq \frac{1}{\lambda}$$

και $|f'_\lambda(x)| \leq |f'_\lambda(1 - \frac{1}{\lambda})| = 2 - \lambda$. Συνεπώς, $f_\lambda([1 - \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}]) \subset [1 - \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}]$ και η $f_\lambda|_{[1 - \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}]}$ είναι συστολή. Επειδή το μοναδικό σταθερό σημείο της f_λ σε αυτό το διάστημα είναι το

$1 - \frac{1}{\lambda}$, από το Θεώρημα 2.1.6 προκύπτει ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_\lambda^n(x) = 1 - \frac{1}{\lambda}$ για κάθε $1 - \frac{1}{\lambda} < x \leq \frac{1}{\lambda}$. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη στην περίπτωση $1 < \lambda \leq 2$.

Η απόδειξη στην περίπτωση $2 < \lambda < 3$ είναι λίγο πιο περίπλοκη, παρότι το σταθερό σημείο $1 - \frac{1}{\lambda}$ είναι υπερβολικό και ελκυστικό, αφού $|f'_\lambda(1 - \frac{1}{\lambda})| = |2 - \lambda|$. Τώρα $1 - \frac{1}{\lambda} > \frac{1}{2}$ και η f_λ δεν είναι πλέον γνήσια αύξουσα στο διάστημα $[0, 1 - \frac{1}{\lambda}]$.

Αν $I = [\frac{1}{\lambda}, \frac{\lambda}{4}]$, θα δείξουμε πρώτα ότι $f_\lambda(I) \subset I$. Προφανώς, $1 - \frac{1}{\lambda} \in I$, $1/2 \in I$ και βέβαια $0 \leq f_\lambda(x) \leq f_\lambda(\frac{1}{2}) = \frac{\lambda}{4}$ για κάθε $0 \leq x \leq 1$. Από την άλλη μεριά,

$$f_\lambda(\frac{\lambda}{4}) = \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^3}{16} > \frac{1}{\lambda},$$

γιατί αν $g(\lambda) = \frac{\lambda^3}{4} - \frac{\lambda^4}{16}$, τότε $g'(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^3}{4} = \frac{\lambda^2}{4}(3 - \lambda) > 0$, για $2 < \lambda < 3$, και συνεπώς $g(\lambda) > g(2) = 1$. Αφού όμως $\frac{\lambda}{4} - \frac{1}{2} > \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda}$, το $f_\lambda(\frac{\lambda}{4})$ είναι η ελάχιστη τιμή της f_λ στο I . Κατά συνέπεια, $f_\lambda(x) \geq f_\lambda(\frac{\lambda}{4}) > \frac{1}{\lambda}$ για κάθε $x \in I$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η τροχιά κάθε σημείου $0 < x < 1$ τελικά εισέρχεται στο I . Αυτό είναι τετριμένο όταν $x \in I$. Παρατηρούμε ότι

$$f_\lambda([0, \frac{1}{\lambda}]) = [0, 1 - \frac{1}{\lambda}],$$

γιατί η f_λ είναι αύξουσα στο διάστημα $[0, \frac{1}{\lambda}]$, αφού $\lambda > 2$. Προχωρούμε με απαγωγή στο άτοπο, υποθέτοντας ότι υπάρχει $0 < x < \frac{1}{\lambda}$ ώστε $f_\lambda^n(x) \notin I$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $f_\lambda^n(x) < \frac{1}{\lambda}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η $(f_\lambda^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνήσια αύξουσα, γιατί

$$f_\lambda(y) = \lambda y(1 - y) > \lambda y(1 - \frac{1}{\lambda}) = y(\lambda - 1) > y$$

για κάθε $0 < y < 1/\lambda$, αφού $\lambda > 2$. Το όριο της είναι ένα σταθερό σημείο της f_λ στο διάστημα $(0, \frac{1}{\lambda}]$, που όμως δεν υπάρχει. Αυτό δείχνει ότι η τροχιά κάθε σημείου του διαστήματος $(0, \frac{\lambda}{4}] = (0, \frac{1}{\lambda}] \cup I$ τελικά εισέρχεται στο I . Παρατηρούμε τέλος ότι για κάθε $\frac{\lambda}{4} \leq x \leq 1$ έχουμε $0 \leq f_\lambda(x) \leq \frac{\lambda}{4}$, αφού το $\lambda/4$ είναι η μέγιστη τιμή της f_λ . Συνεπώς οι τροχιές και αυτών των σημείων τελικά εισέρχονται στο I .

Λόγω των προηγουμένων, αρκεί να δείξουμε τώρα ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_\lambda^n(x) = 1 - \frac{1}{\lambda}$ για κάθε $x \in I$. Δυστυχώς ο περιορισμός της f_λ στο I δεν είναι συστολή, γιατί

$$f'_\lambda(\frac{\lambda}{4}) = \lambda(1 - \frac{\lambda}{2}),$$

που είναι μικρότερο από -1 , όταν το $2 < \lambda < 3$ είναι πολύ κοντά στο 3. Γιαυτό θεωρούμε την f_λ^2 , για την οποία επίσης ισχύει $f_\lambda^2(I) \subset I$. Επειδή η f_λ είναι γνήσια αύξουσα στο

διάστημα $[\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{2}]$, γνήσια φθίνουσα στο $[\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{\lambda}]$ και

$$f_\lambda([\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{2}]) = f_\lambda([\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{\lambda}]) = [1 - \frac{1}{\lambda}, \frac{\lambda}{4}],$$

έχουμε $f_\lambda([\frac{1}{\lambda}, 1 - \frac{1}{\lambda}]) = [1 - \frac{1}{\lambda}, \frac{\lambda}{4}]$. Από την άλλη μεριά

$$f_\lambda([1 - \frac{1}{\lambda}, \frac{\lambda}{4}]) = [f_\lambda(\frac{\lambda}{4}), 1 - \frac{1}{\lambda}] \subset [\frac{1}{\lambda}, 1 - \frac{1}{\lambda}],$$

γιατί η f_λ είναι γνήσια φθίνουσα στο διάστημα $[1 - \frac{1}{\lambda}, \frac{\lambda}{4}]$ και $f_\lambda(\frac{\lambda}{4}) > \frac{1}{\lambda}$, όπως είδαμε παραπάνω. Κατά συνέπεια,

$$f_\lambda^2([\frac{1}{\lambda}, 1 - \frac{1}{\lambda}]) \subset f_\lambda^2([\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{\lambda}]) \subset [\frac{1}{\lambda}, 1 - \frac{1}{\lambda}].$$

Εκτιμούμε τώρα το $f_\lambda^2(1/2)$ σε σχέση με το $1/2$. Υπολογίζουμε ότι

$$f_\lambda^2(\frac{1}{2}) = \frac{\lambda^2(4 - \lambda)}{16}.$$

Η C^∞ συνάρτηση $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(\lambda) = \frac{\lambda^2(4 - \lambda)}{16}$ έχει τιμές $h(2) = 1/2$ και $h(3) = 9/16 > 1/2$. Επιπλέον,

$$h'(\lambda) = \frac{8\lambda - 3\lambda^2}{16} \quad \text{και} \quad h''(\lambda) = \frac{8 - 6\lambda}{16} < 0$$

για $\lambda \geq 2$. Συνεπώς, η h είναι αύξουσα από το 2 μέχρι το $8/3$, φθίνουσα από το $8/3$ μέχρι το 3 και σε αυτό το διάστημα στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω. Συμπεραίνουμε από αυτά ότι $f_\lambda^2(1/2) > 1/2$, που δείχνει ότι

$$f_\lambda^2([\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{\lambda}]) \subset (\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{\lambda}].$$

Επειδή

$$f_\lambda^2(x) - x = -\lambda x(x - \frac{\lambda - 1}{\lambda})[\lambda^2 x^2 - \lambda(\lambda + 1)x + (\lambda + 1)]$$

και η διακρίνουσα του τριωνύμου μέσα στην αγκύλη είναι $\lambda^2(\lambda + 1)(\lambda - 3) < 0$, για $2 < \lambda < 3$, προκύπτει ότι $f_\lambda^2(x) > x$ για κάθε $\frac{1}{2} \leq x < 1 - \frac{1}{\lambda}$. Αφού το $1 - \frac{1}{\lambda}$ είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της f_λ^2 στο διάστημα $[\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{\lambda}]$, συμπεραίνουμε ότι

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_\lambda^{2n}(x) = 1 - \frac{1}{\lambda}$ για κάθε $\frac{1}{2} \leq x \leq 1 - \frac{1}{\lambda}$. Λόγω της συνέχειας όμως έχουμε και $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_\lambda^{2n+1}(x) = 1 - \frac{1}{\lambda}$. Αυτό δείχνει ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_\lambda^n(x) = 1 - \frac{1}{\lambda}$ για κάθε $\frac{1}{2} \leq x \leq 1 - \frac{1}{\lambda}$ και κατά συνέπεια για κάθε $x \in I$. \square

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τη δυναμική της λογιστικής απεικόνισης f_λ στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$ για τιμές της παραμέτρου $\lambda > 4$, όπου όπως θα δούμε η ασυμπτωτική συμπεριφορά των τροχιών μπορεί να είναι εξαιρετικά περίπλοκη, σε αντίθεση με τις τιμές $1 < \lambda < 3$,

όπου σύμφωνα με την προηγούμενη Πρόταση 2.3.2 είναι πολύ απλή. Στην περίπτωση $\lambda > 4$ υπάρχουν σημεία στο $[0, 1]$ των οποίων η τροχιά σε κάποιο χρόνο βρίσκεται εκτός του $[0, 1]$ και συνεπώς αποκλίνει προς το $-\infty$, σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.1. Ένα τέτοιο σημείο είναι για παράδειγμα το $1/2$. Μας ενδιαφέρει λοιπόν το σύνολο των σημείων, των οποίων η τροχιά βρίσκεται ολόκληρη στο $[0, 1]$. Ας σημειωθεί ότι αν $0 \leq f_\lambda(x) \leq 1$ τότε οπωσδήποτε $0 \leq x \leq 1$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$A_n = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq f_\lambda^n(x) \leq 1\} = \{x \in [0, 1] : f_\lambda(x), f_\lambda^2(x), \dots, f_\lambda^n(x) \in [0, 1]\}.$$

Προφανώς, $A_{n+1} \subset A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και μας ενδιαφέρει να περιγράψουμε το σύνολο

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

που είναι συμπαγές, ως τομή κλειστών υποσυνόλων του $[0, 1]$ και f_λ -αναλλοίωτο, δηλαδή $f_\lambda(A) = A$.

Ως πρώτο βήμα, παρατηρούμε ότι

$$[0, 1] \setminus A_1 = \{x \in \mathbb{R} : \lambda x(1-x) > 1\} = \left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2\lambda}, \frac{\lambda + \sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2\lambda} \right).$$

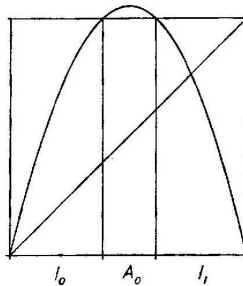
Το A_1 λοιπόν αποτελείται από δύο ξένα μεταξύ τους κλειστά διαστήματα I_0 και I_1 . Συγκεκριμένα,

$$I_0 = \left[0, \frac{\lambda - \sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2\lambda} \right], \quad I_1 = \left[\frac{\lambda + \sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2\lambda}, 1 \right]$$

και $A_1 = I_0 \cup I_1$. Αφού $f_\lambda(0) = f_\lambda(1) = 0$ και

$$f_\lambda\left(\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2\lambda}\right) = 1,$$

τα άκρα καθενός από τα διαστήματα I_0 και I_1 απεικονίζονται στα 0 και 1 και είναι τελικά σταθερά. Από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής προκύπτει ότι $f_\lambda(I_0) = f_\lambda(I_1) = [0, 1]$. Επιπλέον, η f_λ είναι γνήσια άξουσα στο I_0 και γνήσια φθίνουσα στο I_1 , γιατί $I_0 \subset [0, 1/2)$ και $I_1 \subset (1/2, 1]$.



Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε τώρα την ακόλουθη παρόμοια περιγραφή.

Πρόταση 2.3.3. Το σύνολο A_n αποτελείται από 2^n ξένα μεταξύ τους κλειστά διαστήματα. Αν I είναι ένα από αυτά, τότε $f_\lambda^n(I) = [0, 1]$ και η f_λ^n είναι γνήσια μονότονη στο I .

Απόδειξη. Προχωρούμε επαγωγικά. Η περίπτωση $n = 1$ αποδείχθηκε από τις αμέσως προηγούμενες παρατηρήσεις. Υποθέτουμε ότι το A_n αποτελείται από 2^n ξένα μεταξύ τους κλειστά διαστήματα και αν $I = [a, b]$ είναι ένα από αυτά, τότε $f_\lambda^n(I) = [0, 1]$ και η f_λ^n είναι γνήσια μονότονη στο I . Θα υποθέσουμε ότι η f_λ^n είναι γνήσια αύξουσα στο I . Η απόδειξη είναι όμοια όταν είναι γνήσια φθίνουσα.

Από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής και τη μονοτονία στο $[a, b]$ υπάρχουν μοναδικά $a < x_1 < x_2 < b$, ώστε

$$f_\lambda^n([a, x_1]) = I_0 = \left[0, \frac{\lambda - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2\lambda}\right],$$

$$f_\lambda^n((x_1, x_2)) = \left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2\lambda}, \frac{\lambda + \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2\lambda}\right) \quad \text{και}$$

$$f_\lambda^n([x_2, b]) = I_1 = \left[\frac{\lambda + \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2\lambda}, 1\right].$$

Συνεπώς τα δύο κλειστά διαστήματα $[a, x_1]$ και $[x_2, b]$ είναι ξένα μεταξύ τους και

$$f_\lambda^{n+1}([a, x_1]) = f_\lambda^{n+1}([x_2, b]) = [0, 1],$$

ενώ $f_\lambda^{n+1}(x) > 1$ για κάθε $x_1 < x < x_2$. Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο $I \cap A_{n+1}$ αποτελείται από τα δύο ξένα μεταξύ τους κλειστά διαστήματα $[a, x_1]$ και $[x_2, b]$ και δείχνει ότι το A_{n+1} αποτελείται από 2^{n+1} ξένα μεταξύ τους κλειστά διαστήματα.

Τέλος, για κάθε $a \leq x \leq x_1$ έχουμε $f'_\lambda(f_\lambda^n(x)) > 0$ και συνεπώς

$$(f_\lambda^{n+1})'(x) = f'_\lambda(f_\lambda^n(x)) \cdot (f_\lambda^n)'(x) > 0$$

από τον κανόνα της αλυσίδας. Ομοια, $(f_\lambda^{n+1})'(x) < 0$ για κάθε $x_2 \leq x \leq b$. Με άλλα λόγια η f_λ^{n+1} είναι γνήσια μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $[a, x_1]$ και $[x_2, b]$. \square

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα άκρα καθενός από τα 2^n ξένα μεταξύ τους κλειστά διαστήματα που συναποτελούν το A_n ανήκουν στο A και είναι τελικά σταθερά. Πράγματι, αν το a είναι άκρο ενός τέτοιου διαστήματος, τότε $f_\lambda^n(a) = 0$ ή 1 , σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.3, και συνεπώς $f_\lambda^k(a) = 0$ για κάθε $k \geq n + 1$.

Όπως δείχνει η απόδειξη της Πρότασης 2.3.3, τα 2^n κλειστά διαστήματα που συναποτελούν το A_n είναι δυνατόν να περιγραφούν κωδικοποιημένα. Για κάθε $s_0, s_1, \dots, s_n \in \{0, 1\}$ θέτουμε

$$I_{s_0 s_1 \dots s_n} = \{0 \leq x \leq 1 : f_\lambda^k(x) \in I_{s_k} \quad \text{για κάθε } 0 \leq k \leq n\}.$$

Αυτά είναι ακριβώς τα 2^{n+1} διαστήματα, από τα οποία αποτελείται το σύνολο A_{n+1} , όπως μπορούμε να δούμε επαγωγικά. Για $n = 0$ αυτό είναι τετριμμένο, αφού $A_1 = I_0 \cup I_1$. Εστω ότι το $I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}$ είναι ένα από τα 2^n κλειστά διαστήματα που αποτελούν το A_n . Προφανώς, $I_{s_0 s_1 \dots s_n} \subset I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}$, από τον ορισμό τους. Εστω ότι $I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}} = [a, b]$. Σύμφωνα με την απόδειξη της Πρότασης 2.3.3, έχουμε $f_\lambda^n([a, b]) = [0, 1]$ και η f_λ^n είναι μονότονη στο $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι είναι αύξουσα, αφού η απόδειξη είναι όμοια όταν είναι φθίνουσα. Το $I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}} \cap A_{n+1}$ αποτελείται από τα διαστήματα $[a, x_1]$ και $[x_2, b]$. Επειδή τα x_1 και x_2 της απόδειξης είναι μοναδικά λόγω της μονοτονίας, προκύπτει ότι αν $s_n = 0$, τότε $I_{s_0 s_1 \dots s_n} = [a, x_1]$, αφού $f_\lambda^n([a, x_1]) = I_0$, ενώ αν $s_n = 1$, τότε $I_{s_0 s_1 \dots s_n} = [x_2, b]$, αφού $f_\lambda^n([x_2, b]) = I_1$.

Στη συνέχεια θα υποθέτουμε ότι $\lambda > 2 + \sqrt{5}$. Ο κύριος λόγος είναι ότι τότε μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα το ακόλουθο.

Λήμμα 2.3.4. *Αν $\lambda > 2 + \sqrt{5}$, τότε υπάρχει $M > 1$ ώστε $|f'_\lambda(x)| \geq M$ για κάθε $x \in A_1$ και το μήκος κάθε διαστήματος που περιέχεται στο σύνολο A_n είναι το πολύ $\frac{1}{M^n}$.*

Απόδειξη. Επειδή τα κλειστά διαστήματα I_0 και I_1 , που συναποτελούν το A_1 , κείνται συμμετρικά ως προς το $1/2$ και $f'_\lambda(1-x) = -f'_\lambda(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$|f'_\lambda(x)| \geq \inf\{|f'_\lambda(x)| : x \in I_0\}$$

για κάθε $x \in A_1$. Η f'_λ είναι γνήσια φθίνουσα και συνεπώς

$$\lambda = f'_\lambda(0) \geq f'_\lambda(x) \geq f'_\lambda\left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2\lambda}\right) = \sqrt{\lambda(\lambda-4)} > 0$$

για κάθε $x \in I_0$. Προκύπτει από αυτό ότι

$$|f'_\lambda(x)| \geq \sqrt{\lambda(\lambda-4)} > \sqrt{(2+\sqrt{5})(-2+\sqrt{5})} = 1$$

για κάθε $x \in A_1$. Επειδή η f'_λ είναι συνεχής και το A_1 είναι συμπαγές σύνολο, υπάρχει $M > 1$ ώστε $|f'_\lambda(x)| > M$ για κάθε $x \in A_1$.

Εστω τώρα $a < b$ ώστε $[a, b] \subset A_n$. Από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής υπάρχει $a < \xi < b$ ώστε

$$|f_\lambda^n(b) - f_\lambda^n(a)| = |(f_\lambda^n)'(\xi)|(b-a) = (b-a) \prod_{k=0}^{n-1} f'_\lambda(f_\lambda^k(\xi)) \geq (b-a)M^n,$$

από τον κανόνα της αλυσίδας. Από την Πρόταση 2.3.3 όμως έχουμε ότι $|f_\lambda^n(b) - f_\lambda^n(a)| \leq 1$ και συνεπώς $b-a \leq (1/M)^n$. \square

Προχωρούμε τώρα στον καθορισμό της τοπολογικής δομής του συνόλου A . Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο $X \subset \mathbb{R}$ λέγεται τέλει, ή γενικότερα ένας μετρικός χώρος λέγεται τέλει, όταν δεν έχει μεμονωμένα σημεία ή ισοδύναμα κάθε σημείο του X είναι σημείο συσσώρευσης του X . Κάθε μη-κενό τέλει υποσύνολο του \mathbb{R} είναι υπεραριθμήσιμο.

Επίσης ένα σύνολο $X \subset \mathbb{R}$ είναι ολικά-μη-συνεκτικό όταν δεν περιέχει κανένα διάστημα.

Πρόταση 2.3.5. *Το σύνολο A είναι ολικά-μη-συνεκτικό και τέλει.*

Απόδειξη. Αν το σύνολο A περιέχει κάποιο διάστημα $[a, b]$, όπου $a < b$, τότε $[a, b] \subset A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το προηγούμενο Λήμμα 2.3.4, υπάρχει $M > 1$ ώστε

$$0 < b-a \leq \frac{1}{M^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό όμως είναι αντίφαση και αποδεικνύει ότι το A είναι ολικά-μη-συνεκτικό.

Για την τελειότητα πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $x \in A$ και κάθε $\epsilon > 0$ στο διάστημα $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ περιέχεται τουλάχιστον ακόμα ένα σημείο του A διαφορετικό από το x . Αφού

$M > 1$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $(1/M)^n < \epsilon$. Το x περιέχεται (ακριβώς) σε ένα διάστημα $[a, b]$, $a < b$, από τα 2^n ξένα μεταξύ τους κλειστά διαστήματα που συναποτελούν το A_n και $a, b \in A$, όπως σημειώθηκε αμέσως μετά από την Πρόταση 2.3.3. Πάλι από το Λήμμα 2.3.4 έχουμε

$$0 < b - a \leq \frac{1}{M^n} < \epsilon$$

και συνεπώς $x - \epsilon < a \leq x \leq b < x + \epsilon$. Με άλλα λόγια, $a, b \in (x - \epsilon, x + \epsilon) \cap A$ και τουλάχιστον ένα από τα δύο είναι διαφορετικό από το x . \square

Έτσι ολοκληρώνεται η τοπολογική περιγραφή του συνόλου A , έχοντας αποδείξει ότι είναι ένα σύνολο Cantor. Υπενθυμίζουμε ότι ένας οποιοσδήποτε συμπαγής, ολικά-μη-συνεκτικός, τέλειος μετρικός χώρος λέγεται σύνολο Cantor. Αποδεικνύεται στην Τοπολογία ότι όλα τα σύνολα Cantor είναι ομοιομορφικά μεταξύ τους. Δηλαδή, όλα τα σύνολα Cantor ταυτίζονται από τοπολογική άποψη.

Ασκήσεις

1. Να αποδειχθεί ότι αν $\lambda > 4$, τότε για κάθε πρώτο αριθμό $p \in \mathbb{N}$ η λογιστική απεικόνιση f_λ έχει τουλάχιστον 2^p περιοδικά σημεία περιόδου p . (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την Πρόταση 2.1.1.)

2. Αν $\lambda > 2 + \sqrt{5}$, να αποδειχθεί ότι όλα τα περιοδικά σημεία της λογιστικής απεικόνισης f_λ είναι υπερβολικά και απωθητικά.

3. Αν $\lambda > 2 + \sqrt{5}$, να αποδειχθεί ότι το σύνολο όλων των περιοδικών σημείων της λογιστικής απεικόνισης f_λ είναι πυκνό υποσύνολο του συνόλου A .

4. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η απεικόνιση

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{όταν } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 3 - 3x, & \text{όταν } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $C = \{0 \leq x \leq 1 : 0 \leq f^n(x) \leq 1 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\}$ είναι το συνηθισμένο σύνολο του Cantor. Να αποδειχθεί επιπλέον ότι η f απεικονίζει το $C \cap [0, \frac{1}{2}]$ ομοιομορφικά επί του C .

5. Αν $\lambda > 2 + \sqrt{5}$, να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in A$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $y \in A$ ώστε $|x - y| < \epsilon$ και $|f_\lambda^n(x) - f_\lambda^n(y)| \geq \frac{1}{2}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την παρατήρηση που ακολουθεί αμέσως μετά την Πρόταση 2.3.3 και ένα παρόμοιο επιχείρημα με αυτό της απόδειξης της Πρότασης 2.3.5.)

6. Έστω ότι $a > 4$ και $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η C^∞ απεικόνιση

$$f_a(x) = x^3 - ax.$$

Έστω A το f_a -αναλλοίωτο σύνολο που αποτελείται από όλα τα σημεία $x \in \mathbb{R}$ των οποίων η τροχιά $(f_a^n(x))_{n \in \mathbb{Z}^+}$ δεν αποκλίνει προς το $+\infty$ ή το $-\infty$. Να αποδειχθεί ότι το A είναι συμπαγές, ολικά-μη-συνεκτικό και τέλειο, δηλαδή τοπολογικά είναι ένα σύνολο του Cantor.

2.4 Η μετατόπιση στο χώρο ακολουθιών δύο συμβόλων

Συνεχίζοντας τη μελέτη της λογιστικής απεικόνισης για τιμές της παραμέτρου $\lambda > 2 + \sqrt{5}$, χρειάζεται να περιγράψουμε την δυναμική μέσα στο σύνολο Cantor A . Αυτό μπορεί να γίνει βολικά μέσα από την κατασκευή ενός μοντέλου του A , που ενδεχομένως να φαίνεται τεχνητό και περίεργο από πρώτη άποψη. Εκ των υστέρων όμως θα διαπιστώσουμε ότι αυτός είναι ο πιο απλός και υπολογιστικά αποτελεσματικός τρόπος περιγραφής της δυναμικής της λογιστικής απεικόνισης f_λ μέσα στο A . Οποτε αναφερόμαστε στη λογιστική απεικόνιση f_λ , θα χρησιμοποιούμε χωρίς υπενθύμιση τους συμβολισμούς της προηγούμενης παραγράφου 2.3.

Εστω $\Sigma_2 = \prod_{n=0}^{\infty} \{0, 1\}$, δηλαδή το Σ_2 αποτελείται από όλες τις ακολουθίες $(s_0, s_1, \dots, s_n, \dots)$, όπου για κάθε ακέραιο $n \geq 0$ έχουμε $s_n = 0$ ή 1 . Στο Σ_2 ορίζεται η συνάρτηση απόστασης $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ με

$$d(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|s_n - t_n|}{2^n},$$

όπου $s = (s_n)_{n \geq 0}$ και $t = (t_n)_{n \geq 0}$. Με αυτόν τον τρόπο το Σ_2 γίνεται μετρικός χώρος.

Παρατηρούμε ότι αν οι $N + 1$ πρώτοι όροι των ακολουθιών s και t ταυτίζονται, δηλαδή $s_n = t_n$ για $0 \leq n \leq N$, τότε

$$d(s, t) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|s_n - t_n|}{2^n} \leq \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|s_{n+N+1} - t_{n+N+1}|}{2^n} \leq \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N}.$$

Αντίστροφα, αν υπάρχει κάποιο $0 \leq m < N$ ώστε $s_m \neq t_m$, τότε

$$d(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|s_n - t_n|}{2^n} \geq \frac{1}{2^m} > \frac{1}{2^N}.$$

Με άλλα λόγια, αν $d(s, t) \leq \frac{1}{2^N}$, τότε $s_n = t_n$ για κάθε $0 \leq n < N$.

Παραδείγματα 2.4.1. (α) Η απόσταση των σημείων $s = 000\dots000\dots$ και $t = 0101\dots0101\dots$ είναι

$$d(s, t) = \frac{0}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{2}{3}.$$

(β) Το σύνολο όλων των τελικά μηδενικών σταθερών ακολουθιών

$$D = \{s = (s_n)_{n \geq 0} : \text{υπάρχει ακέραιος } N \geq 0 \text{ ώστε } s_n = 0 \text{ για κάθε } n \geq N\}$$

είναι πυκνό υποσύνολο του Σ_2 . Πράγματι, έστω $t = (t_n)_{n \geq 0} \in \Sigma_2$ και $\epsilon > 0$ οποιαδήποτε. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2^N} < \epsilon$. Θεωρούμε το σημείο $s = (s_n)_{n \geq 0} \in \Sigma_2$ με $s_n = t_n$ για $0 \leq n \leq N$ και $s_n = 0$ για $n > N$. Οπως παρατηρήσαμε προηγουμένως,

$$d(s, t) \leq \frac{1}{2^N} < \epsilon.$$

Δηλαδή, $s \in D \cap S(t, \epsilon)$ και γιαυτό το λόγο το $D \cap S(t, \epsilon)$ δεν είναι το κενό σύνολο. Αυτό δείχνει ότι το D είναι πυκνό υποσύνολο του Σ_2 .

Ο χώρος Σ_2 είναι ένα τοπολογικό μοντέλο για το f_λ -αναλλοίωτο σύνολο Cantor A , όταν $\lambda > 2 + \sqrt{5}$. Εστω $h : A \rightarrow \Sigma_2$ η απεικόνιση με $h(x) = (s_n)_{n \geq 0}$, όπου

$$s_n = \begin{cases} 0, & \text{όταν } f_\lambda^n(x) \in I_0 \\ 1, & \text{όταν } f_\lambda^n(x) \in I_1. \end{cases}$$

Με άλλα λόγια $h(x) = (s_n)_{n \geq 0}$, όταν $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$.

Πρόταση 2.4.2. Αν $\lambda > 2 + \sqrt{5}$, η απεικόνιση $h : A \rightarrow \Sigma_2$ είναι ομοιομορφισμός.

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι η h είναι ένα προς ένα. Από το Λήμμα 2.3.4 προκύπτει ότι για κάθε σημείο $s = (s_n)_{n \geq 0} \in \Sigma_2$ το $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ είναι μονοσύνολο, γιατί το μήκος του $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ είναι το πολύ $\frac{1}{M^{n+1}}$ και $M > 1$. Αν λοιπόν $h(x) = h(y) = s$, τότε $x = y$, γιατί $x, y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$.

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι η h είναι επί. Εστω $s = (s_n)_{n \geq 0} \in \Sigma_2$. Επειδή $I_{s_0 s_1 \dots s_n} \subset I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}$ για κάθε $n \geq 1$ και καθένα $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ είναι κλειστό υποδιάστημα του $[0, 1]$, προκύπτει ότι $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \dots s_n} \neq \emptyset$, γιατί το $[0, 1]$ είναι συμπαγές. Αν τώρα

$x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$, τότε $h(x) = s$, από το ορισμό της h .

Αποδεικνύουμε τώρα ότι η h είναι συνεχής. Εστω $x \in A$ με $h(x) = (s_n)_{n \geq 0}$ και $\epsilon > 0$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2^N} < \epsilon$. Για κάθε $0 \leq n \leq N$ έχουμε $f_\lambda^n(x) \in I_{s_n}$. Επειδή $I_0 \subset [0, 1/2)$ και $I_1 \subset (1/2, 1]$, και οι $f_\lambda, f_\lambda^2, \dots, f_\lambda^N$ είναι συνεχείς, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f_\lambda^n(y) \in I_{s_n}$, $0 \leq n \leq N$, για κάθε $y \in A$ με $|x - y| < \delta$. Αυτό σημαίνει ότι

$$A \cap (x - \delta, x + \delta) \subset \bigcap_{n=0}^N I_{s_0 s_1 \dots s_n}.$$

Συνεπώς, αν $y \in A \cap (x - \delta, x + \delta)$, τότε οι $N + 1$ πρώτοι όροι των ακολουθιών $h(x)$ και $h(y)$ ταυτίζονται και όπως είδαμε παραπάνω

$$d(h(x), h(y)) \leq \frac{1}{2^N} < \epsilon.$$

Αυτό δείχνει ότι η h είναι συνεχής. Επειδή, τέλος, το A είναι συμπαγές και η h είναι συνεχής, προκύπτει ότι η h^{-1} είναι επίσης συνεχής και άρα είναι ομοιομορφισμός. \square

Οι χώροι A και Σ_2 ταυτίζονται λοιπόν τοπολογικά, αφού η h είναι ομοιομορφισμός. Χρησιμοποιώντας την h μπορούμε να μεταφέρουμε την λογιστική απεικόνιση $f_\lambda|_A$ σε μια

τοπολογικά ισοδύναμη συνεχή απεικόνιση $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, που είναι η $\sigma = h \circ (f_\lambda|_A) \circ h^{-1}$. Δηλαδή, η σ κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_\lambda|_A} & A \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \Sigma_2 & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_2 \end{array}$$

Για τον υπολογισμό της σ υπενθυμίζουμε ότι $h(x) = (s_n)_{n \geq 0}$ τότε και μόνον τότε όταν $\{x\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$. Οπότε $\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots s_n \dots) = h(f_\lambda(x))$ και

$$\{f_\lambda(x)\} = f_\lambda \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \dots s_n} \right) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} f_\lambda(I_{s_0 s_1 \dots s_n}).$$

Ομως, $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = \{0 \leq x \leq 1 : x \in I_{s_0}, f_\lambda(x) \in I_{s_1}, f_\lambda^2(x) \in I_{s_2}, \dots, f_\lambda^n(x) \in I_{s_n}\}$, από όπου προκύπτει ότι

$$f_\lambda(I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}) = \{0 \leq y \leq 1 : y \in I_{s_1}, f_\lambda(y) \in I_{s_2}, \dots, f_\lambda^{n-1}(y) \in I_{s_n}\} = I_{s_1 s_2 \dots s_n}.$$

Συνεπώς,

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} f_\lambda(I_{s_0 s_1 \dots s_n}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_1 \dots s_n},$$

από όπου προκύπτει ότι $\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots s_n \dots) = (s_1 s_2 \dots s_n \dots)$.

Ορισμός 2.4.3. Η συνεχής απεικόνιση $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ με

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots s_n \dots) = (s_1 s_2 \dots s_n \dots)$$

λέγεται (αριστερή) μετατόπιση στον χώρο των ακολουθιών σε δύο σύμβολα.

Θα περιγράψουμε μερικές βασικές δυναμικές ιδιότητες της μετατόπισης. Προφανώς οι σταθερές ακολουθίες 000... και 111... είναι σταθερά σημεία της σ . Επίσης, κάθε τελικά σταθερή ακολουθία είναι τελικά σταθερό σημείο της σ . Σύμφωνα με το Παράδειγμα 2.4.1(β), το σύνολο των τελικά σταθερών σημείων της σ είναι πυκνό υποσύνολο του Σ_2 .

Εστω $s = (s_n)_{n \geq 0} \in \Sigma_2$ ένα περιοδικό σημείο της σ και $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\sigma^N(s) = s$. Τότε, $s_N = s_0$, $s_{N+1} = s_1, \dots, s_{2N-1} = s_{N-1}$ και επαγωγικά $s_{n+N} = s_n$ για κάθε ακέραιο $n \geq 0$. Με άλλα λόγια, το μπλόκ των N πρώτων διαδοχικών όρων της s επαναλαμβάνεται. Είναι προφανές ότι το σύνολο $P_N(\sigma) = \{s \in \Sigma_2 : \sigma^N(s) = s\}$ έχει 2^N στοιχεία, όσο είναι το πλήθος των διατάξεων των δύο συμβόλων 0 και 1 σε N θέσεις. Συνεπώς, το σύνολο των

περιοδικών σημείων $P(\sigma) = \bigcup_{N=1}^{\infty} P_N(\sigma)$ είναι αριθμήσιμο.

Πρόταση 2.4.4. Το σύνολο $P(\sigma)$ των περιοδικών σημείων της μετατόπισης είναι πυκνό υποσύνολο του Σ_2 .

Απόδειξη. Εστω $t = (t_n)_{n \geq 0} \in \Sigma_2$ και $\epsilon > 0$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $1/2^N < \epsilon$. Αν $s = (s_n)_{n \geq 0}$ είναι η ακολουθία με $s_n = t_n$ για $0 \leq n \leq N$ και $s_{n+N} = s_n$ για κάθε

ακέραιο $n \geq 0$, τότε $s \in P_N(\sigma)$ και $d(s, t) \leq \frac{1}{2^N} < \epsilon$. Αυτό δείχνει ότι το $P(\sigma)$ είναι πυκνό υποσύνολο του Σ_2 . \square

Εστω τώρα $t = (t_n)_{n \geq 0}$ και $s = (s_n)_{n \geq 0}$ δύο σημεία του Σ_2 . Το t είναι οριακό σημείο της τροχιάς $\{\sigma^n(s) : n \in \mathbb{N}\}$ του s ακριβώς τότε όταν για κάθε $N \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε $d(t, \sigma^n(s)) < 1/2^N$. Τότε όμως $t_0 = s_n$, $t_1 = s_{n+1}, \dots, t_{N-1} = s_{n+N-1}$. Αυτό σημαίνει ότι το t είναι οριακό σημείο της τροχιάς του s ακριβώς τότε όταν κάθε πεπερασμένο μπλόκ διαδοχικών όρων της t εμφανίζεται κάπου στην s .

Πρόταση 2.4.5. Υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του Σ_2 , του οποίου η τροχιά ως προς τη μετατόπιση είναι πυκνό υποσύνολο του Σ_2 .

Απόδειξη. Το σύνολο των λέξεων μήκους m από το αλφάβητο $\{0, 1\}$ αποτελείται από 2^m λέξεις. Συνεπώς, το σύνολο όλων των λέξεων οποιουδήποτε μήκους είναι αριθμήσιμο. Εστω $s^{(0)}, s^{(1)}, s^{(2)}, \dots, s^{(n)}, \dots$ μια οποιαδήποτε αρίθμηση. Η ακολουθία $s = (s^{(0)}, s^{(1)}, s^{(2)}, \dots, s^{(n)}, \dots)$ είναι σημείο του Σ_2 στο οποίο εμφανίζονται όλα τα δυνατά πεπερασμένα μπλόκ διαδοχικών όρων οποιουδήποτε μήκους. Σύμφωνα με την παρατήρηση που προηγήθηκε, κάθε σημείο του Σ_2 είναι οριακό σημείο της τροχιάς του s . Δηλαδή, η τροχιά του s είναι πυκνό υποσύνολο του Σ_2 . \square

Ένα παράδειγμα σημείου του Σ_2 με τροχιά που είναι πυκνό υποσύνολο του Σ_2 είναι η ακολουθία με αρχικούς όρους

0100011011...

και στη συνέχεια ακολουθούν όλες οι δυνατές λέξεις μήκους 3, ακολουθούμενες από όλες τις δυνατές λέξεις μήκους 4 κ.ο.κ. Το στοιχείο αυτό του Σ_2 λέγεται ακολουθία Morse και δεν είναι περιοδικό ούτε τελικά περιοδικό, αλλά η τροχιά του είναι πυκνό υποσύνολο του Σ_2 .

Ασκήσεις

1. Εστω $X = \{s = (s_n)_{n \geq 0} \in \Sigma_2 : s_{n+1} = 1, \text{ όταν } s_n = 0\}$, δηλαδή το σύνολο X αποτελείται από όλες τις ακολουθίες στο Σ_2 που δεν έχουν δύο διαδοχικούς μηδενικούς όρους.

(α) Να αποδειχθεί ότι το X είναι σ -αναλλοίωτο, δηλαδή $\sigma(X) = X$.

(β) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο όλων των περιοδικών σημείων της μετατόπισης που περιέχονται στο X είναι πυκνό υποσύνολο του X .

(γ) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του X , του οποίου η τροχιά ως προς τη μετατόπιση είναι πυκνό υποσύνολο του X .

2. Εστω $s = (s_n)_{n \geq 0} \in \Sigma_2$ το στοιχείο με $s_{2k} = 1$ και $s_{2k+1} = 0$ για κάθε ακέραιο $k \geq 0$. Να αποδειχθεί ότι το s είναι περιοδικό σημείο της μετατόπισης και να ευρεθεί το πεδίο έλξης του.

3. Έστω $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq 1}$ ένας 2×2 πίνακας τέτοιος ώστε $a_{ij} = 0$ ή 1 για κάθε $0 \leq i, j \leq 1$ (ένας τέτοιος πίνακας λέγεται $0-1$ πίνακας) και $A^m \neq 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}^+$. Αν

$$X = \{s = (s_n)_{n \geq 0} \in \Sigma_2 : a_{s_n s_{n+1}} = 1 \text{ για κάθε } n \geq 0\},$$

προφανώς $\sigma(X) \subset X$ και το X είναι κλειστό, άρα συμπαγές, υποσύνολο του Σ_2 . Το ζεύγος $(X, \sigma|_X)$ λέγεται τοπολογική αλυσίδα Markov (δύο καταστάσεων) με πίνακα μετάβασης A .

(α) Μία λέξη $s_0 \cdots s_m$ μήκους $m + 1$ από το αλφάβητο $\{0, 1\}$ λέγεται αποδεκτή (ως προς τον πίνακα μετάβασης A) αν $a_{s_n s_{n+1}} = 1$ για κάθε $0 \leq n < m$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $i, j \in \{0, 1\}$ το πλήθος των αποδεκτών λέξεων $i \cdots j$ μήκους $m + 1$ ισούται με το (i, j) στοιχείο του πίνακα A^m .

(β) Ο $0 - 1$ πίνακας A λέγεται ανάγωγος, όταν για κάθε $0 \leq i, j \leq 1$ υπάρχει κάποιο $m \in \mathbb{N}$ ώστε το (i, j) στοιχείο του πίνακα A^m να είναι θετικός αριθμός. Να αποδειχθεί ότι αν ο A είναι ανάγωγος, τότε το σύνολο των περιοδικών σημείων της $\sigma|_X$ είναι πυκνό υποσύνολο του X .

(γ) Ο $0 - 1$ πίνακας A λέγεται απεριοδικός, όταν υπάρχει κάποιο $m \in \mathbb{N}$ ώστε όλα τα στοιχεία του πίνακα A^m είναι θετικοί αριθμοί. Τότε για κάθε $k \geq m$ όλα τα στοιχεία του A^k είναι θετικοί αριθμοί και προφανώς ο A είναι ανάγωγος. Να αποδειχθεί ότι αν ο πίνακας μετάβασης είναι απεριοδικός, τότε για κάθε μη-κενό ανοιχτό υποσύνολο U του μετρικού χώρου X υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\sigma^k(U) = X$.

2.5 Τοπολογική συζυγία

Εστω X και Y δύο μετρικοί χώροι. Οι συνεχείς απεικονίσεις $f : X \rightarrow X$ και $g : Y \rightarrow Y$ λέγονται *τοπολογικά συζυγείς* αν υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $h : X \rightarrow Y$ ώστε $h \circ f = g \circ h$, δηλαδή το διάγραμμα που ακολουθεί είναι μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Ο ομοιομορφισμός h λέγεται *τοπολογική συζυγία* της f με την g . Ειδικά, οι χώροι X και Y ταυτίζονται από τοπολογική άποψη. Επιπλέον, η δυναμική της f ταυτίζεται με τη δυναμική της g .

Αν η απεικόνιση h , όπως παραπάνω, δεν είναι ομοιομορφισμός, αλλά μόνο συνεχής και επί, τότε λέγεται *τοπολογική ημισυζυγία* και η f λέγεται *τοπολογικά ημισυζυγής* προς την g .

Πρόταση 2.5.1. *Εστω X και Y δύο μετρικοί χώροι και $f : X \rightarrow X$ και $g : Y \rightarrow Y$ δύο συνεχείς απεικονίσεις. Αν η f είναι τοπολογικά συζυγής με την g μέσω μιας τοπολογικής συζυγίας $h : X \rightarrow Y$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα.*

(α) $H h^{-1} : Y \rightarrow X$ είναι τοπολογική συζυγία της g με την f .

(β) $h \circ f^n = g^n \circ h$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Το $x \in X$ είναι περιοδικό σημείο της f περιόδου N τότε και μόνον τότε όταν το $h(x) \in Y$ είναι περιοδικό σημείο της g περιόδου N . Επιπλέον, $W(h(x)) = h(W(x))$.

(δ) Η τροχιά του $x \in X$ από την f είναι πυκνό υποσύνολο του X τότε και μόνον τότε όταν η τροχιά του $h(x) \in Y$ από την g είναι πυκνό υποσύνολο του Y .

Απόδειξη. Το (α) είναι προφανές γιατί η h^{-1} είναι επίσης ομοιομορφισμός και η ισότητα $h \circ f = g \circ h$ είναι ισοδύναμη με την $g = h \circ f \circ h^{-1}$, δηλαδή $h^{-1} \circ g = f \circ h^{-1}$.

Το (β) προκύπτει επαγωγικά, γιατί

$$h \circ f^n = (h \circ f) \circ f^{n-1} = (g \circ h) \circ f^{n-1} = g \circ (h \circ f^{n-1}) = \cdots = g^n \circ h.$$

Για το (γ) έχουμε $f^N(x) = x$ και ο αθέριος $N \geq 1$ είναι ο ελάχιστος με αυτή την ιδιότητα. Συνεπώς,

$$h(x) = h(f^N(x)) = (h \circ f^N)(x) = (g^N \circ h)(x) = g^N(h(x)).$$

Επιπλέον, για κάθε $1 \leq n < N$ έχουμε

$$g^n(h(x)) = h(f^n(x)) \neq h(x),$$

γιατί η h είναι ένα προς ένα, ως ομοιομορφισμός. Συνεπώς το $h(x) \in Y$ είναι περιοδικό σημείο της g περιόδου N . Το αντίστροφο αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο. Επειδή η h είναι ομοιομορφισμός, έχουμε τώρα $y \in W(h(x))$ ακριβώς τότε όταν $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^{nN}(y) = h(x)$, που είναι ισοδύναμο με $\lim_{n \rightarrow +\infty} h^{-1}(g^{nN}(y)) = x$, δηλαδή $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{nN}(h^{-1}(y)) = x$ ή με άλλα λόγια $h^{-1}(y) \in W(x)$.

Τέλος, για το (δ), έστω $x \in X$ ένα σημείο του οποίου η τροχιά από την f είναι πυκνό υποσύνολο του X . Τότε για κάθε $y \in Y$ υπάρχει μια ακολουθία θετικών ακεραίων $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ώστε $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{n_k}(x) = h^{-1}(y)$ και συνεπώς

$$y = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(f^{n_k}(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g^{n_k}(h(x)),$$

αφού η h είναι συνεχής. Αυτό δείχνει ότι η τροχιά του $h(x)$ από την g είναι πυκνό υποσύνολο του Y . Το αντίστροφο αποδεικνύεται όμοια, χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της h^{-1} . \square

Συνδυάζοντας την προηγούμενη Πρόταση 2.5.1 με την Πρόταση 2.4.2 και όσα την ακολουθούν, μαζί με τις Προτάσεις 2.4.4 και 2.4.5, προκύπτει το ακόλουθο.

Πόρισμα 2.5.2. Αν $\lambda > 2 + \sqrt{5}$, ο περιορισμός της λογιστικής απεικόνισης $f_\lambda|_A : A \rightarrow A$ στο σύνολο Cantor $A \subset [0, 1]$ είναι τοπολογικά συζυγής με τη μετατόπιση $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ στο χώρο των ακολουθιών δύο συμβόλων. Συνεπώς, ισχύουν τα ακόλουθα.

- (α) Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ το σύνολο $\{x \in A : f_\lambda^N(x) = x\}$ έχει ακριβώς 2^N στοιχεία.
- (β) Το σύνολο των περιοδικών σημείων της $f_\lambda|_A$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του A .
- (γ) Υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του A του οποίου η τροχιά από την f_λ είναι πυκνό υποσύνολο του A . \square

Παράδειγμα 2.5.3. Η λογιστική απεικόνιση f_4 , που έχει τύπο $f_4(x) = 4x(1-x)$, είναι τοπολογικά συζυγής στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$ με την απεικόνιση «τέντα» $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ με

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{όταν } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \text{όταν } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Πράγματι, η απεικόνιση $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = \sin^2(\pi x/2)$ είναι C^∞ και

$$h'(x) = \frac{\pi}{2} \sin(\pi x).$$

Συνεπώς, $h'(x) > 0$ για κάθε $0 < x < 1$ και αφού $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, συμπεραίνουμε ότι η $h|_{[0, 1]} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ είναι αύξων ομοιομορφισμός. Επιπλέον,

$$f_4(h(x)) = \sin^2(\pi x) = h(T(x))$$

για κάθε $0 \leq x \leq 1$, όπως εύκολα βλέπουμε. Με άλλα λόγια η $h|_{[0, 1]}$ είναι τοπολογική συζυγία της $f_4|_{[0, 1]}$ με την απεικόνιση «τέντα» T .

Ασκήσεις

1. Εστω $a, b, c \in \mathbb{R}$, με $a \neq 0$ και $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η απεικόνιση $f(x) = ax^2 + bx + c$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, με $\lambda \neq 0$ και $d \in \mathbb{R}$, ώστε η $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = \lambda x + \mu$ να είναι τοπολογική συζυγία της f με την $q_d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $q_d(x) = x^2 + d$.
2. Για κάθε $d \in \mathbb{R}$ θεωρούμε την απεικόνιση $q_d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $q_d(x) = x^2 + d$. Αν $d < 1/4$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα μοναδικό $\lambda > 1$ ώστε η q_d να είναι τοπολογικά συζυγής με τη λογιστική απεικόνιση f_λ μέσω μιας τοπολογικής συζυγίας $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της μορφής $h(x) = \alpha x + \beta$, για κατάλληλα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. Να αποδειχθεί ότι για την απεικόνιση «τέντα» $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ το σύνολο

$$\{0 \leq x \leq 1 : T^N(x) = x\}$$

έχει 2^N στοιχεία για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί επίσης ότι το σύνολο των περιοδικών σημείων της T είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $[0, 1]$. (Υπόδειξη: Το σύνολο των δυαδικών ρητών $D = \{k/2^n : 0 \leq k \leq 2^n, n \in \mathbb{N}\}$ αποτελείται από τελικά σταθερά σημεία της T . Δείξτε επαγωγικά ότι η T^n απεικονίζει «γραμμικά» κάθε κλειστό διάστημα $[k/2^n, k+1/2^n]$, $0 \leq k < 2^n$, επί του $[0, 1]$. Χρησιμοποιείστε το γεγονός ότι το D είναι πυκνό υποσύνολο του $[0, 1]$.)

4. Να αποδειχθεί ότι για την λογιστική απεικόνιση f_4 το σύνολο $\{0 \leq x \leq 1 : f_4^N(x) = x\}$ έχει 2^N στοιχεία για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί επίσης ότι το σύνολο των περιοδικών σημείων της f_4 είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $[0, 1]$.

2.6 Χάος

Στην παράγραφο αυτή θα συστηματοποιήσουμε σε θεωρία τις δυναμικές συμπεριφορές που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους μέσα από την έννοια του χάους. Η προσέγγισή μας είναι κατά βάση τοπολογική. Τα τρία συστατικά στοιχεία της χαοτικής συμπεριφοράς είναι η τοπολογική μεταβατικότητα, που είναι η ανάγωγη συμπεριφορά, η ύπαρξη περιοδικής συμπεριφοράς και η ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες, που αντιπροσωπεύει την μη-προβλέψιμη εξέλιξη.

Ορισμός 2.6.1. Εστω X ένας μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow X$ μια συνεχής απεικόνιση. Η f λέγεται *τοπολογικά μεταβατική* όταν για κάθε ζεύγος μη-κενών ανοιχτών συνόλων $U, V \subset X$ υπάρχει ακέραιος $n \geq 1$ ώστε $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ ή ισοδύναμα $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$.

Αν η f είναι τοπολογικά μεταβατική, τότε προφανώς δεν υπάρχουν μη-κενά ανοιχτά σύνολα X_1, X_2 ξένα μεταξύ τους ώστε $f(X_1) \subset X_1$ και $f(X_2) \subset X_2$. Με αυτή την έννοια η δυναμική συμπεριφορά της f είναι ανάγωγη. Επιπλέον, αν $U, V \subset X$ είναι δύο μη-κενά ανοιχτά σύνολα και η f είναι τοπολογικά μεταβατική, τότε το μη-κενό σύνολο

$$F = \{n \in \mathbb{N} : f^n(U) \cap V \neq \emptyset\}$$

δεν είναι πεπερασμένο, γιατί αν $n \in F$, εφαρμόζοντας τον Ορισμό 2.6.1 για τα μη-κενά ανοιχτά, λόγω της συνέχειας, σύνολα $U, f^{-n}(V) \subset X$, υπάρχει ακέραιος $m \geq 1$ ώστε

$U \cap f^{-n-m}(V) \neq \emptyset$ ή ισοδύναμα $f^{n+m}(U) \cap V \neq \emptyset$, δηλαδή $n + m \in F$.

Παράδειγμα 2.6.2. Αν $\lambda > 2 + \sqrt{5}$, η λογιστική απεικόνιση $f_\lambda|_A : A \rightarrow A$ στο σύνολο Cantor $A \subset [0, 1]$ είναι τοπολογικά μεταβατική. Θα χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς της παραγράφου 2.3. Εστω $x, y \in A$ και $\epsilon > 0$. Υπάρχει ακέραιος $n \geq 1$ ώστε $1/M^n < \epsilon$, όπου το $M > 1$ είναι αυτό του Λήμματος 2.3.4. Υπάρχουν $s_0, s_2, \dots, s_{n-1} \in \{0, 1\}$ ώστε $x \in I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.3, η $f_\lambda^n|_{I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}} : I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}} \rightarrow [0, 1]$ είναι μονότονη και επί, οπότε υπάρχει ένα μοναδικό $z \in I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}$ ώστε $f_\lambda^n(z) = y$, οπότε $z \in A$. Επειδή το μήκος του $I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}$ είναι το πολύ $1/M^n$, έχουμε $|x - z| < \epsilon$. Δηλαδή υπάρχει ακέραιος $n \geq 1$ ώστε $y \in f_\lambda^n(x - \epsilon, x + \epsilon)$. Από αυτό προκύπτει αμέσως ότι η $f_\lambda|_A$ είναι τοπολογικά μεταβατική.

Είναι προφανές ότι η ιδιότητα της τοπολογικής μεταβατικότητας διατηρείται από τις τοπολογικές συζυγίες. Όπως δείχνει το επόμενο λήμμα, διατηρείται και από τις τοπολογικές ημισυζυγίες.

Λήμμα 2.6.3. Εστω X και Y δύο μετρικοί χώροι και $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ δύο συνεχείς απεικονίσεις. Υποθέτουμε ότι η f είναι τοπολογικά ημισυζυγής προς την g , δηλαδή υπάρχει μια συνεχής και επί απεικόνιση $h : X \rightarrow Y$ ώστε $h \circ f = g \circ h$. Αν η f είναι τοπολογικά μεταβατική, τότε και η g είναι τοπολογικά μεταβατική.

Απόδειξη. Εστω $U, V \subset Y$ δύο μη-κενά ανοιχτά σύνολα. Τα $h^{-1}(U)$, $h^{-1}(V) \subset X$ είναι μη-κενά και ανοιχτά, επειδή η h είναι συνεχής και επί. Αφού η f είναι τοπολογικά μεταβατική, υπάρχει κάποιος ακέραιος $n \geq 1$ ώστε $f^n(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset$. Ομως, $f^n(h^{-1}(U)) \subset h^{-1}(g^n(U))$, όπως εύκολα βλέπουμε. Συνεπώς,

$$h^{-1}(g^n(U) \cap V) = h^{-1}(g^n(U)) \cap h^{-1}(V) \supset f^n(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset,$$

από όπου προκύπτει ότι $g^n(U) \cap V \neq \emptyset$. \square

Η τοπολογική μεταβατικότητα μπορεί να περιγραφεί και με άλλους τρόπους, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Πρόταση 2.6.4. Εστω X ένας πλήρης, διαχωρίσιμος μετρικός χώρος χωρίς μεμονωμένα σημεία και $f : X \rightarrow X$ μια συνεχής απεικόνιση. Η f είναι τοπολογικά μεταβατική τότε και μόνον τότε όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $x \in X$ του οποίου η τροχιά $\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του X .

Απόδειξη. Εστω ότι η f είναι τοπολογικά μεταβατική. Αφού ο X υποτίθεται διαχωρίσιμος, έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο S . Η οικογένεια \mathcal{B} που αποτελείται από τις ανοιχτές μπάλλες με κέντρα τα σημεία του S και ρητές ακτίνες είναι αριθμήσιμη και αποτελεί βάση της τοπολογίας του X , δηλαδή κάθε ανοιχτό υποσύνολο του X είναι ένωση στοιχείων της οικογένειας \mathcal{B} . Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα σημείο του οποίου η τροχιά τέμνει κάθε στοιχείο της \mathcal{B} . Εστω $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ μια αρίθμηση της \mathcal{B} . Από την τοπολογική μεταβατικότητα, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $f^{n_1}(B_1) \cap B_2 \neq \emptyset$. Εστω V_1 μια ανοιχτή μπάλλα ακτίνας το πολύ $1/2$ ώστε $\overline{V_1} \subset B_1 \cap f^{-n_1}(B_2)$. Υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $f^{n_2}(V_1) \cap B_3 \neq \emptyset$. Εστω V_2 μια ανοιχτή μπάλλα ακτίνας το πολύ $1/4$ ώστε $\overline{V_2} \subset V_1 \cap f^{-n_2}(B_3)$. Επαγωγικά, υπάρχει μια ακολουθία θετικών ακεραίων $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ και μια ακολουθία από ανοιχτές μπάλλες

$(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ώστε $\overline{V_{k+1}} \subset V_k \cap f^{-n_{k+1}}(B_{k+2})$ και η ακτίνα της V_k είναι το πολύ $1/2^k$. Τα κέντρα των μπαλλών αυτών αποτελούν μια ακολουθία Cauchy, που λόγω της πληρότητας συγκλίνει σε ένα σημείο $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{V_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k$. Έχουμε τώρα $x \in B_1$ και $f^{n_{k-1}}(x) \in B_k$ για κάθε ακέραιο $k \geq 2$. Συνεπώς, η τροχιά $\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ τέμνει κάθε στοιχείο της \mathcal{B} και γιαυτό το λόγο είναι πυκνό υποσύνολο του X .

Για το αντίστροφο, έστω ότι υπάρχει ένα σημείο $x \in X$ του οποίου η τροχιά είναι πυκνό υποσύνολο του X . Εστω $U, V \subset X$ δύο μη-κενά ανοιχτά σύνολα. Τότε υπάρχουν ακέραιοι $n \geq 0, m \geq 0$ ώστε $f^n(x) \in U$ και $f^m(x) \in V$. Επειδή υποτίθεται ότι ο X δεν έχει μεμονωμένα σημεία, υπάρχει μια ακολουθία θετικών ακεραίων $n_k \rightarrow +\infty$ ώστε $\lim_{k \rightarrow +\infty} f^{n_k}(x) = f^m(x)$. Υπάρχει λοιπόν $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n_k > n$ και $f^{n_k}(x) \in V$. Αν θέσουμε $N = n_k - n$, τότε $N \geq 1$ και $f^{n_k}(x) \in f^N(U) \cap V$. Αυτό δείχνει ότι η f είναι τοπολογικά μεταβατική. \square

Όπως είναι γνωστό, κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι πλήρης και διαχωρίσιμος. Συνεπώς μια συνεχής απεικόνιση ενός συμπαγούς μετρικού χώρου χωρίς μεμονωμένα σημεία είναι τοπολογικά μεταβατική τότε και μόνον τότε όταν υπάρχει τουλάχιστον μια παντού πυκνή τροχιά. Το ίδιο ισχύει και για συνεχείς απεικονίσεις του \mathbb{R} , αφού το \mathbb{R} είναι ένας μη-συμπαγής, διαχωρίσιμος και χωρίς μεμονωμένα σημεία πλήρης μετρικός χώρος με τη συνηθισμένη απόσταση.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την έννοια της μη-προβλέψιμης εξέλιξης ενός διακριτού συστήματος.

Ορισμός 2.6.5. Εστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Μια συνεχής απεικόνιση $f : X \rightarrow X$ παρουσιάζει *ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες* όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ και $\epsilon > 0$ υπάρχουν $y \in X$ και $n \in \mathbb{N}$ με $d(x, y) < \epsilon$ και $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.

Είναι προφανές ότι μια συστολή δεν παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.

Παράδειγμα 2.6.6. Η μετατόπιση $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ του μετρικού χώρου των ακολουθιών σε δύο σύμβολα 0 και 1 παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Εστω $s = (s_n)_{n \geq 0} \in \Sigma_2$ και $\epsilon > 0$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $1/2^N < \epsilon$. Θεωρούμε το στοιχείο $t = (t_n)_{n \geq 0} \in \Sigma_2$ με $t_n = s_n$ για $0 \leq n \leq N$ και $t_n \neq s_n$ για $n > N$. Τότε $d(s, t) \leq 1/2^N < \epsilon$ και για κάθε $n > N$ έχουμε

$$d(\sigma^n(s), \sigma^n(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_{k+n} - t_{k+n}|}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Σε αντίθεση με την τοπολογική μεταβατικότητα η ιδιότητα της ευαίσθητης εξάρτησης από τις αρχικές συνθήκες δεν διατηρείται από τις τοπολογικές συζυγίες, εκτός εάν οι χώροι είναι συμπαγείς, όπως θα δείξουμε παρακάτω. Για παράδειγμα, οι συνεχείς απεικονίσεις $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ με $f(x) = x^2$ και $g : (1, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$ με τον ίδιο τύπο $g(x) = x^2$ είναι τοπολογικά συζυγείς. Μια τοπολογική συζυγία είναι η $h : (0, 1) \rightarrow (1, +\infty)$ με $h(x) = 1/x$. Η f δεν παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Πράγματι,

επειδή $0 < f'(x) < 1$ για κάθε $0 < x < 1/2$, προκύπτει ότι $f(0, 1/2) \subset (0, 1/2)$ και $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ για κάθε $x, y \in (0, 1/2)$. Επαγωγικά,

$$|f^n(x) - f^n(y)| < |x - y|$$

για κάθε $x, y \in (0, 1/2)$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $\delta > 0$ αν διαλέξουμε οποιοδήποτε $0 < x < 1/2$ και $0 < \epsilon < \delta$ αρκετά μικρό ώστε $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (0, 1/2)$, τότε για κάθε $y \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$ έχουμε $|f^n(x) - f^n(y)| < \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό δείχνει ότι η f δεν παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.

Από την άλλη μεριά, $g'(x) > 2$ για κάθε $x > 1$ και συνεπώς

$$|g^n(x) - g^n(y)| \geq 2^n|x - y|$$

για κάθε $x, y > 1$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εστω τώρα $x > 1$ και $\epsilon > 0$. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $1/2^{n-1} < \epsilon$ και τότε

$$|g^n(x) - g^n(x + \frac{\epsilon}{2})| \geq 2^{n-1}\epsilon > 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι η g παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.

Πρόταση 2.6.7. *Εστω (X, d) και (Y, ρ) δύο συμπαγείς μετρικοί χώροι και $f : X \rightarrow X$ και $g : Y \rightarrow Y$ δύο συνεχείς απεικονίσεις. Υποθέτουμε ότι η f παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Αν η f είναι τοπολογικά συζυγής με τη g , τότε και η g παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.5.1, αρκεί να δείξουμε ότι αν η f δεν παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες, το ίδιο ισχύει και για την g . Υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $h : X \rightarrow Y$ με $h \circ f = g \circ h$. Επειδή ο X είναι συμπαγής, η h είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έτσι, για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\theta > 0$ ώστε $\rho(h(x), h(x')) < \delta$ για κάθε $x, x' \in X$ με $d(x, x') < \theta$. Αφού η f δεν παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες, υπάρχουν $x \in X$ και $\epsilon > 0$ ώστε $d(f^n(x), f^n(x')) < \theta$ για κάθε $x' \in X$ με $d(x, x') < \epsilon$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\rho(g^n(h(x)), g^n(h(x'))) = \rho(h(f^n(x)), h(f^n(x'))) < \delta$$

για κάθε $x' \in X$ με $d(x, x') < \epsilon$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $y = h(x)$. Από τη συνέχεια της h^{-1} , υπάρχει $\eta > 0$ ώστε $d(x, h^{-1}(y')) < \epsilon$ για κάθε $y' \in Y$ με $\rho(y, y') < \eta$. Προκύπτει ότι $\rho(g^n(y), g^n(y')) < \delta$ για κάθε $y' \in Y$ με $\rho(y, y') < \eta$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό δείχνει ότι η g δεν παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. \square

Το γενικό Θεώρημα που ακολουθεί εξασφαλίζει την ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες από άλλες καθαρά τοπολογικούς χαρακτήρα δυναμικές ιδιότητες.

Θεώρημα 2.6.8. *Εστω (X, d) ένας μετρικός χώρος που δεν είναι πεπερασμένο σύνολο και $f : X \rightarrow X$ μια συνεχής απεικόνιση. Αν το σύνολο των περιοδικών σημείων της f είναι πυκνό υποσύνολο του X και η f είναι τοπολογικά μεταβατική, τότε παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα την ύπαρξη ενός $\delta > 0$ τέτοιου ώστε για κάθε $x \in X$ υπάρχει ένα περιοδικό σημείο $p \in X$ της f με $d(x, f^n(p)) \geq 4\delta$ για κάθε $n \geq 0$. Επειδή

υποθέτουμε ότι ο X δεν είναι πεπερασμένο σύνολο, το σύνολο των περιοδικών σημείων δεν είναι πεπερασμένο, γιατί είναι πυκνό υποσύνολο του X , από υπόθεση. Ειδικά, υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαφορετικές περιοδικές τροχιές, δηλαδή υπάρχουν δύο περιοδικά σημεία $p_1, p_2 \in X$ ώστε $f^n(p_1) \neq f^m(p_2)$ για κάθε ζεύγος ακεραίων $n \geq 0, m \geq 0$. Λόγω της περιοδικότητας, υπάρχει δ με

$$0 < \delta < \frac{1}{8}d(f^n(p_1), f^m(p_2))$$

για κάθε $n \geq 0, m \geq 0$. Για κάθε $x \in X$ έχουμε τώρα

$$8\delta < d(f^n(p_1), x) + d(x, f^m(p_2))$$

για κάθε $n \geq 0, m \geq 0$, από την τριγωνική ανισότητα. Αρα είτε $d(x, f^n(p_1)) \geq 4\delta$ για κάθε $n \geq 0$ είτε $d(x, f^m(p_2)) \geq 4\delta$ για κάθε $m \geq 0$. Αυτό αποδεικνύει τον αρχικό ισχυρισμό.

Εστω τώρα $x \in X$ και $0 < \epsilon < \delta$ οποιαδήποτε. Επιλέγουμε ένα περιοδικό σημείο $p \in X$ της f με $d(x, f^n(p)) \geq 4\delta$ για κάθε $n \geq 0$. Λόγω της πυκνότητας, υπάρχει ένα περιοδικό σημείο $q \in X$ με $d(x, q) < \epsilon$. Εστω $N \in \mathbb{N}$ η περίοδος του q . Από τη συνέχεια, υπάρχει $0 < \theta < \delta$ ώστε $d(f^n(z), f^n(p)) < \delta$ για κάθε $0 \leq n \leq N$, όταν $z \in X$ και $d(z, p) < \theta$. Επειδή η f είναι τοπολογικά μεταβατική, υπάρχει $y \in X$ με $d(x, y) < \epsilon$ και κάποιος ακέραιος $m \geq 1$ ώστε $d(f^m(y), p) < \theta$, οπότε

$$d(f^{m+n}(y), f^n(p)) < \delta$$

για κάθε $0 \leq n \leq N$.

Υπάρχει κάποιος ακέραιος $m \leq n \leq m + N$ που διαιρείται από το N και επειδή το q είναι περιοδικό σημείο περιόδου N έχουμε

$$\begin{aligned} 4\delta &\leq d(x, f^{n-m}(p)) \leq d(x, f^n(q)) + d(f^n(q), f^n(y)) + d(f^n(y), f^{n-m}(p)) \\ &< d(x, q) + d(f^n(q), f^n(y)) + \delta < 2\delta + d(f^n(q), f^n(y)), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$2\delta < d(f^n(q), f^n(y)) \leq d(f^n(q), f^n(x)) + d(f^n(x), f^n(y)).$$

Από αυτό προκύπτει ότι είτε $d(f^n(q), f^n(x)) > \delta$ είτε $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$. Σε κάθε περίπτωση, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $w \in X$, που μπορεί να είναι το q ή το y , ώστε $d(x, w) < \epsilon$ και $d(f^n(x), f^n(w)) > \delta$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, αυτό που εντοπίσαμε παραπάνω. Αυτά δείχνουν ότι η f παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. \square

Αν ο μετρικός χώρος X είναι πεπερασμένο σύνολο, τότε οι υποθέσεις του προηγούμενου Θεωρήματος 2.6.8 για την f συνεπάγονται ότι ολόκληρος ο X είναι μια περιοδική τροχιά. Η περίπτωση αυτή λοιπόν είναι τετριμμένη και δεν έχει ενδιαφέρον.

Οι προηγούμενες δυναμικές συμπεριφορές συμποσούνται στην έννοια του χάους.

Ορισμός 2.6.9. Εστω X ένας μετρικός χώρος. Μια συνεχής απεικόνιση $f : X \rightarrow X$ λέγεται *χαοτική* όταν

- (α) το σύνολο των περιοδικών σημείων της f είναι πυκνό υποσύνολο του X ,
- (β) η f είναι τοπολογικά μεταβατική και
- (γ) η f παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.6.8, η ιδιότητα (γ) προκύπτει από τις άλλες δύο, όταν ο X δεν είναι πεπερασμένο σύνολο. Δηλαδή, μια συνεχής απεικόνιση ενός μη-πεπερασμένου μετρικού χώρου είναι χαοτική όταν είναι τοπολογικά μεταβατική και το σύνολο των περιοδικών σημείων της είναι παντού πυκνό. Συνεπώς, η χαοτική συμπεριφορά διατηρείται από τοπολογικές συζυγίες συνεχών απεικονίσεων μη-πεπερασμένων μετρικών χώρων.

Τα αποτελέσματα των παραγράφων 2.3, 2.4 και 2.5 δείχνουν ότι για $\lambda > 2 + \sqrt{5}$ η λογιστική απεικόνιση $f_\lambda|_A : A \rightarrow A$ στο σύνολο Cantor $A \subset [0, 1]$ είναι χαοτική, όπως επίσης και η τοπολογικά συζυγής της μετατόπιση $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ στο χώρο των ακολουθιών σε δύο σύμβολα.

Ειδικά για συνεχείς απεικονίσεις κάθε είδους διαστημάτων στο \mathbb{R} η τοπολογική μεταβατικότητα είναι ισοδύναμη με χάος.

Πρόταση 2.6.10. *Εστω $X \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα και $f : X \rightarrow X$ μία συνεχής απεικόνιση. Αν η f είναι τοπολογικά μεταβατική, είναι χαοτική.*

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το παρακάτω.

Λήμμα 2.6.11. *Εστω $X \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα, $f : X \rightarrow X$ μία συνεχής απεικόνιση και $I \subset X$ ένα υποδιάστημα που δεν περιέχει κανένα περιοδικό σημείο της f . Αν $x, f^m(x), f^n(x) \in I$ και $0 < m < n$, τότε $x < f^m(x) < f^n(x)$ ή $x > f^m(x) > f^n(x)$.*

Απόδειξη. Προχωρούμε με απαγωγή στο άτοπο. Έστω ότι $x < f^m(x)$ αλλά $f^n(x) < f^m(x)$. Για τη συνεχή απεικόνιση $g = f^m$ έχουμε $x < g(x) < g^{k+1}(x)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Πράγματι, αν $g^2(x) < g(x)$, τότε η g έχει σταθερό σημείο στο διάστημα $[x, f^m(x)] \subset I$, δηλαδή η f έχει περιοδικό σημείο στο I , αντίθετα με την υπόθεσή μας. Συνεπώς, $g(x) < g^2(x)$. Επαγωγικά, αν $x < g(x) < g^k(x)$ και $g^{k+1}(x) < g(x)$, τότε η g^k έχει σταθερό σημείο στο διάστημα $[x, f^m(x)] \subset I$, οπότε πάλι η f έχει περιοδικό σημείο στο I . Ειδικά λοιπόν $x < f^{(n-m)m}(x)$. Επειδή υποθέσαμε ότι $f^{n-m}(f^m(x)) < f^m(x)$, με τον ίδιο επαγωγικό τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι $f^{(n-m)m}(f^m(x)) < f^m(x)$, παίρνοντας $g = f^{n-m}$. Από αυτά όμως προκύπτει ότι η $f^{(n-m)m}$ έχει σταθερό σημείο στο διάστημα $[x, f^m(x)] \subset I$, αντίφαση.

Με ανάλογα επιχειρήματα αποδεικνύεται ότι και η άλλη περίπτωση $x > f^m(x)$ και $f^n(x) > f^m(x)$ οδηγεί σε αντίφαση. \square

Απόδειξη της Πρότασης 2.6.10. Από το Θεώρημα 2.6.8, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο των περιοδικών σημείων της f είναι πυκνό στο X . Προχωρούμε με απαγωγή στο άτοπο. Αν δεν είναι, υπάρχει ένα ανοιχτό υποδιάστημα $I \subset X$ που δεν περιέχει κανένα περιοδικό σημείο της f . Έστω x ένα εσωτερικό σημείο του I . Υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $J \subset I$ με κέντρο το σημείο x με $I \setminus J \neq \emptyset$ και ένα ανοιχτό διάστημα $V \subset I \setminus J$. Επειδή η f υποτίθεται τοπολογικά μεταβατική, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $f^m(J) \cap V \neq \emptyset$. Υπάρχει λοιπόν $y \in J \subset I$ ώστε $f^m(y) \in V \subset I$. Τότε $f^m(y) \neq y$, αφού το I δεν περιέχει περιοδικά σημεία της f και υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $U \subset J$ με κέντρο το y ώστε $f^m(U) \cap U = \emptyset$, από τη συνέχεια. Πάλι από την τοπολογική μεταβατικότητα υπάρχει ακέραιος $n > m$ και κάποιο σημείο $x \in U$ ώστε $f^n(x) \in U$. Δηλαδή, $0 < m < n$, $x, f^n(x) \in U$, αλλά $f^m(x) \notin U$. Αυτό αντιφάσκει με το προηγούμενο Λήμμα 2.6.11. \square

Ασκήσεις

1. Εστω $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ η απεικόνιση «τέντα» με

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{όταν } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \text{όταν } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- (α) Να αποδειχθεί ότι η T είναι τοπολογικά μεταβατική.
 (β) Να αποδειχθεί, χωρίς χρήση του Θεωρήματος 2.6.8, ότι η T παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.
 (γ) Να αποδειχθεί ότι η T είναι χαοτική.

2. Να αποδειχθεί ότι η λογιστική απεικόνιση $f_4 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ με $f_4(x) = 4x(1 - x)$ είναι χαοτική.

3. Αν $X = \{s = (s_n)_{n \geq 0} \in \Sigma_2 : s_{n+1} = 1, \text{ όταν } s_n = 0\}$, να αποδειχθεί ότι ο περιορισμός της μετατόπισης $\sigma|_X$ στο X είναι χαοτική απεικόνιση.

4. Εστω $X \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα και $f : X \rightarrow X$ μια συνεχής απεικόνιση. Αν για οποιαδήποτε δύο κλειστά διαστήματα (όχι μονοσύνολα) $I, J \subset X$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $J \subset f^n(I)$, να αποδειχθεί ότι η f είναι χαοτική.

5. Να αποδειχθεί ότι η τετραγωνική απεικόνιση $g : [-2, 2] \rightarrow [-2, 2]$ με $g(x) = x^2 - 2$ είναι χαοτική. (Υπόδειξη: Δείξτε ότι η g είναι τοπολογικά συζυγής με τη λογιστική απεικόνιση $f_4 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.)

6. Έστω $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq 1} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ένας $0 - 1$ πίνακας τέτοιος ώστε $A^m \neq 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}^+$ και

$$X = \{s = (s_n)_{n \geq 0} \in \Sigma_2 : a_{s_n s_{n+1}} = 1 \text{ για κάθε } n \geq 0\}.$$

Να αποδειχθεί ότι αν ο A είναι απεριοδικός, τότε η τοπολογική αλυσίδα Markov $(X, \sigma|_X)$ είναι χαοτικό σύστημα.

2.7 Το Θεώρημα του Sarkovskii

Η θεωρία του A.N. Sarkovskii αφορά την ύπαρξη περιοδικών σημείων για συνεχείς απεικονίσεις του \mathbb{R} . Η περίπτωση των ομοιομορφισμών είναι σχετικά απλή.

Πρόταση 2.7.1. *Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ένας ομοιομορφισμός. Αν ο f είναι αύξων, δεν έχει κανένα μη-σταθερό περιοδικό σημείο. Αν είναι φθίνων, τότε κάθε μη-σταθερό περιοδικό σημείο του έχει περίοδο 2.*

Απόδειξη. Εστω ότι ο f είναι ένας αύξων ομοιομορφισμός και $x \in \mathbb{R}$ ένα μη-σταθερό σημείο, δηλαδή $f(x) \neq x$. Αν $f(x) > x$, επαγωγικά βλέπουμε ότι $f^n(x) > \dots > f(x) > x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, το x δεν είναι περιοδικό σημείο του f . Ομοια όταν $f(x) < x$, τότε $f^n(x) < x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εστω τώρα ότι ο f είναι ένας φθίνων ομοιομορφισμός και $x \in \mathbb{R}$ ένα περιοδικό σημείο περιόδου $N > 1$. Τότε ο f^2 είναι αύξων ομοιομορφισμός και

$(f^2)^N = f^N(f^N(x)) = x$. Κατά συνέπεια, το x είναι σταθερό σημείο του f^2 , οπότε το x είναι είτε σταθερό σημείο είτε περιοδικό σημείο της f περιόδου 2. \square

Στην περίπτωση των μη-αντιστρέψιμων συνεχών απεικονίσεων του \mathbb{R} η κατάσταση όσο αφορά την ύπαρξη περιοδικών σημείων είναι πολύ πιο περίπλοκη.

Λήμμα 2.7.2. *Εστω $J = [a, b]$ και $I = [c, d]$, όπου $a < b$ και $c < d$. Αν $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση με $I \subset f(J)$, τότε υπάρχει ένα κλειστό διάστημα $J_0 \subset J$ ώστε $f(J_0) = I$.*

Απόδειξη. Λόγω της υπόθεσης, υπάρχουν $x_0, y \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) = c$ και $f(y) = d$. Προφανώς $x_0 \neq y$. Θα υποθέσουμε ότι $y > x_0$, ενώ η απόδειξη είναι ανάλογη όταν $y < x_0$. Θέτουμε $b_0 = \inf\{y \in (x_0, b] : f(y) = d\}$ και $a_0 = \sup\{x \in [x_0, b_0] : f(x) = c\}$. Τότε $f(a_0) = c$ και $f(b_0) = d$, ενώ από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής έχουμε $f(I_0) = I$, αν θέσουμε $J_0 = [a_0, b_0]$. \square

Λήμμα 2.7.3. *Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα και $f : I \rightarrow I$ μια συνεχής απεικόνιση. Εστω $(I_n)_{n \geq 0}$ μια ακολουθία κλειστών διαστημάτων στο I με την ιδιότητα $I_{n+1} \subset f(I_n)$ για κάθε ακέραιο $n \geq 0$. Τότε υπάρχει μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων $(J_n)_{n \geq 0}$ στο I_0 ώστε $f^n(J_n) = I_n$ για κάθε $n \geq 1$ και συνεπώς υπάρχει $x_0 \in I_0$ ώστε $f^n(x_0) \in I_n$ για κάθε $n \geq 0$.*

Απόδειξη. Επειδή $I_1 \subset f(I_0)$, υπάρχει ένα κλειστό διάστημα $J_1 \subset I_0$ ώστε $f(J_1) = I_1$, από το Λήμμα 2.7.2. Προχωρούμε επαγωγικά. Εστω ότι υπάρχουν κλειστά διαστήματα $J_1 \supset J_2 \supset \dots \supset J_n$ ώστε $f^k(J_k) = I_k$ για κάθε $1 \leq k \leq n$. Αφού $I_{n+1} \subset f(I_n)$, από το Λήμμα 2.7.2 υπάρχει ένα κλειστό διάστημα $\tilde{J}_{n+1} \subset I_n = f(J_n)$ ώστε $f(\tilde{J}_{n+1}) = I_{n+1}$ και για τον ίδιο λόγο υπάρχει ένα κλειστό διάστημα $J_{n+1} \subset J_n$ ώστε $f^n(J_{n+1}) = \tilde{J}_{n+1}$. Κατά συνέπεια, $f^{n+1}(J_{n+1}) = I_{n+1}$. \square

Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα. Ένα πεπερασμένο σύνολο $\{I_0, I_1, \dots, I_n\}$ κλειστών διαστημάτων, που περιέχονται στο I , λέγεται διαμέριση όταν ανά δύο μεταξύ τους δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία. Αν $f : I \rightarrow I$ είναι μια συνεχής απεικόνιση, τότε λέμε γράφημα Markov της f ως προς αυτή τη διαμέριση το γράφημα με κορυφές τα στοιχεία της διαμέρισης και πλευρές τα ζεύγη (I_i, I_j) με $f(I_i) \supset I_j$. Συνήθως τις πλευρές θα συμβολίζουμε με $I_i \rightarrow I_j$.

Ένα κλειστό τόξο στο γράφημα Markov είναι της μορφής

$$I_{i_0} \rightarrow I_{i_1} \rightarrow \dots \rightarrow I_{i_{k-1}} \rightarrow I_{i_0}$$

και μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός περιοδικού σημείου $x \in I_{i_0}$ με $f^k(x) = x$. Η περίοδος του x ενδεχομένως να είναι μικρότερη από k . Αν τα κλειστά διαστήματα $I_{i_0}, I_{i_1}, \dots, I_{i_{k-1}}$ είναι ξένα μεταξύ τους ανά δύο, τότε το x έχει περίοδο k .

Πρόταση 2.7.4. *Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής απεικόνιση. Αν η f έχει ένα περιοδικό σημείο περιόδου 3, τότε έχει περιοδικά σημεία κάθε περιόδου.*

Απόδειξη. Εστω $\{p_1, p_2, p_3\}$ μια περιοδική τροχιά περιόδου 3, δηλαδή $f(p_1) = p_2$, $f(p_2) = p_3$ και $f(p_3) = p_1$. Θα αποδείξουμε το συμπέρασμα στην περίπτωση που $p_1 < p_2 < p_3$. Ο χειρισμός της περίπτωσης $p_1 < p_3 < p_2$ είναι ανάλογος. Θεωρούμε τη διαμέριση $\{I_1, I_2\}$,

όπου $I_1 = [p_2, p_3]$ και $I_2 = [p_1, p_2]$. Τότε $f(I_2) \supset I_1$ και $f(I_1) \supset I_1 \cup I_2$. Συνεπώς, στο γράφημα Markov της f ως προς αυτή τη διαμέριση περιέχεται το υπογράφημα

$$\circlearrowleft I_1 \rightleftharpoons I_2.$$

Το γράφημα Markov ενδεχομένως να περιέχει και την πλευρά $I_2 \rightarrow I_2$. Το τόξο

$$I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_1$$

που αποτελείται από $n > 3$ πλευρές και το Λήμμα 2.7.3 εξασφαλίζουν την ύπαρξη ενός κλειστού διαστήματος $J \subset I_1$ ώστε $f^k(J) \subset I_1$, για $1 \leq k \leq n-2$, $f^{n-1}(J) \subset I_2$ και $f^n(J) = I_1 \supset J$. Συνεπώς, υπάρχει $x_0 \in J$ ώστε $f^n(x_0) = x_0$, από την Πρόταση 2.1.1. Θα δείξουμε ότι το x_0 έχει περίοδο n . Προχωρούμε με απαγωγή στο άτοπο, υποθέτοντας ότι υπάρχει κάποιος $0 < i < n$ ώστε $f^i(x_0) = x_0$. Αν συμβαίνει αυτό, τότε $f^{n-1}(x_0) = f^{i-1}(x_0) \in I_1$, οπότε $f^{n-1}(x_0) \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$ και κατά συνέπεια

$$x_0 = f^n(x_0) = f(f^{n-1}(x_0)) = f(p_2) = p_3.$$

Αυτό όμως είναι αδύνατον, γιατί $f(p_3) = p_1 \notin I_1$. Η αντίφαση αυτή αποδεικνύει ότι για κάθε ακέραιο $n > 3$ η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου n .

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου 2 θεωρώντας το τόξο

$$I_2 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2.$$

Σε αυτή την περίπτωση, το Λήμμα 2.7.3 εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός κλειστού διαστήματος $J \subset I_2$ ώστε $f(J) \subset I_1$ και $f^2(J) = I_2 \supset J$. Συνεπώς, υπάρχει $y_0 \in J$ ώστε $f^2(y_0) = y_0$. Αν το y_0 είναι σταθερό σημείο της f , τότε $y_0 \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$ και $y_0 = f(y_0) = p_3$, που είναι αντίφαση. \square

Η προηγούμενη πρόταση μπορεί να φαίνεται ενδεχομένως μη-αναμενόμενη, δεν είναι όμως παρά ειδική περίπτωση ενός πολύ γενικότερου θεωρήματος, που αποδείχθηκε από τον A.N. Sarkovskii το 1964. Για την διατύπωση του Θεωρήματος ο Sarkovskii όρισε μια διάταξη \triangleright των φυσικών αριθμών ως εξής:

$$\begin{aligned} 3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \cdots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright \cdots \\ \cdots \triangleright 2^n \cdot 3 \triangleright 2^n \cdot 5 \triangleright 2^n \cdot 7 \triangleright \cdots \\ \cdots \triangleright 2^m \triangleright \cdots \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1. \end{aligned}$$

Δηλαδή, πρώτα έχουμε γράψει τους περιττούς φυσικούς αριθμούς με αύξουσα σειρά, εκτός από το 1, μετά τα διπλάσια τους, μετά τα τετραπλάσια τους, μετά τα οκταπλάσια τους κ.ο.κ. Στο τέλος υπάρχουν οι δυνάμεις του 2 σε φθίνουσα σειρά και τελευταίο το 1.

Θεώρημα 2.7.5. *Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής απεικόνιση. Αν η f έχει ένα περιοδικό σημείο περιόδου $n \geq 1$ και $n \triangleright m$, τότε η f έχει και περιοδικό σημείο περιόδου m .*

Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια δεν είναι αυτή του Sarkovskii, η οποία ήταν περίπλοκη, αλλά νεότερη. Παρουσιάστηκε το 1980 από τους L.S. Block, J. Guckenheimer, M. Misiurewicz, L.S. Young και είναι στοιχειώδους συνδυαστικού χαρακτήρα. Για την καλύτερη παρουσίαση, την έχουμε χωρίσει σε μια σειρά από Λήμματα.

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής απεικόνιση και x ένα περιοδικό σημείο της f περιόδου n . Εστω $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}$ τα σημεία της τροχιάς του x , που φυσικά ορίζουν μια διαμέριση του κλειστού διαστήματος $[x_0, x_{n-1}]$ σε $n-1$ κλειστά υποδιαστήματα. Θα περιγράψουμε πρώτα ιδιότητες του γραφήματος Markov της f ως προς αυτή τη διαμέριση.

Λήμμα 2.7.6. Υπάρχει μια κορυφή $I_1 = [x_a, x_{a+1}]$ ώστε $I_1 \rightarrow I_1$ και μάλιστα

$$f(x_{a+1}) \leq x_a < x_{a+1} \leq f(x_a).$$

Συνεπώς η f έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο στο I_1 .

Απόδειξη. Αφού $f(x_0) > x_0$ και $f(x_{n-1}) < x_{n-1}$, υπάρχει κάποιος ακέραιος $0 < a < n-1$ ώστε

$$x_a = \max\{x_k : f(x_k) > x_k\}.$$

Θέτουμε $I_1 = [x_a, x_{a+1}]$. Τότε $f(x_a) > x_a$ και συνεπώς $f(x_a) \geq x_{a+1}$, ενώ $f(x_{a+1}) < x_{a+1}$, οπότε $f(x_{a+1}) \leq x_a$. Προφανώς $f(I_1) \supset I_1$. \square

Στη συνέχεια με I_1 θα συμβολίζουμε πάντα το κλειστό διάστημα του Λήμματος 2.7.6.

Λήμμα 2.7.7. Για κάθε κορυφή J του γραφήματος Markov υπάρχει ένα τόξο από το I_1 στο J .

Απόδειξη. Εστω V_i το σύνολο των κορυφών του γραφήματος Markov που είναι τελικές τόξων μήκους i με αρχική κορυφή το I_1 . Δηλαδή, $K \in V_i$ όταν υπάρχει ένα τόξο

$$I_1 \rightarrow K_2 \rightarrow \dots \rightarrow K_i,$$

όπου $K_i = K$. Αφού $I_1 \rightarrow I_1$, το τόξο $I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow K_2 \rightarrow \dots \rightarrow K_i = K$ από το I_1 στο K έχει μήκος $i+1$. Αυτό δείχνει ότι $V_i \subset V_{i+1}$. Αν λοιπόν θέσουμε $U_i = \bigcup_{K \in V_i} K$, τότε

$U_i \subset U_{i+1}$. Επειδή το πλήθος των κορυφών είναι $n-1$, υπάρχει κάποιος $1 \leq i \leq n$ ώστε $V_i = V_{i+1}$. Από αυτό προκύπτει ότι για κάθε $K \in V_i$ η f απεικονίζει τα άκρα του K μέσα στο U_i . Πράγματι, αν αυτό δεν συμβαίνει, δηλαδή $f(z) \notin U_i$, για κάποιο άκρο z του K , τότε το κλειστό διάστημα $f(K)$ περιέχει κάποια κορυφή του γραφήματος Markov, με ένα άκρο το z , η οποία δεν περιέχεται στο V_i , αλλά περιέχεται στο V_{i+1} . Αυτό αντιφάσκει με την επιλογή του i . Από αυτό προκύπτει ότι $f(U_i \cap \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}) \subset U_i \cap \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Αυτό όμως μπορεί να συμβεί μόνο όταν $U_i = [x_0, x_{n-1}]$, που σημαίνει ότι το V_i είναι το σύνολο όλων των κορυφών. \square

Λήμμα 2.7.8. Εστω ότι δεν υπάρχει κορυφή του γραφήματος Markov διαφορετική από το I_1 , από την οποία εκκινεί τόξο με κατάληξη το I_1 . Τότε η f απεικονίζει τα σημεία της τροχιάς του x που βρίσκονται στα αριστερά του εσωτερικού του I_1 στα σημεία που βρίσκονται στα δεξιά και αντίστροφα. Συνεπώς, η περίοδος του x είναι άρτια και η f έχει ένα περιοδικό σημείο περιόδου 2.

Απόδειξη. Αν υπάρχει $x_i < x_a$ ώστε $f(x_i) \leq x_a$, τότε θέτοντας

$$x_{i_0} = \max\{x_i < x_a : f(x_i) \leq x_a\}$$

έχουμε $f(x_{i_0+1}) \geq x_{a+1}$. Συνεπώς, $f([x_{i_0}, x_{i_0+1}]) \supset [x_a, x_{a+1}] = I_1$, που αντιφάσκει με την υπόθεση. Αυτό δείχνει ότι για κάθε $x_i \leq x_a$ έχουμε $f(x_i) \geq x_{a+1}$, ενώ όμοια αποδεικνύεται ότι $f(x_i) \leq x_a$ για κάθε $x_i \geq x_{a+1}$. Συμπεραίνουμε από αυτό ότι το x έχει άρτια περίοδο. Αν τώρα $J_0 = [x_0, x_a]$ και $J_1 = [x_{a+1}, x_{n-1}]$, τότε $f(J_0) \supset J_1$ και $f(J_1) \supset J_0$. Κατά συνέπεια υπάρχει $y \in J_0$ με $f(y) \in J_1$ και $f^2(y) = y$, δηλαδή το y είναι περιοδικό σημείο περιόδου 2. \square

Λήμμα 2.7.9. *Εστω ότι υπάρχουν περιοδικά σημεία με περιττές περιόδους. Εστω ότι $n > 1$ είναι η ελάχιστη περιττή περίοδος και ότι το x είναι ένα περιοδικό σημείο περιόδου n . Τότε το γράφημα Markov περιέχει τα τόξα*

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_1 \rightarrow I_1$$

και $I_{n-1} \rightarrow I_{2i+1}$ για κάθε $2i+1 < n$. Επιπλέον, δεν υπάρχει πλευρά της μορφής $I_j \rightarrow I_{j+k}$ για $k > 1$.

Απόδειξη. Από τα Λήμματα 2.7.6, 2.7.7 και 2.7.8 προκύπτει ότι υπάρχουν κορυφές I_2, \dots, I_k ώστε $f(I_k) \supset I_1$, για τις οποίες υπάρχει ένα τόξο

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$$

Εστω $k > 1$ ο ελάχιστος ακέραιος για τον οποίο υπάρχει τέτοιο τόξο. Αν $k < n - 1$ και ο k είναι περιττός, τότε το παραπάνω τόξο δίνει ένα περιοδικό σημείο περιττής περιόδου μικρότερης από n , που αντιφάσκει με την επιλογή του n . Αν $k < n - 1$ και ο k είναι άρτιος, τότε το τόξο

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_k \rightarrow I_1 \rightarrow I_1$$

δίνει πάλι ένα περιοδικό σημείο περιττής περιόδου μικρότερης από n . Κατά συνέπεια, πρέπει $k = n - 1$, δηλαδή ο $n - 1$ είναι ο ελάχιστος θετικός ακέραιος για τον οποίο υπάρχει τόξο της μορφής

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_1.$$

Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει πλευρά της μορφής $I_j \rightarrow I_{j+k}$ για $k > 1$.

Επειδή το x δεν έχει περίοδο 2, έχουμε $f(x_a) > x_{a+1}$ ή $f(x_{a+1}) < x_a$. Θα υποθέσουμε το δεύτερο, αφού η συνέχεια της απόδειξης υποθέτοντας το πρώτο είναι ανάλογη. Τότε $f(x_a) = x_{a+1}$ και $f(x_{a+1}) = x_{a-1}$, γιατί αλλιώς το διάστημα $f(I_1)$ εκτός από τα I_1, I_2 θα περιείχε ακόμα μια κορυφή και θα είχαμε μια πλευρά της μορφής $I_1 \rightarrow I_{1+k}$ για κάποιο $k > 1$, που είναι αδύνατον, όπως είδαμε. Αυτό όμως σημαίνει ότι $I_2 = [x_{a-1}, x_a]$, δηλαδή το I_2 είναι το πρώτο διάστημα της διαμέρισης αριστερά του I_1 . Αφού $f(x_a) = x_{a+1}$ και $f(x_{a-1}) \neq x_{a+1}, x_a, x_{a-1}$, πρέπει $f(x_{a-1}) = x_{a+2}$, γιατί αλλιώς το $f(I_2)$ θα περιείχε περισσότερες από μια κορυφές, οπότε πάλι θα υπήρχε πλευρά της μορφής $I_2 \rightarrow I_{2+k}$ για κάποιο $k > 1$, που είναι αδύνατον. Συνεπώς, $I_3 = [x_{a+1}, x_{a+2}]$, δηλαδή το I_3 είναι το πρώτο διάστημα της διαμέρισης δεξιά του I_1 . Επαγωγικά τώρα επαναλαμβάνοντας το ίδιο επιχείρημα βλέπουμε ότι τα διαστήματα με άρτιο δείκτη βρίσκονται αριστερά του I_1 , ενώ αυτά με περιττό δείκτη βρίσκονται δεξιά του I_1 . Μάλιστα είναι διατεταγμένα με την παρακάτω σειρά

$$I_{n-1}, \dots, I_2, I_1, I_3, \dots, I_{n-2}.$$

Για $1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}$, το $f(I_{2i})$ περιέχει το I_{2i+1} και καμία άλλη κορυφή. Κατά συνέπεια, $f(x_1) = x_{n-1}$ και $x_{n-1} \in f(I_{n-1})$. Από την άλλη μεριά, $f(I_{n-1}) \supset I_1$, από όπου συμπεραίνουμε ότι $f(I_{n-1}) \supset [x_a, x_{n-1}]$, οπότε το $f(I_{n-1})$ περιέχει όλες τις κορυφές του

γραφήματος Markov που βρίσκονται δεξιά του I_1 και είναι αυτές με περιττό δείκτη. Δηλαδή, το γράφημα Markov περιέχει τα τόξα της μορφής $I_{n-1} \rightarrow I_{2i+1}$ για κάθε $2i+1 < n$. \square

$$\begin{array}{ccccc}
 I_1 & \rightleftharpoons & I_1 & \longrightarrow & I_2 \\
 & & \uparrow & & \downarrow \\
 I_{n-2} & \rightleftharpoons & I_{n-1} & \longrightarrow & I_3 \\
 \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longleftarrow & I_5 & \longleftarrow & I_4
 \end{array}$$

Πόρισμα 2.7.10. Αν το x είναι περιοδικό σημείο της f περιττής περιόδου $n > 1$, τότε η f έχει περιοδικά σημεία κάθε περιόδου μεγαλύτερης του n και κάθε άρτιας περιόδου μικρότερης από n .

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι το x είναι ένα περιοδικό σημείο με την ελάχιστη περιττή περίοδο $n > 1$. Από την υπόθεση προκύπτει ότι τέτοιο σημείο υπάρχει. Εστω $m > n$ ένας ακέραιος. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο Λήμμα 2.7.9. Θεωρώντας το τόξο μήκους m

$$I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_1$$

εξασφαλίζουμε την ύπαρξη περιοδικού σημείου περιόδου m .

Αν πάλι $m = 2i < n$, τότε το τόξο

$$I_{n-1} \rightarrow I_{n-2i} \rightarrow I_{n-2i+1} \rightarrow \cdots \rightarrow I_{n-1}$$

εξασφαλίζει την ύπαρξη περιοδικού σημείου περιόδου $2i$. \square

Λήμμα 2.7.11. Αν η f έχει ένα περιοδικό σημείο άρτιας περιόδου, τότε έχει ένα περιοδικό σημείο περιόδου 2.

Απόδειξη. Εστω $n \geq 2$ ο ελάχιστος ακέραιος για τον οποίο η f έχει περιοδικό σημείο x περιόδου n . Θα δείξουμε ότι $n = 2$ με απαγωγή στο άτοπο. Εστω λοιπόν ότι $n > 2$. Τότε ο n είναι άρτιος, από το Πόρισμα 2.7.10 και υπάρχει μια κορυφή I_k του γραφήματος Markov με $f(I_k) \supset I_1$, από το Λήμμα 2.7.8. Οπως στην αρχή της απόδειξης του Λήμματος 2.7.9, αποδεικνύεται ότι ο ελάχιστος k για τον οποίο υπάρχει ένα τόξο της μορφής

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$$

είναι ο $k = n - 1$ και δεν υπάρχει πλευρά της μορφής $I_i \rightarrow I_{i+j}$ με $j > 1$, επειδή η f δεν έχει περιοδικά σημεία με περίοδο μικρότερη από n . Επειδή υποθέτουμε ότι το x δεν έχει περίοδο 2, δηλαδή $n > 2$, όπως στην κατάληξη της απόδειξης του Λήμματος 2.7.9, αποδεικνύεται ότι $I_{n-1} \rightarrow I_{2i}$, όταν $2i < n$. Υπάρχει λοιπόν ένα τόξο της μορφής

$$I_{n-1} \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1},$$

γιατί ο $n - 2$ είναι άρτιος. Αυτό συνεπάγεται όμως την ύπαρξη ενός περιοδικού σημείου περιόδου 2. \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.7.5. (α) Εστω ότι η f έχει ένα περιοδικό σημείο περιόδου $n = 2^k$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ και $n \triangleright m$. Τότε $m = 2^l$ για κάποιο ακέραιο $l \geq 0$ με $l < k$. Αν

$l = 0$, τότε το συμπέρασμα είναι άμεσο, γιατί $I_1 \rightarrow I_1$ και η f έχει σταθερό σημείο στο I_1 , από το Λήμμα 2.7.6. Εστω λοιπόν ότι $l > 0$. Θέτουμε $g = f^{m/2}$. Τότε

$$g^{2^{k-l+1}} = (f^{2^{l-1}})^{2^{k-l+1}} = f^{2^k}$$

και συνεπώς η g έχει περιοδικό σημείο άρτιας περιόδου. Από το Λήμμα 2.7.10, η g έχει περιοδικό σημείο περιόδου 2, το οποίο είναι περιοδικό σημείο της f περιόδου m .

(β) Εστω ότι η f έχει ένα περιοδικό σημείο περιόδου $n = 2^k p$, για κάποιο περιττό $p \in \mathbb{N}$ και κάποιο ακέραιο $k \geq 0$. Αν $n \triangleright m$, έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

(β1) Όταν $m = 2^k q$, για κάποιο περιττό ακέραιο $q > p$, τότε η $g = f^{2^k}$ έχει περιοδικό σημείο περιόδου p και επειδή $q > p$, έχει περιοδικό σημείο περιόδου q , από το Πόρισμα 2.7.10. Αυτό είναι περιοδικό σημείο της f περιόδου m .

(β2) Όταν $m = 2^k q$, για κάποιο άρτιο ακέραιο $q > 0$, τότε πάλι η $g = f^{2^k}$ έχει περιοδικό σημείο περιόδου p και το Πόρισμα 2.7.10 εξασφαλίζει περιοδικό σημείο y περιόδου q για την g . Δηλαδή, $(f^{2^k})^q(y) = y$ και τα σημεία $y, f^{2^k}(y), f^{2 \cdot 2^k}(y), \dots, f^{(q-1)2^k}(y)$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Αν N είναι η περίοδος του y ως προς την f , τότε $N = 2^r t$ για κάποιους ακέραιους $0 \leq r \leq k, 1 \leq t \leq q$. Αφού $2^k t = 2^{k-r} \cdot 2^r t$, προκύπτει ότι $r = k$ και $t = q$, δηλαδή το y είναι περιοδικό σημείο της f περιόδου m .

(β3) Τέλος, έστω ότι $m = 2^l$, για κάποιο $l \leq m$. Από το (β2) υπάρχει περιοδικό σημείο περιόδου 2^{k+1} . Αφού $l < k + 1$, η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου m , από το (α).

Ετσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος. \square

Αν και το Θεώρημα του Sarkovskii διατυπώθηκε για συνεχείς απεικονίσεις του \mathbb{R} , είναι προφανές ότι ισχύει και για συνεχείς απεικονίσεις ενός αποιουδήποτε κλειστού διαστήματος στον εαυτό του, αφού κάθε τέτοια συνεχής απεικόνιση μπορεί να επεκταθεί σε μια συνεχή απεικόνιση με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , με τρόπο ώστε έξω από το διάστημα να είναι σταθερή. Ετσι, όλα τα μη-σταθερά περιοδικά σημεία της επέκτασης βρίσκονται μέσα στο διάστημα και φυσικά μέσα στο διάστημα υπάρχουν σταθερά σημεία.

Ασκήσεις

1. Εστω $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ η απεικόνιση με

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{όταν } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \text{όταν } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου n .

2. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής απεικόνιση και ένας ακέραιος $n > 3$. Αν η f έχει ένα περιοδικό σημείο $x \in \mathbb{R}$ περιόδου n ώστε

$$x < f(x) < f^2(x) < \dots < f^{n-1}(x),$$

να αποδειχθεί ότι η f έχει περιοδικά σημεία για κάθε περίοδο.

3. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής απεικόνιση. Αν η f έχει ένα περιοδικό σημείο περιόδου 176, να αποδειχθεί ότι έχει τουλάχιστον ένα περιοδικό σημείο περιόδου 96.

4. Να αποδειχθεί ότι η λογιστική απεικόνιση $f_4 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ με $f_4(x) = 4x(1 - x)$ έχει περιοδικά σημεία περιόδου N για κάθε $N \in \mathbb{N}$.

5. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής απεικόνιση, που έχει ένα περιοδικό σημείο περιόδου 48. Έχει η f περιοδικό σημείο περιόδου 56;

6. Εστω $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ η μη-συνεχής απεικόνιση με

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{3}, & \text{όταν } 0 \leq x < \frac{2}{3} \\ x - \frac{2}{3}, & \text{όταν } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Η f παρουσιάζει ασυνέχεια μόνο στο σημείο $2/3$. Να αποδειχθεί ότι κάθε σημείο $0 \leq x < 1$ είναι περιοδικό με περίοδο 3, ενώ το 1 είναι τελικά περιοδικό περιόδου 3.

Κεφάλαιο 3

Δυναμικά Συστήματα στον κύκλο

3.1 Στροφές του κύκλου

Ο μοναδιαίος κύκλος, που θα αποκαλείται απλά κύκλος στη συνέχεια, είναι το υποσύνολο

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

του μιγαδικού επιπέδου. Η «εκθετική» απεικόνιση $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ με τύπο

$$p(x) = e^{2\pi i x} = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$$

είναι συνεχής και επί. Επιπλέον, $p(x+y) = p(x)p(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου η πράξη στο δεύτερο μέλος είναι ο πολλαπλασιασμός μιγαδικών αριθμών. Προφανώς, $p([0, 1)) = S^1$ και ο περιορισμός $p|_{[0, 1)}$ είναι ένα προς ένα. Μάλιστα, ο περιορισμός της p σε κάθε διάστημα με μήκος μικρότερο από 1 είναι ένα προς ένα. Τέλος, η p απεικονίζει κάθε ανοιχτό διάστημα σε ένα ανοιχτό τόξο πάνω στον κύκλο και συνεπώς απεικονίζει κάθε ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R} σε ανοιχτό υποσύνολο του κύκλου, θεωρώντας τον κύκλο ως μετρικό χώρο με την απόσταση που κληρονομεί από το \mathbb{C} .

Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ συμβολίζουμε με $R_a : S^1 \rightarrow S^1$ την απεικόνιση με

$$R_a(z) = ze^{2\pi i a}$$

που είναι η στροφή κατά γωνία $2\pi a$. Η R_a είναι προφανώς ομοιομορφισμός και έχει αντίστροφη την R_{-a} , που είναι η στροφή κατά γωνία $-2\pi a$. Αν $T_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η μεταφορά κατά a , δηλαδή $T_a(x) = x + a$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $p \circ T_a = R_a \circ p$, που σημαίνει ότι το επόμενο διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{T_a} & \mathbb{R} \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ S^1 & \xrightarrow{R_a} & S^1 \end{array}$$

Αν $a \in \mathbb{Q}$, τότε υπάρχουν μοναδικοί $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$ πρώτοι μεταξύ τους ώστε $a = m/n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$(T_a)^k(x) = x + k \frac{m}{n}$$

και συνεπώς

$$(R_a)^k(e^{2\pi i x}) = e^{2\pi i(x + k\frac{m}{n})}.$$

Από αυτό προκύπτει ότι $(R_a)^n(e^{2\pi i x}) = e^{2\pi i x}$ και $(R_a)^k(e^{2\pi i x}) \neq e^{2\pi i x}$ για κάθε ακέραιο $0 < k < n$, γιατί οι m και n είναι πρώτοι μεταξύ τους. Με άλλα λόγια, $(R_a)^n = id$ και κάθε σημείο του κύκλου είναι περιοδικό με περίοδο n . Στην περίπτωση λοιπόν των ρητών στροφών του κύκλου η δυναμική είναι περιοδική.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τη δυναμική των άρρητων στροφών. Θα χρειαστούμε το ακόλουθο.

Λήμμα 3.1.1. *Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < |na - m| < \epsilon$.*

Απόδειξη. Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $1/k < \epsilon$. Θεωρούμε τη διαμέριση του διαστήματος $[0, 1]$ με σύνολο διαδοχικών κορυφών

$$\left\{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1\right\}$$

σε k διαδοχικά διαστήματα μήκους $1/k$. Συμβολίζουμε με $[x]$ ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού x . Επειδή ο a είναι άρρητος, τα σημεία $ma - [ma] \in [0, 1)$, $m \in \mathbb{N}$, είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Συνεπώς, υπάρχει κάποιο διάστημα της διαμέρισης που περιέχει τουλάχιστον δύο από αυτά τα σημεία. Δηλαδή, υπάρχουν $0 < m_2 < m_1$ ώστε

$$|(m_1 a - [m_1 a]) - (m_2 a - [m_2 a])| \leq \frac{1}{k} < \epsilon.$$

Αν τώρα θέσουμε $n = m_1 - m_2$ και $m = [m_1 a] - [m_2 a]$, έχουμε $|na - m| < \epsilon$. \square

Από το Λήμμα 3.1.1 προκύπτει αμέσως ότι το $\mathbb{Z} + a\mathbb{Z} = \{m + an : m, n \in \mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του \mathbb{R} . Πράγματι, έστω $x \in \mathbb{R}$ και $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.1, υπάρχει $y \in \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ ώστε $0 < y < \epsilon$. Διαιρώντας το x με το y , υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ και $r \in \mathbb{R}$ ώστε $x = ky + r$ και $0 \leq |r| < y$. Προφανώς, $ky \in \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ και $|x - ky| = |r| < y < \epsilon$.

Η πρόταση που ακολουθεί και περιγράφει τη δυναμική των τροχιών των άρρητων στροφών οφείλεται στον αστρονόμο Nicole Oresme, που έζησε περίπου από το 1320 μέχρι το 1382.

Πρόταση 3.1.2. *Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, τότε για κάθε $z \in S^1$ η θετική ημιτροχιά $\{(R_a)^k(z) : k \geq 0\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του S^1 .*

Απόδειξη. Υπάρχει μοναδικό $0 \leq x < 1$ ώστε $z = e^{2\pi i x}$. Επειδή

$$(R_a)^k(z) = (R_a)^k(e^{2\pi i x}) = e^{2\pi i(x + ka)}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $0 \leq y < 1$ με $y \neq x$ και $0 < \epsilon < |y - x|$ υπάρχουν ακέραιοι $k \geq 0$ και l ώστε

$$|y - (x + ka) + l| < \epsilon.$$

Από το προηγούμενο Λήμμα 3.1.1, υπάρχουν $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < |na - m| < \epsilon$. Διαιρώντας το $y - x$ με $|na - m|$, υπάρχουν $q \in \mathbb{N}$ και $0 \leq r < |na - m|$ ώστε

$$y - x = q|na - m| + r.$$

Αρκεί λοιπόν να πάρουμε $k = \pm qn$ και $l = \mp qm$. \square

Επειδή $(R_a)^{-k}(z) = (R_{-a})^k(z)$, η αρνητική ημιτροχιά κάθε σημείου $z \in S^1$ ως προς τη στροφή R_a ταυτίζεται με τη θετική ημιτροχιά του ως προς την αντίστροφη R_{-a} . Συνεπώς, η προηγούμενη Πρόταση 3.1.2 δείχνει ότι και οι αρνητικές ημιτροχιές των άρρητων στροφών είναι πυκνά υποσύνολα του κύκλου. Οι άρρητες στροφές είναι παράδειγμα ελαχιστικού ομοιομορφισμού.

Ορισμός 3.1.3. Ένας ομοιομορφισμός $f : X \rightarrow X$ σε ένα μετρικό χώρο X λέγεται ελαχιστικός όταν η τροχιά κάθε σημείου του X ως προς τον f είναι πυκνό υποσύνολο του X .

Στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στη στατιστική μελέτη της κατανομής των τροχιών μιας άρρητης στροφής κατά μήκος του κύκλου. Θα χρειαστούμε την έννοια του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης του κύκλου. Σε κάθε συνάρτηση $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ αντιστοιχεί η συνάρτηση $\tilde{\phi} = \phi \circ p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, που είναι περιοδική με περίοδο 1 ή σύντομα 1-περιοδική, δηλαδή $\tilde{\phi}(x+1) = \tilde{\phi}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αντίστροφα, κάθε 1-περιοδική συνάρτηση $\tilde{\phi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ επάγει μια καλά ορισμένη συνάρτηση $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε $\tilde{\phi} = \phi \circ p$.

Μια συνάρτηση $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται ολοκληρώσιμη κατά Riemann, όταν η αντίστοιχη 1-περιοδική συνάρτηση $\tilde{\phi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο διάστημα $[0, 1]$. Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε ως κανονικοποιημένο ολοκλήρωμα Riemann της ϕ το

$$\int_{S^1} \phi = \int_0^1 \tilde{\phi}(x) dx.$$

Μια συνάρτηση $\phi = \phi_1 + i\phi_2 : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$, όπου οι ϕ_1, ϕ_2 είναι πραγματικές συναρτήσεις, λέγεται ολοκληρώσιμη κατά Riemann, όταν οι ϕ_1, ϕ_2 είναι και τότε θέτουμε

$$\int_{S^1} \phi = \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) dx + i \int_0^1 \tilde{\phi}_2(x) dx.$$

Με τον ορισμό αυτό, το μήκος του κύκλου είναι

$$\int_{S^1} 1 = \int_0^1 dx = 1.$$

Για αυτό το λόγο αποκλήθηκε κανονικοποιημένο ολοκλήρωμα Riemann. Στη συνέχεια θα αποκαλείται απλά ολοκλήρωμα ή χωρικός μέσος. Κάθε συνεχής συνάρτηση $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη, αφού η αντίστοιχη 1-περιοδική είναι συνεχής και συνεπώς ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0, 1]$.

Λήμμα 3.1.4. Το ολοκλήρωμα Riemann παραμένει αναλλοίωτο από τις στροφές, δηλαδή για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και κάθε συνεχή συνάρτηση $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ ισχύει

$$\int_{S^1} \phi \circ R_a = \int_{S^1} \phi.$$

Απόδειξη. Επειδή $\widetilde{\phi \circ R_a} = \tilde{\phi} \circ T_a$, έχουμε

$$\int_{S^1} \phi \circ R_a = \int_0^1 \tilde{\phi}(x+a) dx = \int_a^{a+1} \tilde{\phi}(x) dx = \int_0^1 \tilde{\phi}(x) dx + \int_1^{a+1} \tilde{\phi}(x) dx - \int_0^a \tilde{\phi}(x) dx$$

$$= \int_0^1 \tilde{\phi}(x) dx + \int_1^{a+1} \tilde{\phi}(x+1) dx - \int_0^a \tilde{\phi}(x) dx = \int_0^1 \tilde{\phi}(x) dx = \int_{S^1} \phi,$$

αφού η $\tilde{\phi}$ είναι 1-περιοδική. \square

Η στατιστική συμπεριφορά των τροχιών μιας άρρητης στροφής περιγράφεται από το ακόλουθο θεώρημα και τη γενίκευσή του για ολοκληρώσιμες κατά Riemann συναρτήσεις, που οφείλεται στους Kronecker-Weyl.

Θεώρημα 3.1.5. Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, τότε για κάθε συνεχή συνάρτηση $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi((R_a)^k(z)) = \int_{S^1} \phi$$

ομοιόμορφα για κάθε $z \in S^1$.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη, υπενθυμίζουμε ότι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι μια συνάρτηση $q : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ της μορφής

$$q(z) = \sum_{n=-N}^N a_n z^n,$$

όπου $a_n \in \mathbb{C}$, $|n| \leq N$. Κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο q είναι προφανώς συνεχής συνάρτηση και

$$\int_{S^1} q = a_0 + \sum_{0 < |n| \leq N} a_n \left[\int_0^1 \cos 2\pi n x dx + i \int_0^1 \sin 2\pi n x dx \right] = a_0.$$

Από το θεώρημα Stone-Weierstrass προκύπτει αμέσως ότι κάθε συνεχή συνάρτηση $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ είναι το ομοιόμορφο όριο μιας ακολουθίας τριγωνομετρικών πολυωνύμων.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.5. Θα αποδείξουμε το συμπέρασμα πρώτα για ένα οποιοδήποτε τριγωνομετρικό πολυώνυμο $q(z) = \sum_{n=-N}^N a_n z^n$. Υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} q((R_a)^k(z)) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[a_0 + \sum_{0 < |l| \leq N} a_l z^l e^{2\pi i k l a} \right] = a_0 + \sum_{0 < |l| \leq N} a_l z^l \left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i k l a} \right] \\ &= \int_{S^1} q + \sum_{0 < |l| \leq N} a_l z^l \cdot \frac{1 - e^{2\pi i n l a}}{n(1 - e^{2\pi i l a})}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} q((R_a)^k(z)) - \int_{S^1} q \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{0 < |l| \leq N} |a_l z^l| \cdot \frac{|1 - e^{2\pi i n l a}|}{|1 - e^{2\pi i l a}|} \leq \frac{1}{n} \sum_{0 < |l| \leq N} |a_l z^l| \cdot \frac{2}{|1 - e^{2\pi i l a}|},$$

από όπου προκύπτει αμέσως ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} q((R_a)^k(z)) = \int_{S^1} q$$

ομοιόμορφα για κάθε $z \in S^1$.

Εστω τώρα $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ μια οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο q ώστε $|\phi(z) - q(z)| < \epsilon/3$ για κάθε $z \in S^1$. Συνεπώς,

$$\left| \int_{S^1} \phi - \int_{S^1} q \right| \leq \int_{S^1} |\phi - q| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} q((R_a)^k(z)) - \int_{S^1} q \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

για κάθε S^1 και κάθε $n \geq n_0$. Προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi((R_a)^k(z)) - \int_{S^1} \phi \right| \\ & \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\phi((R_a)^k(z)) - q((R_a)^k(z))| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} q((R_a)^k(z)) - \int_{S^1} q \right| + \left| \int_{S^1} \phi - \int_{S^1} q \right| < \epsilon \end{aligned}$$

για κάθε S^1 και κάθε $n \geq n_0$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Το όριο

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi((R_a)^k(z))$$

λέγεται χρονικός μέσος της συνεχούς συνάρτησης ϕ . Η ορολογία προέρχεται από τις φυσικές επιστήμες, όπου η συνάρτηση ϕ είναι μια μετρήσιμη ποσότητα που μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου, καθώς το σύστημα εξελίσσεται. Για συστήματα των οποίων η εξέλιξη είναι μη-προβλέψιμη, είναι φυσικό να γίνονται μετρήσεις σε πολλούς διαδοχικούς χρόνους και να υπολογίζεται η μέση τιμή τους. Ενδιαφέρει λοιπόν το όριο αυτών των μέσων, αν υπάρχει, που είναι ο χρονικός μέσος. Αν αυτός ταυτίζεται με τον χωρικό μέσο, όπως συμβαίνει στην περίπτωση των άρρητων στροφών, ο τελευταίος αποτελεί πρόβλεψη του χρονικού μέσου της ποσότητας που μετρείται.

Το Θεώρημα 3.1.5 είναι ισοδύναμο, όπως θα δούμε σε λίγο, με την ομοιόμορφη κατανομή των τροχιών των άρρητων στροφών στον κύκλο. Η ιδιότητα αυτή γενικεύεται στην ακόλουθη έννοια.

Ορισμός 3.1.6. Μια συνεχής απεικόνιση $f : X \rightarrow X$ σε ένα συμπαγή μετρικό χώρο X λέγεται *μονοσήμαντα εργοδική* αν για κάθε συνεχή συνάρτηση $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ η ακολουθία συνεχών συναρτήσεων

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ f^k, \quad n \in \mathbb{N}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια σταθερά.

Είναι φανερό ότι μια ισοδύναμη διατύπωση του Θεωρήματος 3.1.5 είναι η ακόλουθη.

Πόρισμα 3.1.7. Για κάθε $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και κάθε συνεχή 1-περιοδική συνάρτηση $\tilde{\phi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\phi}(x + ka) = \int_0^1 \tilde{\phi}(t) dt$$

ομοιόμορφα για κάθε $x \in \mathbb{R}$. \square

Στη συνέχεια θα γενικεύσουμε το Θεώρημα 3.1.5 για συναρτήσεις που είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann. Η γενίκευση αυτή οφείλεται στον H. Weyl (1916).

Υπενθυμίζουμε ότι αν X είναι ένα μη-κενό σύνολο και $A \subset X$, τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση του A είναι η συνάρτηση $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ με

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } x \in A \\ 0, & \text{όταν } x \notin A. \end{cases}$$

Εστω ότι $0 < b < c < 1$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{N} < \min\{b, 1 - c, \frac{c - b}{2}\}$. Για κάθε $n > N$ θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $f_n, g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } x < b - \frac{1}{n} \text{ ή } x > c + \frac{1}{n} \\ nx + (1 - nb), & \text{όταν } b - \frac{1}{n} \leq x \leq b \\ 1, & \text{όταν } b \leq x \leq c \\ -nx + (1 + nc), & \text{όταν } c \leq x \leq c + \frac{1}{n} \end{cases}$$

και

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } x < b \text{ ή } x > c \\ nx - nb, & \text{όταν } b \leq x \leq b + \frac{1}{n} \\ 1, & \text{όταν } b + \frac{1}{n} \leq x \leq c - \frac{1}{n} \\ -nx + nc, & \text{όταν } c - \frac{1}{n} \leq x \leq c. \end{cases}$$

Προφανώς $f_n(0) = f_n(1) = g_n(0) = g_n(1) = 0$ και $f_n \geq f_{n+1}$, $g_n \leq g_{n+1}$ για κάθε $n > N$. Επιπλέον, $g_n \leq \chi_{[b,c]} \leq f_n$ και

$$\int_0^1 g_n(t) dt = c - b - \frac{1}{n} < c - b < c - b + \frac{1}{n} = \int_0^1 f_n(t) dt,$$

οπότε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g_n(t) dt = c - b.$$

Εστω τώρα ότι $J = [b, c] + \mathbb{Z} = \{x + m : b \leq x \leq c \text{ και } m \in \mathbb{Z}\}$.

Λήμμα 3.1.8. Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, τότε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_J(x + ka) = c - b$$

ομοιόμορφα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $f_n, g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, όπως ορίστηκαν παραπάνω, και τις επεκτείνουμε περιοδικά σε συνεχείς συναρτήσεις στο \mathbb{R} με περίοδο 1, που συμβολίζουμε επίσης με f_n και g_n , αντίστοιχα. Για κάθε $m > N$, $n \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g_m(x + ka) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_J(x + ka) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_m(x + ka).$$

Εστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει $m > N$ ώστε $1/m < \epsilon/2$. Επίσης, από το Πόρισμα 3.1.7 υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$-\frac{\epsilon}{2} < \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g_m(x + ka) - \int_0^1 g_m(t) dt$$

και

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_m(x + ka) - \int_0^1 f_m(t) dt < \frac{\epsilon}{2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \geq n_0$. Κατά συνέπεια,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_m(x + ka) - (c - b) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_m(x + ka) - \int_0^1 f_m(t) dt + \frac{1}{m} < \epsilon$$

και όμοια

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g_m(x + ka) - (c - b) > -\epsilon$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \geq n_0$. Προκύπτει ότι

$$-\epsilon < \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_J(x + ka) - (c - b) < \epsilon$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \geq n_0$. \square

Το προηγούμενο Λήμμα 3.1.8 ισχύει και για το διάστημα $[b, c)$ στη θέση του κλειστού διαστήματος $[b, c]$. Πράγματι, υπάρχει το πολύ ένα $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $x + ka \in \{c\} + \mathbb{Z}$, γιατί $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Αφού $\chi_{[b,c]} = \chi_{[b,c)} + \chi_{\{c\}}$, το συμπέρασμα προκύπτει για το $[b, c)$. Ομοια βλέπουμε ότι το ίδιο ισχύει και για τα διαστήματα $(b, c]$ και (b, c) . Επίσης, αν $b = 0$ και $c < 1$, τότε επιλέγοντας ένα κατάλληλα μικρό $\delta > 0$ ώστε $c + \delta < 1$ έχουμε $\chi_{[\delta, c+\delta]} \circ T_\delta = \chi_{[0, c]}$. Από αυτό προκύπτει ότι το Λήμμα 3.1.8 ισχύει και για διάστημα της μορφής $[0, c]$ ή $[0, c)$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι ισχύει και για διάστημα της μορφής $[b, 1]$ ή $[b, 1)$.

Σε κάθε περίπτωση το $I = p(J) \subset S^1$ είναι το τόξο στον κύκλο που διαγράφεται από το σημείο $e^{2\pi ib}$ μέχρι το $e^{2\pi ic}$ αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού και έχει κανονικοποιημένο μήκος $\ell(I) = c - b$. Επειδή $\chi_I \circ p = \chi_J$, προκύπτει ότι

$$\chi_J(x + ka) = \chi_I((R_a)^k(e^{2\pi ix})).$$

Συνεπώς, το Λήμμα 3.1.8 μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα στην ακόλουθη μορφή.

Πόρισμα 3.1.9. Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, τότε για κάθε τόξο $I \subset S^1$ ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_I((R_a)^k(z)) = \ell(I)$$

ομοιόμορφα για κάθε $z \in S^1$. \square

Προφανώς ο θετικός ακέραιος $\sum_{k=0}^{n-1} \chi_I((R_a)^k(z))$ είναι ο πληθάρηθος του συνόλου

$$\{0 \leq k < n : (R_a)^k(z) \in I\}.$$

Αυτό σημαίνει ότι οι τροχιές μιας άρρητης στροφής είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στον κύκλο.

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το Θεώρημα του H. Weyl.

Θεώρημα 3.1.10. Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, τότε για κάθε συνάρτηση $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ που είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi((R_a)^k(z)) = \int_{S^1} \phi$$

ομοιόμορφα για κάθε $z \in S^1$.

Απόδειξη. Αν $\tilde{\phi} = \phi \circ p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι η αντίστοιχη 1-περιοδική συνάρτηση της ϕ , αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\phi}(x + ka) = \int_0^1 \tilde{\phi}(t) dt$$

ομοιόμορφα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Εστω $\epsilon > 0$. Επειδή η $\tilde{\phi}$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[0, 1]$, υπάρχει μια διαμέριση $P = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1\}$ ώστε $U(\tilde{\phi}, P) - L(\tilde{\phi}, P) < \epsilon$. Από το Λήμμα 3.1.8 έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^N m_j \chi_{[t_{j-1}, t_j) + \mathbb{Z}}(x + ka) = L(\tilde{\phi}, P)$$

και

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^N M_j \chi_{[t_{j-1}, t_j) + \mathbb{Z}}(x + ka) = U(\tilde{\phi}, P)$$

ομοιόμορφα για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου ως συνήθως $m_j = \inf\{\tilde{\phi}(x) : t_{j-1} \leq x \leq t_j\}$ και $M_j = \sup\{\tilde{\phi}(x) : t_{j-1} \leq x \leq t_j\}$. Υπάρχει λοιπόν $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$0 \leq \int_0^1 \tilde{\phi}(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^N m_j \chi_{[t_{j-1}, t_j] + \mathbb{Z}}(x + ka) < \epsilon$$

και

$$-\epsilon < \int_0^1 \tilde{\phi}(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^N M_j \chi_{[t_{j-1}, t_j] + \mathbb{Z}}(x + ka) \leq 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \geq n_0$. Αν $x \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε ακέραιο k υπάρχει ένα μοναδικό $1 \leq j \leq N$ ώστε $x + ka \in [t_{j-1}, t_j] + \mathbb{Z}$, οπότε

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^N m_j \chi_{[t_{j-1}, t_j] + \mathbb{Z}}(x + ka) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\phi}(x + ka) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^N M_j \chi_{[t_{j-1}, t_j] + \mathbb{Z}}(x + ka).$$

Προκύπτει τώρα ότι

$$\int_0^1 \tilde{\phi}(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\phi}(x + ka) < \epsilon$$

και

$$\int_0^1 \tilde{\phi}(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\phi}(x + ka) > -\epsilon$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \geq n_0$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Ασκήσεις

1. Εστω X ένας μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow X$ ένας ομοιομορφισμός. Εστω $A, B \subset X$ δύο μη-κενά κλειστά σύνολα, που είναι f -αναλλοίωτα και ελαχιστικά, δηλαδή $f(A) = A$, $f(B) = B$ και οι $f|_A$, $f|_B$ είναι ελαχιστικοί ομοιομορφισμοί. Να αποδειχθεί ότι αν $A \cap B \neq \emptyset$, τότε $A = B$.

2. Εστω X ένας μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow X$ ένας ομοιομορφισμός. Να αποδειχθεί ότι ο f είναι ελαχιστικός τότε και μόνον τότε όταν δεν υπάρχει κανένα μη-κενό, κλειστό και f -αναλλοίωτο γνήσιο υποσύνολο του X .

3. Εστω X ένας συμπαγής μετρικός χώρος. Να αποδειχθεί ότι κάθε συστολή $f : X \rightarrow X$ είναι μονοσήμαντα εργοδική.

4. Εστω X ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow X$ μια τοπολογικά μεταβατική συνεχή απεικόνιση. Αν για κάθε συνεχή συνάρτηση $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ η ακολουθία συνεχών συναρτήσεων

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ f^k, \quad n \in \mathbb{N},$$

συγκλίνει ομοιόμορφα, να αποδειχθεί ότι η f είναι μονοσήμαντα εργοδική.

5. Να αποδειχθεί ότι η ιδιότητα της μονοσήμαντης εργοδικότητας διατηρείται από τοπολογικές συζυγίες συνεχών απεικονίσεων συμπαγών μετρικών χώρων.

6. Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(x + 2\pi ka) = 0$$

ομοιόμορφα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7. Εστω $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ η C^∞ απεικόνιση με τύπο $f(x) = x + \frac{1}{4} \sin^2(\pi x)$. Είναι η f μονοσήμαντα εργοδική;

8. Εστω $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και $\tilde{\phi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ μια συνεχής 1-περιοδική συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι για κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\phi}(x_k + ka) = \int_0^1 \tilde{\phi}(t) dt.$$

3.2 Ομοιομορφισμοί του κύκλου

Όπως είδαμε στην Πρόταση 2.7.1, η δυναμική των ομοιομορφισμών του \mathbb{R} είναι εξαιρετικά απλή. Αντίθετα, η δυναμική ενός ομοιομορφισμού του κύκλου ενδέχεται να είναι περίπλοκη. Μια πρώτη ένδειξη για αυτό αποτελεί η δυναμική των άρρητων στροφών, που είναι ελαχιστικές, δηλαδή όλες οι τροχιές είναι πυκνά υποσύνολα του κύκλου. Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τη δυναμική οποιουδήποτε ομοιομορφισμού του S^1 . Μια καθιερωμένη μέθοδος τοπολογικής μελέτης συνεχών απεικονίσεων με τιμές στον S^1 είναι η ανύψωση σε μια συνεχή απεικόνιση με τιμές στο \mathbb{R} , αν αυτό είναι δυνατόν. Όπως στην προηγούμενη παράγραφο, θα συμβολίζουμε με p την «εκθετική» απεικόνιση $p(x) = e^{2\pi i x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Λήμμα 3.2.1. *Εστω $g : [0, 1] \rightarrow S^1$ μια συνεχής συνάρτηση και $t_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $g(0) = p(t_0)$. Υπάρχει μια μοναδική συνεχής συνάρτηση $\tilde{g} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\tilde{g}(0) = t_0$ που ανυψώνει την g , δηλαδή $g = p \circ \tilde{g}$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι μια τέτοια ανύψωση της g είναι μοναδική, αν υπάρχει. Πράγματι, αν υπάρχει και μια δεύτερη ανύψωση \hat{g} με τις ίδιες ιδιότητες, τότε $\tilde{g}(x) - \hat{g}(x) \in \mathbb{Z}$ για κάθε $0 \leq x \leq 1$ και $\tilde{g}(0) - \hat{g}(0) = t_0 - t_0 = 0$. Από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής προκύπτει τώρα αμέσως ότι $\tilde{g} = \hat{g}$.

Προχωρούμε τώρα στην κατασκευή της ανύψωσης. Επειδή η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|g(x) - g(y)| < 1$ για κάθε $x, y \in [0, 1]$ με $|x - y| < \delta$. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n\delta > 1$. Για κάθε ακέραιο $0 \leq k \leq n$ θέτουμε $x_k = k/n$. Για κάθε ακέραιο $0 \leq k < n$ και $x \in [x_k, x_{k+1}]$ έχουμε λοιπόν

$$|g(x) - g(x_k)| < 1.$$

Για $k = 0$, αυτό σημαίνει ότι $g([0, x_1]) \subset p((t_0 - \frac{1}{4}, t_0 + \frac{1}{4}))$. Επειδή το ανοιχτό διάστημα $(t_0 - \frac{1}{4}, t_0 + \frac{1}{4})$ έχει μήκος μικρότερο από 1 και η p απεικονίζει ανοιχτά υποσύνολα του \mathbb{R}

σε ανοιχτά υποσύνολα του μετρικού χώρου S^1 , η

$$p_0 = p|(t_0 - \frac{1}{4}, t_0 + \frac{1}{4}) : (t_0 - \frac{1}{4}, t_0 + \frac{1}{4}) \rightarrow p((t_0 - \frac{1}{4}, t_0 + \frac{1}{4}))$$

είναι ομοιομορφισμός. Η $\tilde{g}_0 = (p_0)^{-1} \circ g : [0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τώρα συνεχής και προφανώς $g(x) = p(\tilde{g}_0(x))$, όταν $x \in [0, x_1]$. Ειδικά, $\tilde{g}_0(0) = t_0$.

Αν $t_1 = \tilde{g}_0(x_1)$, τότε για $k = 1$ βλέπουμε ότι $g([x_1, x_2]) \subset p((t_1 - \frac{1}{4}, t_1 + \frac{1}{4}))$. Για τους ίδιους λόγους, όπως προηγουμένως, η

$$p_1 = p|(t_1 - \frac{1}{4}, t_1 + \frac{1}{4}) : (t_1 - \frac{1}{4}, t_1 + \frac{1}{4}) \rightarrow p((t_1 - \frac{1}{4}, t_1 + \frac{1}{4}))$$

είναι ομοιομορφισμός. Η $\tilde{g}_1 = (p_1)^{-1} \circ g : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τώρα συνεχής και προφανώς $g(x) = p(\tilde{g}_1(x))$, όταν $x \in [x_1, x_2]$. Ειδικά, $\tilde{g}_1(x_1) = t_1 = \tilde{g}_0(x_1)$.

Προχωρώντας επαγωγικά με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε για κάθε $1 \leq k < n$ μια συνεχή συνάρτηση $\tilde{g}_k : [x_k, x_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε $g(x) = p(\tilde{g}_k(x))$, όταν $x \in [x_k, x_{k+1}]$ και $\tilde{g}_k(x_k) = \tilde{g}_{k-1}(x_k)$, όταν $1 < k < n$, ενώ $\tilde{g}_0(0) = t_0$. Συνεπώς ορίζεται καλά η συνάρτηση $\tilde{g} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\tilde{g}(x) = \tilde{g}_k(x)$, όταν $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $0 \leq k < n$, που είναι συνεχής ανύψωση της g με $\tilde{g}(0) = t_0$. \square

Εστω τώρα $f : S^1 \rightarrow S^1$ μια συνεχής απεικόνιση. Από το Λήμμα 3.2.1 προκύπτει ότι υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(p(x)) = p(F(x))$ για κάθε $0 \leq x \leq 1$, δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Αφού $p(F(0)) = p(F(1))$, έχουμε ότι $F(1) - F(0) \in \mathbb{Z}$.

Υποθέτουμε τώρα ότι η f είναι ομοιομορφισμός. Αν $x, y \in [0, 1]$ και $F(x) = F(y)$, τότε $f(p(x)) = f(p(y))$ και συνεπώς $x = y$, γιατί η $p|[0, 1]$ είναι ένα προς ένα. Αυτό δείχνει ότι η F είναι γνήσια μονότονη στο $[0, 1]$ και κατ'επέκταση στο $[0, 1]$, λόγω της συνέχειας. Ειδικά, $F(1) \neq F(0)$. Αν $|F(1) - F(0)| > 1$, τότε υπάρχει $0 < x < 1$ ώστε $|F(x) - F(0)| = 1$, από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής. Αλλά τότε $f(p(x)) = f(p(0))$, που είναι αδύνατον, γιατί η f είναι ένα προς ένα. Αυτό δείχνει ότι $|F(1) - F(0)| = 1$.

Αν η F είναι γνήσια αύξουσα, πρέπει $F(1) = F(0) + 1$ και επαγωγικά μπορούμε να επεκτείνουμε την F σε έναν αύξοντα ομοιομορφισμό $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $F(x+k) = F(x) + k$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{Z}$. Αν η F είναι γνήσια φθίνουσα, πρέπει $F(1) = F(0) - 1$ και επαγωγικά η F επεκτείνεται σε έναν φθινοντα ομοιομορφισμό $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $F(x+k) = F(x) - k$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{Z}$. Σε κάθε περίπτωση ισχύει $f \circ p = p \circ F$.

Συμπερασματικά, για κάθε ομοιομορφισμό $f : S^1 \rightarrow S^1$ υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Ο F λέγεται ανύψωση του f . Είναι προφανές ότι αν ο F είναι ανύψωση του f , τότε για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ο $F + k$ είναι επίσης ανύψωση. Αντίστροφα, αν οι F, G είναι ανυψώσεις της f ,

τότε $p(F(x)) = f(p(x)) = p(G(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, $p(F(x)) - p(G(x)) \in \mathbb{Z}$ και από το από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $F - G = k$.

Ενας ομοιομορφισμός $f : S^1 \rightarrow S^1$ διατηρεί τον προσανατολισμό του κύκλου όταν έχει κάποια ανύψωση που είναι αύξων ομοιομορφισμός, οπότε όλες οι ανψώσεις του είναι αύξοντες ομοιομορφισμοί του \mathbb{R} . Σε αυτή την περίπτωση, κάθε ανύψωση F του f έχει την ιδιότητα $F(x+k) = F(x) + k$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{Z}$. Ο ομοιομορφισμός $f : S^1 \rightarrow S^1$ αντιστρέφει τον προσανατολισμό όταν έχει κάποια ανψωση που είναι φθίνων ομοιομορφισμός, οπότε όλες οι ανψώσεις του είναι φθίνοντες ομοιομορφισμοί του \mathbb{R} . Τότε κάθε ανύψωση F του f έχει την ιδιότητα $F(x+k) = F(x) - k$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{Z}$.

Παραδείγματα 3.2.2. (α) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ η μεταφορά $T_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ανύψωση της στροφής $R_a : S^1 \rightarrow S^1$ κατά γωνία $2\pi a$, όπως είδαμε στην αρχή της προηγούμενης παραγράφου 3.1. Συνεπώς, όλες οι στροφές του κύκλου είναι ομοιομορφισμοί που διατηρούν τον προσανατολισμό.

(β) Η ανάκλαση $f : S^1 \rightarrow S^1$ με $f(z) = \bar{z}$ είναι ομοιομορφισμός, που ανυψώνεται στην $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $F(x) = -x$. Επειδή η F είναι φθίνων ομοιομορφισμός, η ανάκλαση f αντιστρέφει τον προσανατολισμό του S^1 . Αξίζει να σημειωθεί ότι η f έχει ακριβώς δύο σταθερά σημεία, τα $p(0) = 1$ και $p(1/2) = -1$ στη συγκεκριμένη περίπτωση. Αυτή είναι μια ιδιότητα που έχουν όλοι οι ομοιομορφισμοί του κύκλου που αντιστρέφουν τον προσανατολισμό, όπως θα δούμε αμέσως.

Πρόταση 3.2.3. Κάθε ομοιομορφισμός $f : S^1 \rightarrow S^1$ που αντιστρέφει τον προσανατολισμό έχει ακριβώς δύο σταθερά σημεία.

Απόδειξη. Εστω $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια ανύψωση του f . Εστω ότι ο $n \in \mathbb{Z}$ είναι το ακέραιο μέρος του $F(0)$. Τότε

$$n - 2 < F(1) - 1 = F(0) - 2 < n - 1 < n \leq F(0) < n + 1.$$

Επειδή η $F - id$ είναι γνήσια φθίνουσα και συνεχής, από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής προκύπτει ότι υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία $x, y \in [0, 1)$ ώστε $F(x) - x = n - 1$ και $F(y) - y = n$. Αυτό σημαίνει ότι τα $p(x), p(y) \in S^1$ είναι τα μοναδικά σταθερά σημεία του f . \square

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με ομοιομορφισμούς του κύκλου που διατηρούν τον προσανατολισμό. Το σύνολο των ομοιομορφισμών του κύκλου αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση. Το σύνολο \mathcal{H}_+ των ομοιομορφισμών του S^1 που διατηρούν τον προσανατολισμό είναι υποομάδα της. Αν $f \in \mathcal{H}_+$ και F είναι οποιαδήποτε ανύψωση του f , τότε $F^n(x+k) = F^n(x) + k$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $k, n \in \mathbb{Z}$. Επιπλέον, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, η συνεχής συνάρτηση $F^n - id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-περιοδική. Εστω \mathcal{D} το σύνολο των αυξόντων ομοιομορφισμών του \mathbb{R} της μορφής $F = \phi + id$, όπου η $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και 1-περιοδική. Το \mathcal{D} είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση. Κάθε $F \in \mathcal{D}$ επάγει ένα καλά ορισμένο $f \in \mathcal{H}_+$ με $f(p(x)) = p(F(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 3.2.4. Για κάθε $F \in \mathcal{D}$ η ακολουθία των συνεχών 1-περιοδικών συναρτήσεων

$$\phi_n = \frac{1}{n}(F^n - id), \quad n \in \mathbb{N}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια σταθερά, που συμβολίζουμε με $\rho(F) \in \mathbb{R}$. Επιπλέον,

$$\min\{F^n(x) - x : x \in \mathbb{R}\} \leq n\rho(F) \leq \max\{F^n(x) - x : x \in \mathbb{R}\}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Επειδή η ϕ_n είναι συνεχής και 1-περιοδική, υπάρχουν οι πραγματικοί αριθμοί

$$a_n = \min\{\phi_n(x) : x \in \mathbb{R}\}, \quad b_n = \max\{\phi_n(x) : x \in \mathbb{R}\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Για οποιαδήποτε $x, y \in \mathbb{R}$ με $y \leq x < y + 1$ έχουμε

$$\phi_n(y) - \phi_n(x) = \frac{1}{n}[F^n(y) - F^n(x) + x - y] \leq \frac{1}{n}(x - y) < \frac{1}{n}.$$

Από αυτό προκύπτει ότι $b_n - a_n < 1/n$ και συνεπώς $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $F^{nm}(x) - F^{(n-1)m}(x) = m\phi_m(F^{(n-1)m}(x))$ και συνεπώς $ma_m \leq F^{nm}(x) - F^{(n-1)m}(x) \leq mb_m$. Ειδικά, για $m = 1$ έχουμε ότι $a_1 \leq F^n(x) - F^{n-1}(x) \leq b_1$.

Εστω τώρα $k, n \in \mathbb{N}$ με $k < n$. Υπάρχουν $q_n \in \mathbb{N}$ και $0 \leq r_n < k$ ώστε $n = kq_n + r_n$. Εφαρμόζοντας τα προηγούμενα έχουμε

$$q_n k a_k \leq \sum_{j=1}^{q_n} [F^{jk}(x) - F^{(j-1)k}(x)] \leq q_n k b_k,$$

$$r_n a_1 \leq \sum_{j=q_n k+1}^n [F^j(x) - F^{j-1}(x)] \leq r_n b_1,$$

οπότε $q_n k a_k \leq F^{q_n k}(x) - x \leq q_n k b_k$ και $r_n a_1 \leq F^n(x) - F^{q_n k}(x) \leq r_n b_1$. Προσθέτοντας κατά μέλη,

$$q_n k a_k + r_n a_1 \leq F^n(x) - x \leq q_n k b_k + r_n b_1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από αυτό προκύπτει αμέσως ότι

$$q_n k a_k + r_n a_1 \leq n a_n \leq n b_n \leq q_n k b_k + r_n b_1$$

και συνεπώς

$$a_k \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n \leq b_k$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αφού $\lim_{k \rightarrow +\infty} (b_k - a_k) = 0$, όπως είδαμε στην αρχή, πρέπει

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

Αυτόν τον πραγματικό αριθμό συμβολίζουμε με $\rho(F)$. Προφανώς

$$\min\{F^k(x) - x : x \in \mathbb{R}\} \leq k\rho(F) \leq \max\{F^k(x) - x : x \in \mathbb{R}\}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, γιατί $ka_k = \min\{F^k(x) - x : x \in \mathbb{R}\}$ και $kb_k = \max\{F^k(x) - x : x \in \mathbb{R}\}$.

Επειδή

$$a_n - \rho(F) \leq \phi_n(x) - \rho(F) \leq b_n - \rho(F)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει αμέσως ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n = \rho(F)$ ομοιόμορφα στο \mathbb{R} . \square

Παράδειγμα 3.2.5. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ η μεταφορά T_a κατά a είναι προφανώς στοιχείο της \mathcal{D} και

$$\rho(T_a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(T_a)^n(0)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na}{n} = a.$$

Ας σημειωθεί ότι για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ η T_k μετατίθεται με όλα τα στοιχεία της \mathcal{D} . Με άλλα λόγια η υποομάδα $\{T_k : k \in \mathbb{Z}\}$ περιέχεται στο κέντρο της \mathcal{D} .

Λήμμα 3.2.6. Αν οι $F, G \in \mathcal{D}$ μετατίθενται, δηλαδή $G \circ F = F \circ G$, τότε

$$\rho(G \circ F) = \rho(G) + \rho(F).$$

Απόδειξη. Επειδή οι F και G μετατίθενται, επαγωγικά βλέπουμε ότι $(G \circ F)^n = G^n \circ F^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υπολογίζουμε τώρα ότι

$$\begin{aligned} \rho(G \circ F) - \rho(F) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{G^n(F^n(0))}{n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F^n(0)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{G^n(F^n(0)) - F^n(0)}{n} = \rho(G). \quad \square \end{aligned}$$

Εστω τώρα $f \in \mathcal{H}_+$ και $F, G \in \mathcal{D}$ δύο ανυψώσεις του. Τότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $F = G + k$. Αυτό σημαίνει ότι $F = T_k \circ G = G \circ T_k$. Από το προηγούμενο Λήμμα 3.2.6 προκύπτει ότι $\rho(F) = \rho(G) + \rho(T_k) = \rho(G) + k$. Συνεπώς ο μιγαδικός αριθμός $\rho(f) = e^{2\pi i \rho(F)} \in S^1$ δεν εξαρτάται από την επιλογή της ανύψωσης F του f , αλλά μόνο από τον f . Ο $\rho(f)$ λέγεται *αριθμός στροφής του Poincaré του f* και όπως θα δείξουμε σε λίγο είναι αναλλοίωτος από τοπολογικές συζυγίες που διατηρούν τον προσανατολισμό. Πριν προχωρήσουμε, αξίζει να κάνουμε την ακόλουθη παρατήρηση. Η ανύψωση F του f είναι της μορφής $F = \tilde{\phi} + id$, όπου η $\tilde{\phi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής 1-περιοδική συνάρτηση. Η $\tilde{\phi}$ επάγει μια συνεχή συνάρτηση $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ με $\tilde{\phi} = \phi \circ p$. Αφού

$$F^n(x) - x = \sum_{k=0}^{n-1} [F^{k+1}(x) - F^k(x)] = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\phi}(F^k(x)),$$

το Θεώρημα 3.2.4 λέει ότι

$$\rho(F) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(f^k(z))$$

ομοιόμορφα για κάθε $z \in S^1$.

Λήμμα 3.2.7. Εστω ότι $F, G \in \mathcal{D}$ και $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής απεικόνιση της μορφής $H = \psi + id$, όπου η $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής 1-περιοδική συνάρτηση. Αν $H \circ F = G \circ H$, τότε $\rho(F) = \rho(G)$.

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $H \circ F^n = G^n \circ H$, οπότε

$$\frac{\psi(F^n(0))}{n} + \frac{F^n(0)}{n} = \frac{G^n(H(0))}{n}.$$

Επειδή όμως η ψ είναι συνεχής και 1-περιοδική,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\psi(F^n(0))}{n} = 0.$$

Κατά συνέπεια

$$\rho(F) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F^n(0)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{G^n(H(0))}{n} = \rho(G). \quad \square$$

Πρόταση 3.2.8. Αν οι $f, g \in \mathcal{H}_+$ είναι συζυγή στοιχεία της \mathcal{H}_+ , δηλαδή οι f, g είναι τοπολογικά συζυγείς μέσω μιας τοπολογικής συζυγίας που διατηρεί τον προσανατολισμό του S^1 , τότε $\rho(f) = \rho(g)$.

Απόδειξη. Εστω $h \in \mathcal{H}_+$ ώστε $h \circ f = g \circ h$. Εστω επίσης $F, G, H \in \mathcal{D}$ ανυψώσεις των f, g, h , αντίστοιχα. Τότε

$$p \circ H \circ F = h \circ p \circ F = h \circ f \circ p = g \circ h \circ p = g \circ p \circ H = p \circ G \circ H.$$

Από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής, υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $H \circ F = T_k \circ G \circ H$. Ομως, ο $T_k \circ G \in \mathcal{D}$ είναι επίσης ανύψωση του f . Από το προηγούμενο Λήμμα 3.2.7 έχουμε $\rho(F) = \rho(T_k \circ G) = \rho(G) + k$ και κατά συνέπεια $\rho(f) = \rho(g)$. \square

Χρησιμοποιώντας τον αριθμό στροφής μπορούμε να χαρακτηρήσουμε τα στοιχεία της \mathcal{H}_+ που έχουν τουλάχιστον μια περιοδική τροχιά.

Πρόταση 3.2.9. Ο $f \in \mathcal{H}_+$ έχει τουλάχιστον μια περιοδική τροχιά τότε και μόνον τότε όταν $\rho(F) \in \mathbb{Q}$ για κάποια (και συνεπώς για κάθε) ανύψωση F του f .

Απόδειξη. Αν το $z_0 = p(x_0)$ είναι περιοδικό σημείο του f με περίοδο $n \in \mathbb{N}$, τότε $p(x_0) = z_0 = f^n(z_0) = p(F^n(x_0))$. Συνεπώς, υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $F^n(x_0) = x_0 + m$. Προκύπτει ότι

$$\rho(F) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{F^{kn}(x_0) - x_0}{kn} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_0 + km - x_0}{kn} = \frac{m}{n}.$$

Αντίστροφα, αν $\rho(F) = m/n$, όπου $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.4 έχουμε

$$\min\{F^n(x) - x : x \in \mathbb{R}\} \leq m \leq \max\{F^n(x) - x : x \in \mathbb{R}\}.$$

Από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής, υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $F^n(x_0) - x_0 = m$. Οπως είδαμε προηγουμένως, αυτό σημαίνει ότι το $p(x_0) \in S^1$ είναι περιοδικό σημείο του f . \square

Οπως δείχνει η απόδειξη της Πρότασης 3.2.9, αν οι $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ είναι πρώτοι μεταξύ τους και $\rho(F) = m/n$, τότε κάθε περιοδικό σημείο της f έχει περίοδο που είναι διαιρέτης του n . Μάλιστα, αν $P \subset S^1$ είναι το σύνολο των περιοδικών σημείων του f , τότε το

$p^{-1}(P) \subset \mathbb{R}$ είναι ακριβώς το σύνολο των σταθερών σημείων του $F^n - m$. Πράγματι, έστω ότι $p(x_0) \in P$ με περίοδο $r \in \mathbb{N}$. Σύμφωνα με την απόδειξη της Πρότασης 3.2.9, υπάρχει $s \in \mathbb{Z}$ ώστε $F^r(x_0) = x_0 + s$ και τότε $m/n = \rho(F) = s/r$, δηλαδή υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ ώστε $s = lm$ και $r = ln$. Συνεπώς, $F^{ln}(x_0) = x_0 + lm$. Από αυτό προκύπτει ότι $F^n(x_0) = x_0 + m$, γιατί αν $F^n(x_0) > x_0 + m$, από τη μονοτονία της F έχουμε

$$F^{2n}(x_0) - 2m = F^n(F^n(x_0) - m) - m > F^n(x_0) - m > x_0,$$

και επαγωγικά $F^{ln}(x_0) > x_0 + lm$. Ομοια, αν $F^n(x_0) < x_0 + m$, τότε $F^{ln}(x_0) < x_0 + lm$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι όλα τα περιοδικά σημεία της f έχουν περίοδο διαιρετή του n .

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε ομοιομορφισμούς του S^1 που διατηρούν τον πρσσανατολισμό και έχουν άρρητο αριθμό στροφής, δηλαδή ο αριθμός στροφής κάποιας ανύψωσης είναι άρρητος. Θα χρειαστούμε την ακόλουθη έννοια, που έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει πεπλεγμένα.

Ορισμός 3.2.10. Έστω X ένας μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow X$ ένας ομοιομορφισμός. Αν $x \in X$, το σύνολο

$$L^+(x) = \{y \in X : f^{n_k}(x) \rightarrow y \text{ για κάποια } n_k \rightarrow +\infty\}$$

λέγεται *θετικό οριακό σύνολο* του x .

Το $L^+(x)$ είναι κλειστό και f -αναλλοίωτο σύνολο. Είναι προφανές ότι $L^+(f(x)) = L^+(x)$, δηλαδή το θετικό οριακό σύνολο του σημείου $x \in X$ εξαρτάται από την τροχιά του x και όχι από το ίδιο το σημείο x . Ομοια ορίζεται το αρνητικό οριακό σύνολο $L^-(x)$, που έχει ανάλογες ιδιότητες.

Πρόταση 3.2.11. Αν ο $f \in \mathcal{H}_+$ έχει άρρητο αριθμό στροφής, τότε υπάρχει ένα μοναδικό συμπαγές f -αναλλοίωτο σύνολο $K \subset S^1$ με τις ακόλουθες ιδιότητες.

- (α) $L^+(z) = L^-(z) = K$ για κάθε $z \in S^1$ και συνεπώς ο $f|_K$ είναι ελαχιστικός.
- (β) Είτε $K = S^1$ είτε το K είναι σύνολο Cantor.

Απόδειξη. Έστω $z \in S^1$ ένα οποιοδήποτε σημείο και $K = L^+(z)$. Επειδή το K είναι κλειστό και f -αναλλοίωτο, έχουμε $L^+(y) \cup L^-(y) \subset K$ για κάθε $y \in K$. Το σύνολο $S^1 \setminus K$ είναι η ένωση αριθμήσιμου πλήθους ξένων μεταξύ τους τόξων I_n , $n \in \mathbb{Z}$, που είναι οι συνεκτικές συνιστώσες του $S^1 \setminus K$, τις οποίες η f μεταθέτει. Έστω $y \in S^1 \setminus K$. Αν $L^+(y) \cap (S^1 \setminus K) \neq \emptyset$, υπάρχουν $n, k, l \in \mathbb{Z}$ με $k > l$ ώστε $f^k(y), f^l(y) \in I_n$. Αυτό σημαίνει ότι $y \in f^{-k}(I_n) \cap f^{-l}(I_n)$ και συνεπώς $f^{k-l}(I_n) \cap I_n \neq \emptyset$. Τότε $f^{k-l}(\bar{I}_n) = \bar{I}_n$, και η f^{k-l} έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο στο \bar{I}_n , από την Πρόταση 2.1.1. Αυτό όμως αντιφάσκει με την Πρόταση 3.2.9, αφού υποτίθεται ότι ο αριθμός στροφής του f είναι άρρητος. Αυτό δείχνει ότι $L^+(y) \subset K$ και όμοια $L^-(y) \subset K$ για κάθε $y \in S^1$. Με άλλα λόγια, $L^+(y) \cup L^-(y) \subset L^+(z)$ για κάθε $z, y \in S^1$ και όμοια $L^+(y) \cup L^-(y) \subset L^-(z)$. Κατά συνέπεια $L^+(y) \cup L^-(y) \subset L^+(z) \cap L^-(z)$ για κάθε $z, y \in S^1$ και συμμετρικά

$$L^+(z) \cup L^-(z) \subset L^+(y) \cap L^-(y) \subset L^+(y) \cup L^-(y) \subset L^+(z) \cap L^-(z)$$

για κάθε $z, y \in S^1$. Προκύπτει ότι $K = L^+(y) = L^-(y) = L^+(z) = L^-(z)$ για κάθε $z, y \in S^1$. Από αυτό είναι προφανές ότι το K είναι τέλειο σύνολο. Αν το K δεν είναι ολικά-μη-συνεκτικό, περιέχει κάποιο ανοιχτό τόξο $J \subset S^1$. Τότε για κάθε $z \in S^1$ υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $f^n(z) \in J$, δηλαδή $z \in f^{-n}(J) \subset K$. Αυτό δείχνει ότι $K = S^1$, αν το K δεν

είναι σύνολο Cantor. \square

Παράδειγμα στοιχείου της \mathcal{H}_+ για το οποίο το σύνολο K είναι ολόκληρος ο κύκλος, είναι οποιαδήποτε άρρητη στροφή, όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο 3.1. Αργότερα θα κατασκευάσουμε παραδείγματα στα οποία το K είναι σύνολο Cantor.

Γενικά, αν X είναι ένας μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow X$ είναι ένας ομοιομορφισμός, ένα συμπαγές f -αναλλοίωτο σύνολο $K \subset X$ λέγεται ελαχιστικό, όταν η $f|_K : K \rightarrow K$ είναι ελαχιστικός ομοιομορφισμός.

Λήμμα 3.2.12. *Εστω $f \in \mathcal{H}_+$ και F μια ανύψωση του f . Εστω ότι $\rho(F) = a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Αν $x \in \mathbb{R}$ και $C(x) = \{F^n(x) + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$, τότε η συνάρτηση $F_x : C(x) \rightarrow \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ με*

$$F_x(F^n(x) + m) = m + an$$

είναι γνήσια αύξουσα και επί.

Απόδειξη. Αν $F^n(x) + m < F^k(x) + l$, τότε $F^{n-k}(x) < x + l - m$ και συνεπώς

$$F^{2(n-k)}(x) < F^{n-k}(x + l - m) = F^{n-k}(x) + (l - m) < x + 2(l - m).$$

Επαγωγικά τώρα βλέπουμε ότι

$$F^{q(n-k)}(x) < F^{n-k}(x) + (q - 1)(l - m) < x + q(l - m)$$

για κάθε $q \in \mathbb{N}$. Διαιρώντας με q και παίρνοντας το όριο όταν $q \rightarrow +\infty$ βρίσκουμε ότι $(n - k)a \leq l - m$. Επειδή ο a είναι άρρητος, πρέπει $(n - k)a < l - m$. \square

Είμαστε σε θέση τώρα να δώσουμε μια περιγραφή των ομοιομορφισμών του κύκλου που διατηρούν τον προσανατολισμό και έχουν άρρητο αριθμό στροφής, αποδεικνύοντας το ακόλουθο Θεώρημα του H. Poincaré.

Θεώρημα 3.2.13. *Αν ο $f \in \mathcal{H}_+$ έχει αριθμό στροφής $\rho(f) = e^{2\pi ia}$, όπου $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, τότε είναι τοπολογικά ημισυζυγής προς την άρρητη στροφή R_a , δηλαδή υπάρχει μια συνεχής και επί απεικόνιση $h : S^1 \rightarrow S^1$ ώστε $h \circ f = R_a \circ h$. Αν ο f είναι τοπολογικά μεταβατικός, τότε ο h είναι ομοιομορφισμός και συνεπώς ο f είναι τοπολογικά συζυγής με την άρρητη στροφή R_a .*

Απόδειξη. Εστω K το μοναδικό ελαχιστικό σύνολο του f και έστω $z_0 = e^{2\pi i x_0} \in K$ ένα οποιοδήποτε σημείο. Εστω F μια ανύψωση του f , ώστε $\rho(F) = a$. Αν C είναι η τροχιά του z_0 , η συνάρτηση $H : p^{-1}(C) \rightarrow \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ με $H(F^n(x_0) + m) = m + an$ είναι γνήσια αύξουσα και επί, από το προηγούμενο Λήμμα 3.2.12. Επιπλέον, $H(F^n(x_0) + m + 1) = m + 1 + an = H(F^n(x_0) + m) + 1$ και

$$H(F(F^n(x_0) + m)) = H(F^{n+1}(x_0) + m) = m + (n + 1)a = T_a(H(F^n(x_0) + m)),$$

δηλαδή $H \circ F = T_a \circ H$. Μπορούμε να επεκτείνουμε την H στο $\overline{p^{-1}(C)}$ θέτοντας

$$H(x) = \lim_{t \in p^{-1}(C), t \rightarrow x} H(t).$$

Το δεξιό και το αριστερό όριο υπάρχουν, λόγω της μονοτονίας της H και είναι ίσα γιατί το $\mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ είναι πυκνό υποσύνολο του \mathbb{R} , από το Λήμμα 3.1.1, αφού ο a είναι άρρητος.

Η συνάρτηση H είναι συνεχής και αύξουσα, αλλά ενδεχομένως όχι γνήσια αύξουσα. Πράγματι, αν το διάστημα I είναι μια συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{R} \setminus p^{-1}(C)$, τότε η H παίρνει την ίδια τιμή στα άκρα του I . Η H επεκτείνεται τώρα σε μια συνεχή συνάρτηση στο \mathbb{R} , ορίζοντας η H να απεικονίζει κάθε συνεκτική συνιστώσα I του $\mathbb{R} \setminus p^{-1}(C)$ στην κοινή τιμή που παίρνει στα άκρα του. Έτσι κατασκευάζεται μια συνεχής, επί και αύξουσα συνάρτηση $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $H(x+1) = H(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $H \circ F = T_a \circ H$. Συνεπώς, η $h : S^1 \rightarrow S^1$ με $h(p(x)) = p(H(x))$ είναι μια καλά ορισμένη, συνεχής και επί απεικόνιση και $h \circ f = R_a \circ h$. Επιπλέον, $h(K) = h(f(K)) = R_a(h(K))$, οπότε $h(K) = S^1$, από την Πρόταση 3.1.2. Είναι προφανές από την κατασκευή της H ότι αν $K = S^1$, τότε η H είναι γνήσια αύξουσα και ο h είναι ομοιομορφισμός. \square

Όπως δείχνει η απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.13, στην περίπτωση που ο $f \in \mathcal{H}_+$ έχει άρρητο αριθμό στροφής και δεν είναι τοπολογικά μεταβατικός (ή ισοδύναμα ελαχιστικός), τότε η ημισυζυγία h που κατασκευάσαμε απεικονίζει το μοναδικό ελαχιστικό σύνολο Cantor K της f επί του κύκλου και είναι σταθερή σε καθένα ανοιχτό τόξο στο $S^1 \setminus K$. Αυτό δείχνει και μια κατεύθυνση για την κατασκευή παραδειγμάτων τέτοιων ομοιομορφισμών του κύκλου.

Ασκήσεις

1. Εστω $\chi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}_+$ η απεικόνιση με $\chi(F) = f$, δηλαδή σε κάθε $F \in \mathcal{D}$ αντιστοιχεί τον $f \in \mathcal{H}_+$ που ορίζεται από τον τύπο $f(p(x)) = p(F(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδειχθεί ότι η χ είναι επιμορφισμός ομάδων.

(β) Να αποδειχθεί ότι $\text{Ker } \chi = \{T_k : k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$ και συνεπώς $\mathcal{D}/\mathbb{Z} \cong \mathcal{H}_+$.

2. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $F \in \mathcal{D}$ ισχύει

$$\rho(F) = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{n} (F^n - id)$$

ομοιόμορφα στο \mathbb{R} .

3. Εστω $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η απεικόνιση με $F(x) = x + \frac{1}{10} \sin^2 \pi x$. Να αποδειχθεί ότι $F \in \mathcal{D}$ και να υπολογιστεί ο $\rho(F)$.

4. Εστω $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η απεικόνιση με $F(x) = x + \frac{1}{4\pi} \sin 2\pi x$. Να αποδειχθεί ότι $F \in \mathcal{D}$ και να υπολογιστεί ο $\rho(F)$.

5. Να αποδειχθεί ότι δύο στροφές R_a και R_b , όπου $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, είναι τοπολογικά συζυγείς μέσω μιας τοπολογικής συζυγίας που διατηρεί τον προσανατολισμό του S^1 τότε και μόνον τότε όταν $a = b$.

6. Εστω $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και $h \in \mathcal{H}_+$ ώστε $h \circ R_a = R_a \circ h$. Να αποδειχθεί ότι η h είναι στροφή κατά γωνία $2\pi H(0)$, όπου H είναι μια ανύψωση της h .

7. Εστω $f \in \mathcal{H}_+$ με άρρητο αριθμό στροφής $\rho(f) = e^{2\pi i a}$, δηλαδή $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Εστω επιπλέον ότι η f είναι τοπολογικά μεταβατική. Αν οι $h, g \in \mathcal{H}_+$ είναι δύο τοπολογικές συζυγίες της f με τη στροφή R_a , να αποδειχθεί ότι η $h \circ g^{-1}$ είναι στροφή. (Υπόδειξη:

Χρησιμοποιείστε την προηγούμενη άσκηση 6.)

8. Να αποδειχθεί ότι αν $F \in \mathcal{D}$, τότε $\rho(F^n) = n\rho(F)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

9. Εστω $F \in \mathcal{D}$ και $\phi = F - id$.

(α) Να αποδειχθεί ότι $|\phi(x) - \phi(0)| < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Να αποδειχθεί ότι $|F^n(0) - nF(0)| \leq n - 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

10. Αν $F, G \in \mathcal{D}$, να αποδειχθεί ότι $|(G \circ F)^n(0) - G^n(0) - F^n(0)| \leq 4n - 3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Κατά συνέπεια $|\rho(G \circ F) - \rho(G) - \rho(F)| \leq 4$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την προηγούμενη άσκηση 9.)

11. Έστω $f \in \mathcal{H}_+$. Αν $z \in S^1$ και το οριακό σύνολο $L^+(z)$ περιέχει ένα περιοδικό σημείο y περιόδου $q \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί ότι $L^+(z) = \{y, \dots, f^{q-1}(y)\}$.

12. Έστω $f : S^1 \rightarrow S^1$ μία C^1 αμφιδιαφύριση που διατηρεί τον προσανατολισμό και $F \in \mathcal{D}$ μία οποιαδήποτε ανύψωση της. Αν $\rho(F) = \frac{m}{n}$, όπου οι $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι πρώτοι μεταξύ τους, να αποδειχθεί ότι η f έχει τουλάχιστον ένα περιοδικό σημείο $z_0 = e^{2\pi i t_0} \in S^1$, τέτοιο ώστε $(F^n)'(t_0) \leq 1$.

3.3 Ο ρόλος του βαθμού διαφορισιμότητας

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε το περίφημο θεώρημα που απέδειξε ο A. Denjoy το 1932 για τις αμφιδιαφύρισεις του κύκλου που διατηρούν τον προσανατολισμό και έχουν άρρητο αριθμό στροφής. Εστω $f : S^1 \rightarrow S^1$ μια C^2 αμφιδιαφύριση που διατηρεί τον προσανατολισμό και F μια ανύψωση του f . Δηλαδή, η $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^2 , όπως επίσης και η F^{-1} . Τότε $F'(x) > 0$ και $F'(x - [x]) = F'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Εστω

$$c = \sup\left\{\frac{|F''(x)|}{F'(x)} : x \in [0, 1]\right\}.$$

Θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.3.1. Αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $x \neq y$, τότε

$$\left|\log \frac{(F^n)'(x)}{(F^n)'(y)}\right| \leq c \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |F^k(x) - F^k(y)|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$(F^n)'(x) = \prod_{k=0}^{n-1} F'(F^k(x)),$$

οπότε από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής

$$\left|\log \frac{(F^n)'(x)}{(F^n)'(y)}\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\log F'(F^k(x)) - \log F'(F^k(y))| \leq c \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |F^k(x) - F^k(y)|. \quad \square$$

Θεώρημα 3.3.2. Εστω $f : S^1 \rightarrow S^1$ μια C^2 αμφιδιαφόριση που διατηρεί τον προσανατολισμό με αριθμό στοφής $\rho(f) = e^{2\pi ia}$. Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, τότε η f είναι τοπολογικά συζυγής με την άρρητη στροφή R_a .

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.2.13, αρκεί να δείξουμε ότι το μοναδικό ελαχιστικό σύνολο K της f είναι ο ίδιος ο κύκλος. Προχωρούμε με απαγωγή στο άτοπο, υποθέτοντας ότι αυτό δεν συμβαίνει, οπότε το K είναι σύνολο Cantor, σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.11. Εστω I μια συνεκτική συνιστώσα του $S^1 \setminus K$, δηλαδή ένα μέγιστο ανοιχτό τόξο που περιέχεται στο $S^1 \setminus K$. Υπάρχουν $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ με $0 \leq y_0 - x_0 < 1$ ώστε $I = p((x_0, y_0))$. Εστω l_n το μήκος του διαστήματος $p^{-1}(f^n(I)) \cap [0, 1]$. Για κάθε $x, y \in [x_0, y_0]$ έχουμε

$$\left| \log \frac{(F^n)'(x)}{(F^n)'(y)} \right| \leq c \sum_{k=0}^{n-1} l_k \leq c$$

από το προηγούμενο Λήμμα 3.3.1, οπότε $(F^n)'(x) \leq e^c (F^n)'(y)$. Από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής, υπάρχει $\xi_n < \xi_n < y_0$, ώστε $F^n(y_0) - F^n(x_0) = (F^n)'(\xi_n)(y_0 - x_0)$. Συνεπώς, $l_n = l_0 \cdot (F^n)'(\xi_n)$. Εφαρμόζοντας τα προηγούμενα για $y = \xi_n$ προκύπτει ότι

$$(F^n)'(x) \leq e^c \cdot \frac{l_n}{l_0}$$

για κάθε $x \in [x_0, y_0]$. Επειδή η f δεν έχει περιοδικά σημεία, αφού έχει άρρητο αριθμό στοφής, τα διαστήματα $p^{-1}(f^n(I)) \cap [0, 1]$, $n \in \mathbb{Z}$, είναι ξένα μεταξύ τους και

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} l_n \leq 1.$$

Αρα $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} l_n = 0$ και $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} (F^n)' = 0$ ομοιόμορφα στο $[x_0, y_0]$.

Αν $0 < d < \min\{1, l_0/ce^{c+1}\}$, τότε για κάθε ακέραιο $n \geq 0$ και κάθε $x_0 - d \leq x < x_0$ έχουμε

$$(F^n)'(x) \leq e(F^n)'(x_0).$$

Πράγματι, για $n = 0$ αυτό είναι τετριμμένο. Προχωρούμε επαγωγικά υποθέτοντας ότι ισχύει για κάθε $0 \leq k < n$. Από το Λήμμα 3.3.1, για κάθε $x_0 - d \leq x < x_0$ έχουμε

$$\left| \log \frac{(F^n)'(x)}{(F^n)'(x_0)} \right| \leq c \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |F^k(x) - F^k(x_0)|.$$

Από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής, υπάρχει $u_k \in (x, x_0)$ ώστε

$$\left| \log \frac{(F^n)'(x)}{(F^n)'(x_0)} \right| \leq cd \sum_{k=0}^{n-1} (F^k)'(u_k)$$

και από την επαγωγική υπόθεση

$$\left| \log \frac{(F^n)'(x)}{(F^n)'(x_0)} \right| \leq cde \sum_{k=0}^{n-1} (F^k)'(x_0) \leq cde^{c+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l_k}{l_0} \leq \frac{1}{l_0} cde^{c+1} < 1,$$

οπότε $(F^n)'(x) \leq e(F^n)'(x_0)$.

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα, συμπεραίνουμε ότι

$$(F^n)'(x) \leq e^{c+1} \frac{l_n}{l_0}$$

για κάθε $x \in [x_0 - d, y_0]$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} (F^n)' = 0$ ομοιόμορφα στο $[x_0 - d, y_0]$.

Αν $z_0 = e^{2\pi i x_0}$, υπάρχουν $n_k \rightarrow +\infty$ ώστε $\lim_{k \rightarrow +\infty} f^{n_k}(z_0) = z_0$, γιατί $z_0 \in K$ και η $f|_K$ είναι ελαχιστικός ομοιομορφισμός. Υπάρχει κάποιο $k \in \mathbb{N}$ ώστε $(F^{n_k})'(x) < 1/2$ για κάθε $x \in [x_0 - d, y_0]$ και $f^{n_k}(z_0) \in p((x_0 - \frac{d}{2}, y_0))$. Τότε,

$$|F^{n_k}(x) - F^{n_k}(x_0)| < \frac{d}{2}$$

για κάθε $x \in [x_0 - d, x_0]$, από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής και υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$|F^{n_k}(x_0) + m - x_0| < \frac{d}{2}.$$

Συνεπώς, $|F^{n_k}(x) + m - x_0| < d$ για κάθε $x \in [x_0 - d, x_0]$. Αυτό σημαίνει ότι $f^{n_k}(J) \subset J$, όπου $J = p([x_0 - d, x_0])$. Επειδή το J είναι κλειστό τόξο, άρα ομοιομορφικό με κλειστό διάστημα, η f^{n_k} πρέπει να έχει ένα σταθερό σημείο στο J . Αυτό όμως είναι αντίφαση. \square

Το Θεώρημα 3.3.2 δεν ισχύει με την υπόθεση ότι η f είναι C^1 αμφιδιαφόριση. Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε μια C^1 αμφιδιαφόριση $f \in \mathcal{H}_+$ με άρρητο αριθμό στροφής που δεν είναι τοπολογικά μεταβατική και συνεπώς δεν είναι τοπολογικά συζυγής με στροφή.

Εστω $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και $x_0 \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z} + a\mathbb{Z})$. Επειδή το $\mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ είναι πυκνό υποσύνολο του \mathbb{R} , το ίδιο ισχύει και για το $x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$. Εστω $l_n > 0$, $n \in \mathbb{Z}$, τέτοιοι ώστε

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} l_n = 1.$$

Για παράδειγμα $l_n = \frac{c}{|n|^2 + 1}$, $n \in \mathbb{Z}$, όπου $c = \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}\right]^{-1}$. Εστω $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ η

συνάρτηση με

$$q(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } t \notin x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z} \\ l_n, & \text{αν } t = x_0 + m + an \text{ για κάποια } m, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

και $J : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$J(t) = \begin{cases} \sum_{0 \leq s \leq t} q(s), & \text{αν } t \geq 0 \\ - \sum_{t < s \leq 0} q(s), & \text{αν } t < 0. \end{cases}$$

Λήμμα 3.3.3 Η συνάρτηση J είναι γνήσια αύξουσα και συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R} \setminus x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$. Στο σημείο $x_0 + m + an \in x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ είναι δεξιά συνεχής, ενώ από

αριστερά παρουσιάζει άλμα l_n . Επιπλέον, η J έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.

(α) $J(0) = 0$ και $J(t+1) = J(t) + 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(β) Το σύνολο $C = \overline{J(\mathbb{R})}$ είναι κλειστό, τέλει, ολικά-μη-συνεκτικό και $T_1(C) = C$.

Απόδειξη. Αν $t_1 > t_2 \geq 0$, τότε

$$J(t_1) = \sum_{0 \leq s \leq t_1} q(s) > \sum_{0 \leq s \leq t_2} q(s) = J(t_2),$$

γιατί το $x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ είναι πυκνό υποσύνολο του \mathbb{R} και συνεπώς υπάρχει $s \in x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ με $t_1 > s > t_2$. Ομοια, αν $t_1 < t_2 < 0$, τότε $J(t_1) < J(t_2)$. Επίσης, αν $t_1 < 0 < t_2$, τότε προφανώς $J(t_1) < 0 < J(t_2)$.

Για τη συνέχεια της J έστω $t \geq 0$. Αν $t_k \searrow t$, τότε

$$J(t_k) = \sum_{0 \leq s \leq t_k} q(s) \searrow \sum_{0 \leq s \leq t} q(s) = J(t),$$

που δείχνει ότι η J είναι δεξιά συνεχής στο t . Αν τώρα $t_k \nearrow t$, τότε

$$J(t_k) = \sum_{0 \leq s \leq t_k} q(s) \nearrow \sum_{0 \leq s < t} q(s) = J(t) - q(t).$$

Συνεπώς, όταν $t \notin x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$, τότε $q(t) = 0$ και $\lim_{s \rightarrow t^-} J(s) = J(t)$, ενώ όταν $t = x_0 + m + an$, τότε $q(t) = l_n$ και $\lim_{s \rightarrow t^-} J(s) = J(t) - l_n$. Με άλλα λόγια, η J είναι αριστερά συνεχής σε κάθε $t \geq 0$ με $t \notin x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$, αλλά στο $t = x_0 + m + an$ παρουσιάζει άλμα l_n από αριστερά. Ομοια για $t < 0$.

(α) Επειδή $0 \notin x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ έχουμε $q(0) = 0$ και $J(0) = 0$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{Z}$ υπάρχει ένας μοναδικός $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $t < x_0 + m + an \leq t + 1$, γιατί το διάστημα $(t, t + 1]$ έχει μήκος 1. Συνεπώς,

$$\sum_{t < s \leq t+1} q(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} l_n = 1.$$

Αν $t \geq 0$, τότε

$$J(t+1) = \sum_{0 \leq s \leq t+1} q(s) = \sum_{0 \leq s \leq t} q(s) + \sum_{t < s \leq t+1} q(s) = J(t) + 1.$$

Αν $-1 \leq t < 0$, τότε

$$J(t+1) = \sum_{0 \leq s \leq t+1} q(s) = - \sum_{t < s \leq 0} q(s) + \sum_{t < s \leq t+1} q(s) = J(t) + 1.$$

Τέλος, αν $t < -1$, τότε $t+1 < 0$ και έχουμε

$$J(t+1) = - \sum_{t+1 < s \leq 0} q(s) = - \sum_{t < s \leq 0} q(s) + \sum_{t < s \leq t+1} q(s) = J(t) + 1.$$

(β) Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ υπάρχει μια ακολουθία $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ σημείων του $x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ που συγκλίνει από δεξιά στο t και $t_k > t$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, η ακολουθία $(J(t_k))_{k \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει από δεξιά στο $J(t)$ και $J(t_k) > J(t)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, από τη γνήσια μονοτονία της J . Από αυτό προκύπτει ότι το C είναι τέλει σύνολο.

Αν το C περιέχει κάποιο ανοιχτό διάστημα I , τότε $I \cap J(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, δηλαδή υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ ώστε $J(t) \in I$. Αν $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία σημείων του $x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$, όπως προηγουμένως, δηλαδή που συγκλίνει από δεξιά στο t , τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $J(t_k) \in I$. Υπάρχουν $m, n \in \mathbb{Z}$ ώστε $t_k = x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$. Συνεπώς,

$$\emptyset \neq (J(t_k) - l_n, J(t_k)) \cap I \subset (\mathbb{R} \setminus C) \cap I = \emptyset,$$

που είναι αντίφαση. \square

Σύμφωνα με τους προηγούμενους ορισμούς και το Λήμμα 3.3.3, έχουμε

$$J(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n,m \in \mathbb{Z}} [J(x_0 + m + an) - l_n, J(x_0 + m + an))$$

και

$$C = \overline{J(\mathbb{R})} = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n,m \in \mathbb{Z}} (J(x_0 + m + an) - l_n, J(x_0 + m + an)).$$

Θέτουμε $I_{n,m} = [J(x_0 + m + an) - l_n, J(x_0 + m + an)]$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Από τις ιδιότητες της J , υπάρχει μια μοναδική συνεχής συνάρτηση $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $H \circ J = id$ και $H(x) = x_0 + m + an$, όταν $x \in I_{n,m}$, για κάποια $m, n \in \mathbb{Z}$. Προφανώς, $H(C) \supset H(J(\mathbb{R})) = \mathbb{R}$, δηλαδή $H(C) = \mathbb{R}$. Επειδή η J είναι γνήσια αύξουσα, η H είναι αύξουσα, αλλά όχι γνήσια, αφού είναι σταθερή σε κάθε διάστημα $I_{n,m}$. Είναι φανερό ότι $H(0) = 0$, γιατί $J(0) = 0$. Τέλος, $H(x+1) = H(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, αν $x \in J(\mathbb{R})$ και $x = J(t)$, τότε $H(x+1) = H(J(t)+1) = H(J(t+1)) = t+1 = H(x)+1$. Από τη συνέχεια, $H(x+1) = H(x) + 1$ για κάθε $x \in C$. Αν τώρα $x \in \mathbb{R} \setminus C$, υπάρχουν $m, n \in \mathbb{Z}$ ώστε $x \in I_{n,m}$, οπότε $x+1 \in I_{n,m+1}$ και $H(x+1) = x_0 + (m+1) + an = x_0 + m + an + 1 = H(x) + 1$.

Αν για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ επιλέξουμε έναν οποιοδήποτε αύξοντα ομοιομορφισμό

$$F_{n,0} : I_{n,0} \rightarrow I_{n+1,0}$$

και θέσουμε $F_{n,m} = T_m \circ F_{n,0} \circ T_{-m} : I_{n,m} \rightarrow I_{n+1,m}$, για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, τότε

$$F_{n,m}(J(x_0 + m + an)) = J(x_0 + m + an + a)$$

για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}$. Από τη δεξιά συνέχεια και τη μονοτονία της J προκύπτει ότι οι $F_{n,m}$, $n, m \in \mathbb{Z}$ επεκτείνονται σε έναν αύξοντα ομοιομορφισμό $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τον οποίο ισχύει $F(x) = J(H(x) + a)$ για κάθε $x \in J(\mathbb{R})$. Επιπλέον, $F(x+1) = F(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από τις αντίστοιχες ιδιότητες των J και H .

Είναι φανερό ότι $H(F(x)) = H(J(H(x) + a)) = T_a(H(x))$ για κάθε $x \in J(\mathbb{R})$ και συνεπώς για κάθε $x \in C$, λόγω της συνέχειας. Επιπλέον, αν $x \in I_{n,m}$, τότε

$$H(F(x)) = x_0 + m + an + a = T_a(H(x)).$$

Αυτά δείχνουν ότι $H \circ F = T_a \circ H$ παντού στο \mathbb{R} .

Τέλος, το C είναι F -αναλλοίωτο σύνολο, γιατί $F(J(t)) = J(t+a)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι $F(J(\mathbb{R})) = J(\mathbb{R})$, οπότε $F(C) = C$, γιατί η F είναι ομοιομορφισμός. Επιπλέον, αν επιλέξουμε ένα $x \in J(\mathbb{R})$ ώστε $H(x) \notin x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$, τότε

$$H(F^k(x) + l) = H(x) + ak + l \notin x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$$

και $F^k(x) + l = J(H(x) + ak + l)$ για κάθε $k, l \in \mathbb{Z}$. Επειδή το $H(x) + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ είναι πυκνό υποσύνολο του \mathbb{R} , το σύνολο $\{F^k(x) + l : k, l \in \mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό στο $J(\mathbb{R})$ και συνεπώς στο C , από τη δεξιά συνέχεια της J .

Με αυτό τον τρόπο έχουμε κατασκευάσει έναν $F \in \mathcal{D}$, που βέβαια επάγει έναν $f \in \mathcal{H}_+$. Η H με τη σειρά της επάγει μια συνεχή και επί απεικόνιση $h : S^1 \rightarrow S^1$ και είναι φανερό ότι $h \circ f = R_a \circ h$, δηλαδή η h είναι τοπολογική ημισυζυγία της f προς την άρρητη στροφή R_a . Το $K = p(C)$ είναι ένα f -αναλλοίωτο σύνολο Cantor στον S^1 , μέσα στο οποίο υπάρχει τουλάχιστον μια πυκνή στο K τροχιά, που μπορεί να είναι η τροχιά οποιουδήποτε σημείου $p(x)$ τέτοιου ώστε $H(x) \notin x_0 + \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$. Από την Πρόταση 3.2.11 προκύπτει ότι η f δεν είναι τοπολογικά συζυγής με στροφή και το K είναι το μοναδικό ελαχιστικό σύνολο της f .

Αν επιλέξουμε τους l_n , $n \in \mathbb{Z}$, κατάλληλα, είναι δυνατό να κατασκευάσουμε μια C^1 αμφιδιαφόριση $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με όλες τις παραπάνω ιδιότητες. Έτσι θα πάρουμε ένα παράδειγμα που δείχνει ότι το Θεώρημα 3.3.2 δεν ισχύει με την ασθενέστερη υπόθεση ότι η f είναι C^1 αμφιδιαφόριση.

Στη συνέχεια θα υποθέτουμε ότι επιπλέον

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{l_{n+1}}{l_n} = 1 \quad \text{και} \quad \frac{l_{n+1}}{l_n} > \frac{1}{3} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{Z}.$$

Αυτές οι ιδιότητες ικανοποιούνται αν για παράδειγμα επιλέξουμε $l_n = \frac{c}{|n|^2 + 1}$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\text{όπου } c = \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} \right]^{-1}$$

Λήμμα 3.3.4. Υπάρχουν C^1 αμφιδιαφορίσεις $F_{n,0} : I_{n,0} \rightarrow I_{n+1,0}$, $n \in \mathbb{Z}$, με τις ακόλουθες ιδιότητες.

$$(a) \quad F'_{n,0}(J(x_0 + an) - l_n) = F'_{n,0}(J(x_0 + an)) = 1.$$

$$(b) \quad 0 < F'_{n,0}(x) \leq 1 + 6 \left| \frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right| \text{ για κάθε } x \in I_{n,0}, n \in \mathbb{Z} \text{ και}$$

$$(c) \quad \lim_{n \rightarrow \pm\infty} (\sup\{|F'_{n,0}(x) - 1| : x \in I_{n,0}\}) = 0.$$

Απόδειξη. Για απλότητα στο συμβολισμό θέτουμε $a_n = J(x_0 + an) - l_n$, $b_n = J(x_0 + an)$, οπότε $I_{n,0} = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{Z}$. Θέτουμε επίσης

$$c_n = 6 \left(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right) > -4.$$

Ορίζουμε την $F_{n,0} : I_{n,0} \rightarrow I_{n+1,0}$ από τον τύπο

$$F_{n,0}(x) = a_{n+1} + \int_{a_n}^x \left[1 + \frac{c_n}{l_n^2} (y - a_n)(b_n - y) \right] dy.$$

Η $F_{n,0}$ είναι προφανώς C^1 , $F_{n,0}(a_n) = a_{n+1}$ και

$$\begin{aligned} F_{n,0}(b_n) &= a_{n+1} + \int_{a_n}^{b_n} dy + \frac{c_n}{l_n^2} \int_{a_n}^{b_n} (y - a_n)(b_n - y) dy \\ &= a_{n+1} + (b_n - a_n) + \frac{c_n}{l_n^2} \frac{(b_n - a_n)^3}{6} \\ &= a_{n+1} + l_n + \left(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right) l_n \end{aligned}$$

$$= a_{n+1} + l_n + l_{n+1} - l_n = a_{n+1} + l_{n+1} = b_{n+1}.$$

Η $F_{n,0}$ είναι γνήσια αύξουσα, γιατί

$$F'_{n,0}(x) = 1 + \frac{c_n}{l_n^2}(x - a_n)(b_n - x) > 1 - \frac{4}{l_n^2}(x - a_n)(b_n - x) \geq 1 - \frac{4}{l_n^2} \cdot \frac{l_n^2}{4} = 0.$$

για κάθε $x \in I_{n,0}$. Συνεπώς,

$$F_{n,0}(I_{n,0}) = F_{n,0}([a_n, b_n]) = [a_{n+1}, b_{n+1}] = I_{n+1,0}$$

και η $F_{n,0}$ είναι C^1 αμφιδιαφόριση επί του $I_{n+1,0}$.

Επιπλέον,

$$F'_{n,0}(J(x_0 + an) - l_n) = F'_{n,0}(a_n) = 1 + \frac{c_n}{l_n^2}(a_n - a_n)(b_n - a_n) = 1$$

και όμοια $F'_{n,0}(J(x_0 + an)) = F'_{n,0}(b_n) = 1$.

Τέλος

$$|F'_{n,0}(x) - 1| = \frac{|c_n|}{l_n^2}(x - a_n)(b_n - x) \leq \frac{|c_n|}{l_n^2}(b_n - a_n)^2 = \frac{|c_n|}{l_n^2} \cdot l_n^2 = |c_n|,$$

για κάθε $x \in I_{n,0}$, από όπου προκύπτει αμέσως ο τελευταίος ισχυρισμός. \square

Ξεκινώντας τώρα από τις C^1 αμφιδιαφορίσεις $F_{n,0} : I_{n,0} \rightarrow I_{n+1,0}$, $n \in \mathbb{Z}$, του Λήμματος 3.3.4, θέτουμε όπως προηγουμένως $F_{n,m} = T_m \circ F_{n,0} \circ T_{-m} : I_{n,m} \rightarrow I_{n+1,m}$, για κάθε $m \in \mathbb{Z}$.

Εστω $G : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ η συνάρτηση με

$$G(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in C \\ F'_{n,m}(x), & \text{αν } x \in I_{n,m}, n, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Η G είναι συνεχής και φραγμένη από το Λήμμα 3.3.4.

Εστω $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η απεικόνιση με

$$F(x) = J(a) + \int_0^x G(s)ds.$$

Η F αύξουσα C^1 αμφιδιαφόριση επί του \mathbb{R} , αφού $G > 0$.

Επιπλέον, $F(x) = J(H(x) + a)$ για κάθε $x \in J(\mathbb{R})$. Πράγματι, έστω ότι $x \in J(\mathbb{R})$ και $x \geq 0$. Αν $I_{n,m} \subset [0, x]$, τότε

$$\begin{aligned} \int_{I_{n,m}} G(s)ds &= \int_{I_{n,m}} F'_{n,m}(s)ds = \int_{I_{n,0}} F'_{n,0}(s) \\ &= \int_{a_n}^{b_n} \left[1 + \frac{c_n}{l_n^2}(s - a_n)(b_n - s)\right]ds = l_n + \frac{c_n}{l_n^2} \frac{(b_n - a_n)^3}{6} \\ &= l_n + \left(\frac{l_{n+1}}{l_n} - 1\right)l_n = l_{n+1} = q(x_0 + m + (n + 1)a). \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int_0^x G(s) ds &= \sum_{\{n,m \in \mathbb{Z}: I_{n,m} \subset [0,x]\}} \int_{I_{n,m}} G(s) ds \\ &= \sum_{\{n,m \in \mathbb{Z}: I_{n,m} \subset [0,x]\}} q(x_0 + m + an + a) = \sum_{0 \leq s \leq H(x)} q(s+a), \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} F(x) &= J(a) + \int_0^x G(s) ds = \sum_{0 \leq s \leq a} q(s) + \sum_{0 \leq s \leq H(x)} q(s+a) \\ &= \sum_{0 \leq s \leq a} q(s) + \sum_{a \leq s \leq H(x)+a} q(s) = \sum_{0 \leq s \leq H(x)+a} q(s) = J(H(x) + a). \end{aligned}$$

Ομοια, $F(x) = J(H(x) + a)$ για κάθε $x \in J(\mathbb{R})$ με $x < 0$.

Τέλος, η F είναι επέκταση των $F_{n,m}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, γιατί

$$\begin{aligned} F(a_n) &= J(a) + \int_0^{a_n} G(s) ds = J(a) + \int_0^{b_n} G(s) ds - \int_{I_{n,m}} G(s) ds \\ &= F(b_n) - \int_{I_{n,m}} F'_{n,m}(s) ds = J(H(J(x_0 + an)) + a) - (b_{n+1} - a_{n+1}) \\ &= J(x_0 + an + a) - (b_{n+1} - a_{n+1}) = b_{n+1} - (b_{n+1} - a_{n+1}) = a_{n+1} \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$F(x) = a_{n+1} + \int_{a_n}^x F'_{n,m}(s) ds = F_{n,m}(x)$$

για κάθε $x \in I_{n,m}$.

Συνοψίζοντας, τα προηγούμενα δείχνουν ότι υπάρχει μια C^1 αμφιδιαφόριση $f \in \mathcal{H}_+$ με άρρητο αριθμό στροφής $\rho(f) = e^{2\pi ia}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, που είναι τοπολογικά ημισυζυγής με τη στροφή R_a του κύκλου, αλλά δεν είναι τοπολογικά συζυγής με αυτή και φυσικά με καμία άλλη στροφή και έχει ένα μοναδικό αναλλοίωτο συμπαγές σύνολο $K \neq S^1$, το οποίο είναι ελαχιστικό και τοπολογικά σύνολο Cantor. Συνεπώς, το συμπέρασμα του Θεωρήματος 3.3.2 του A. Denjoy δεν ισχύει πάντα για C^1 αμφιδιαφορίσεις του κύκλου που διατηρούν τον προσανατολισμό και έχουν άρρητο αριθμό στροφής.

Το παράδειγμα που κατασκευάσαμε παραπάνω οφείλεται στον A. Denjoy, που το παρουσίασε το 1932 μαζί με το Θεώρημα 3.3.2. Παρόμοια παραδείγματα είχαν κατασκευαστεί από τον P. Bohl το 1916.

Ασκήσεις

1. Εστω $a \in \mathbb{R}$, $0 < |\lambda| < \frac{1}{2\pi}$ και $F_{\lambda,a} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η απεικόνιση με

$$F_{\lambda,a}(x) = x + a + \lambda \sin 2\pi x.$$

(α) Να αποδειχθεί ότι η $F_{\lambda,a}$ είναι γνήσια αύξουσα αναλυτική αμφιδιαφόριση του \mathbb{R} και $F_{\lambda,a} \in \mathcal{D}$.

(β) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$ υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε

$$F_{\lambda,a}^n(x) = x + na + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \sin 2\pi(g_k(x) + ka)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Να υπολογιστεί ο αριθμός στροφής $\rho(F_{\lambda,a})$.

(δ) Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, να αποδειχθεί ότι η επαγόμενη αναλυτική αμφιδιαφύριση $f_{\lambda,a} \in \mathcal{H}_+$ από την $F_{\lambda,a}$ είναι τοπολογικά συζυγής με την άρρητη στροφή R_a .

2. Να αποδειχθεί ότι το Θεώρημα 3.3.2 του A. Denjoy ισχύει με την ασθενέστερη υπόθεση ότι η $f \in \mathcal{H}_+$ είναι C^1 αμφιδιαφύριση με άρρητο αριθμό στροφής, που ανυψώνεται σε μια C^1 αμφιδιαφύριση $F \in \mathcal{D}$ για την οποία η συνάρτηση $\log F'$ ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz.

3. Εστω $f \in \mathcal{H}_+$ με άρρητο αριθμό στροφής που έχει ένα αναλλοίωτο σύνολο Cantor K . Το $S^1 \setminus K$ είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων μεταξύ τους ανοιχτών τόξων.

(α) Αν I_n , $n \in \mathbb{Z}$, είναι μια οποιαδήποτε αρίθμηση αυτών των τόξων, να αποδειχθεί ότι $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \ell(I_n) = 0$.

(β) Να αποδειχθεί ότι αν $I \subset S^1 \setminus K$ είναι ένα οποιοδήποτε τόξο, τότε για κάθε ανοιχτό σύνολο $V \subset S^1$ με $K \subset V$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $f^n(I) \subset V$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ με $|n| \geq n_0$.

4. Εστω $f \in \mathcal{H}_+$ μια C^1 αμφιδιαφύριση και $F \in \mathcal{D}$ μια οποιαδήποτε ανύψωση της f . Αν $z = e^{2\pi i x}$, θέτουμε $f'(z) = F'(x)$.

(α) Να αποδειχθεί ότι η $f' : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια καλά ορισμένη συνάρτηση. Η f' λέγεται παράγωγος της f .

(β) Αν η f έχει άρρητο αριθμό στροφής και ένα αναλλοίωτο σύνολο Cantor K , να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $z_1, z_2 \in K$ ώστε $f'(z_1) \geq 1$ και $f'(z_2) \leq 1$.

5. Να κατασκευαστεί μια C^1 αμφιδιαφύριση $f \in \mathcal{H}_+$ με άρρητο αριθμό στροφής που έχει ένα αναλλοίωτο σύνολο Cantor K τέτοιο ώστε $f'(z) \neq 1$ για κάθε $z \in K$.

Κεφάλαιο 4

Απαντήσεις επιλεγμένων ασκήσεων

4.1 Ασκήσεις από το κεφάλαιο 1

4.1.1 Ασκήσεις της παραγράφου 1.2.

2. (α) Η f είναι C^∞ και $f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς η f είναι κυρτή. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = \frac{1}{2}$. Συμπεραίνουμε από αυτά ότι η f παίρνει ολικά ελάχιστη τιμή στο $\frac{1}{2}$, την $f(\frac{1}{2}) = -3 + \log 2 > 0$.

(β) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις. Μία στο διάστημα $(0, \frac{1}{2})$, όπου η f είναι φθίνουσα και μία στο $(\frac{1}{2}, +\infty)$, όπου η f είναι αύξουσα. Επειδή $f(\frac{1}{e^4}) = \frac{1}{e^4} > 0$, η μία περιέχεται στο διάστημα $(\frac{1}{e^4}, \frac{1}{2})$. Επίσης, $f(2) = -\log 2 < 0$ και $f(3) = 2 - \log 3 > 0$, οπότε η δεύτερη περιέχεται στο διάστημα $(2, 3)$.

(γ) Έχουμε $g'(x) > 0$, όταν $x > \xi$ και συνεπώς η g είναι αύξουσα στο διάστημα $(\xi, +\infty)$. Αφού $f(x) > 0$ για $x > \xi$, προκύπτει ότι

$$\xi = g(\xi) \leq g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} < x.$$

Δηλαδή, $g([\xi, x]) \subset [\xi, x)$ για κάθε $x > \xi$ και η φθίνουσα ακολουθία $(g^n(x))_{n \geq 0}$ συγκλίνει σε σταθερό σημείο της g στο διάστημα $[\xi, x)$. Επειδή το μοναδικό σταθερό σημείο της g στο διάστημα $[\xi, +\infty)$ είναι το ξ , συμπεραίνουμε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(x) = \xi$ για κάθε $x > \xi$.

4.2 Ασκήσεις από το κεφάλαιο 2

4.2.1 Ασκήσεις της παραγράφου 2.1.

1. Ο πραγματικός αριθμός $\sqrt{5}$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = x$ στο διάστημα $(0, +\infty)$. Η f είναι C^∞ και

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{5}{x^2} \right)$$

για κάθε $x > 0$. Συνεπώς, ο $\sqrt{5}$ είναι και το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f στο $(0, \infty)$, στο οποίο η f παίρνει ελάχιστη τιμή, αφού $f'(x) < 0$ στο $(0, \sqrt{5})$ και $f'(x) > 0$ στο $(\sqrt{5}, +\infty)$. Επίσης, η C^∞ συνάρτηση $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$ έχει

$$g'(x) = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{5}{x^2} \right) < 0$$

για κάθε $x > 0$, δηλαδή η g είναι γνήσια φθίνουσα. Άρα $f(x) - x > g(\sqrt{5}) = 0$ για $0 < x < \sqrt{5}$ και $f(x) - x < g(\sqrt{5}) = 0$ για $x > \sqrt{5}$. Έτσι από τις ιδιότητες μονοτονίας της f έχουμε $f(x) > \sqrt{5} > x$ για $0 < x < \sqrt{5}$ και $\sqrt{5} < f(x) < x$ για $x > \sqrt{5}$. Κατά συνέπεια, για κάθε $x > 0$ η ακολουθία $(f^n(x))_{n \geq 1}$ είναι γνήσια φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το $\sqrt{5}$. Υπάρχει λοιπόν το $\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) \geq \sqrt{5}$ και $f(\xi) = \xi$. Άρα $\xi = \sqrt{5}$.

5. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $\psi : X \rightarrow [0, +\infty)$ με $\psi(x) = d(x, f(x))$. Επειδή ο X υποτίθεται συμπαγής, υπάρχει $\xi \in X$ τέτοιο ώστε $\psi(\xi) \leq \psi(x)$ για κάθε $x \in X$. Αν $\psi(\xi) > 0$, δηλαδή $\xi \neq f(\xi)$, έχουμε

$$\psi(f(\xi)) = d(f(\xi), f^2(\xi)) < d(\xi, f(\xi)) = \psi(\xi)$$

που αντιφάσκει με την επιλογή του ξ . Κατά συνέπεια $\xi = f(\xi)$. Το ξ είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της f γιατί αν υπάρχει και ένα δεύτερο σταθερό σημείο $\xi_1 \neq \xi$, τότε

$$d(\xi_1, \xi) = d(f(\xi_1), f(\xi)) < d(\xi_1, \xi).$$

Απομένει να δείξουμε ότι $W(\xi) = X$. Έστω $x \in X$. Αν $f^n(x) = \xi$ για κάποιο $n \in \mathbb{Z}^+$, προφανώς $x \in W(\xi)$. Έστω λοιπόν ότι $f^n(x) \neq \xi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε η ακολουθία $(d(\xi, f^n(x)))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνήσια φθίνουσα και συνεπώς υπάρχει το

$$s = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(\xi, f^n(x)) = \inf \{d(\xi, f^n(x)) : n \in \mathbb{N}\} \geq 0.$$

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι $s = 0$. Επειδή ο X υποτίθεται συμπαγής, υπάρχει μία υποακολουθία $(f^{n_k}(x))_{k \in \mathbb{N}}$ η οποία συγκλίνει προς κάποιο σημείο $z \in X$. Τότε $s = d(\xi, z)$. Αν $s > 0$, έχουμε $0 < d(\xi, f(z)) < d(\xi, z) = s$ και από τη συνέχεια υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $d(\xi, f^{n_k+1}(x)) < s$, που είναι αντίφαση.

4.2.2 Ασκήσεις της παραγράφου 2.2.

3. Ο \sqrt{a} είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της f . Επίσης,

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{x^2} \right)$$

και ειδικά $f'(\sqrt{a}) = 0$. Άρα ο \sqrt{a} είναι υπερβολικό σταθερό σημείο της f . Όπως στην άσκηση 1 της παραγράφου 2.1 έχουμε $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = \sqrt{a}$ για κάθε $x > 0$. Δηλαδή, το πεδίο έλξης του \sqrt{a} είναι $W(\sqrt{a}) = (0, +\infty)$ και συνεπώς δεν υπάρχουν άλλα περιοδικά σημεία της f .

5. Τα σταθερά σημεία της f_a είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x(x^2 - a - 1) = 0$.

(α) Αν $a \leq -1$, η μοναδική λύση είναι η $\xi = 0$. Αφού $f'_a(0) = -a$, στην περίπτωση που $a = -1$ το 0 δεν είναι υπερβολικό. Αν όμως $a < -1$, τότε το 0 είναι υπερβολικό και μάλιστα

απωθητικό σταθερό σημείο της f . Για κάθε $a \leq -1$, η συνάρτηση $g_a(x) = f_a(x) - x$ είναι γνήσια αύξουσα και συνεπώς $f(x) > x$ για $x > 0$ και $f(x) < x$ για $x < 0$. Από αυτό προκύπτει ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f^n(x)| = +\infty$. Επίσης, η f είναι γνήσια αύξουσα, και συνεπώς αντιστρέψιμη, ενώ $\lim_{n \rightarrow -\infty} f^n(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Αν $-1 < a \leq 1$, η f_a έχει τα τρία σταθερά σημεία

$$\xi_- = -\sqrt{a+1}, \quad \xi_0 = 0, \quad \xi_+ = \sqrt{a+1}$$

στα οποία έχουμε

$$f'_a(\xi_-) = f'_a(\xi_+) = 2a + 3 > 1.$$

Άρα τα ξ_-, ξ_+ είναι υπερβολικά-απωθητικά. Στο $\xi_0 = 0$ έχουμε $|f'_a(0)| = |a|$. Συνεπώς για $|a| < 1$ το 0 είναι υπερβολικό-ελκυστικό, ενώ για $a = 1$ δεν είναι υπερβολικό.

Για $|x| > \xi_+$ έχουμε $f'_a(x) \geq 2a + 3 > 1$ και άρα $f(x) - \xi_+ > x - \xi_+$ για $x > \xi_+$, ενώ $\xi_- - f(x) > \xi_- - x$ για $x < \xi_-$. Από αυτό προκύπτει ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_a^n(x)| = +\infty$ για $|x| > \xi_+$.

Επειδή το ξ_+ είναι υπερβολικό-απωθητικό, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|f_a(x) - \xi_+| > |x - \xi_+|$ όταν $\xi_+ - \delta < x < \xi_+$. Το σύνολο $A = \{x \in (0, \xi_+) : f_a(x) < x\}$ είναι λοιπόν μη-κενό και ανοιχτό, λόγω της συνέχειας της f . Επιπλέον, αν $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία σημείων του A και $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$, όπου $x \in (0, \xi_+)$, τότε $f_a(x) \leq x$. Επειδή η f_a δεν έχει σταθερά σημεία στο διάστημα $(0, \xi_+)$, συμπεραίνουμε ότι $f_a(x) < x$, δηλαδή $x \in A$. Αυτό δείχνει ότι το A είναι κλειστό στο $(0, \xi_+)$. Επειδή το διάστημα $(0, \xi_+)$ είναι συνεκτικό, αναγκαστικά $A = (0, \xi_+)$, δηλαδή $f_a(x) < x$ για κάθε $0 < x < \xi_+$. Από αυτό προκύπτει ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_a^n(x) = 0$ για $0 < x < \xi_+$ και όμοια $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_a^n(x) = 0$ για $\xi_- < x < 0$. Αυτό σημαίνει ότι το πεδίο έλξης του σταθερού σημείου $\xi_0 = 0$ είναι $W(0) = (\xi_-, \xi_+)$.

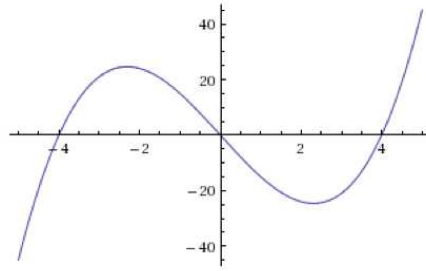
4.2.3 Ασκήσεις της παραγράφου 2.3.

4. Θέτουμε $C_n = \bigcap_{k=0}^n f^{-k}([0, 1])$, $n \geq 0$. Το C_1 αποτελείται από τα διαστήματα $I_0 = [0, \frac{1}{3}]$

και $I_1 = [\frac{2}{3}, 1]$. Η f είναι γνήσια αύξουσα «γραμμική» στο I_0 και γνήσια φθίνουσα «γραμμική» με κλίση ± 3 . Η απόδειξη της Πρότασης 2.3.3 μπορεί να επαναληφθεί για να δείξουμε ότι το C_n αποτελείται από 2^n ξένα μεταξύ τους κλειστά διαστήματα ίσου μήκους $1/3^n$ καθένα από τα οποία απεικονίζεται από την f^n επί του $[0, 1]$ μονότονα «γραμμικά» με κλίση $\pm 3^n$. Όπως στην Πρόταση 2.3.5, το C είναι το συνηθισμένο σύνολο Cantor.

5. Κάθε σύνολο $A_n = \bigcap_{k=0}^n f_\lambda^{-k}([0, 1])$ αποτελείται από 2^n ξένα μεταξύ τους κλειστά υποδια-

στήματα του $[0, 1]$, καθένα από τα οποία έχει μήκος το πολύ $1/M^n$, όπου $|f'_\lambda(x)| \geq M > 1$ για κάθε $x \in A_1$. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $1/M^n < \epsilon$. Το $x \in A$ περιέχεται σε ένα ακριβώς από τα διαστήματα που συναποτελούν το A_1 , ας πούμε το διάστημα $[a, b]$. Προφανώς $\max\{x - a, b - x\} < \epsilon$ και $x \neq a$ ή $x \neq b$. Επίσης, $f_\lambda^k(a) = 0$ για κάθε $k \geq n + 1$ και $f_\lambda^n([a, b]) = [0, 1]$ μονότονα. Αν $f_\lambda^n(x) \in [0, \frac{1}{2})$, αρκεί να πάρουμε $y = b$, ενώ αν $f_\lambda^n(x) \in (\frac{1}{2}, 1]$, αρκεί να πάρουμε $y = a$.



Σχήμα 4.1: Το γράφημα της $f_{16}(x) = x^3 - 16x$.

6. Η f_a έχει τρία σταθερά σημεία, τα

$$\xi_- = -\sqrt{a+1} < 0 < \sqrt{a+1} = \xi_+,$$

που είναι υπερβολικά και απωθητικά. Για $|x| > \xi_+$ έχουμε $f'_a(x) < 2a + 3 > 9$, αφού $a > 4$. Από το θεώρημα της μέσης τιμής έχουμε ότι

$$f_a(x) - \xi_+ > 9(x - \xi_+) > x - \xi_+$$

και συνεπώς $f_a(x) > x$ για κάθε $x > \xi_+$. Όμοια, $f_a(x) < x$ για κάθε $x < \xi_-$. Από αυτό προκύπτει ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_a^n(x)| = +\infty$, όταν $|x| > \xi_+$ και άρα

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}([\xi_-, \xi_+]).$$

Η f_a παίρνει τοπικά μέγιστη τιμή στο σημείο $-\sqrt{\frac{a}{3}}$ και τοπικά ελάχιστη τιμή στο $\sqrt{\frac{a}{3}}$. Επιπλέον,

$$f_a(-\sqrt{\frac{a}{3}}) = \frac{2a}{3} \sqrt{\frac{a}{3}} > \sqrt{a+1} = \xi_+$$

και $f_a(\sqrt{\frac{a}{3}}) = -f_a(-\sqrt{\frac{a}{3}}) < \xi_-$, αφού υποθέτουμε ότι $a > 4$.

Θέτουμε

$$A_n = \bigcap_{k=0}^n f^{-k}([\xi_-, \xi_+]).$$

Το $A_1 = [\xi_-, \xi_+] \cap f^{-1}([\xi_-, \xi_+])$ αποτελείται από τρία ξένα μεταξύ τους κλειστά διαστήματα I_{-1}, I_0, I_1 . Το I_{-1} έχει αριστερό άκρο το ξ_- , η $f_a|_{I_{-1}}$ είναι γνήσια αύξουσα και $f_a(I_{-1}) = [0, \xi_+]$. Το I_1 έχει δεξιό άκρο το ξ_+ , η $f_a|_{I_1}$ είναι γνήσια αύξουσα και $f_a(I_1) = [\xi_-, 0]$. Το I_0 έχει κέντρο το 0, η $f_a|_{I_0}$ είναι γνήσια φθίνουσα και $f_a(I_0) = [\xi_-, \xi_+]$. Ειδικά, τα άκρα των I_{-1}, I_0, I_1 είναι τελικά σταθερά σημεία.

Παρατηρούμε ότι $f'_a(x) = 3x^2 - a > 1$ τότε και μόνο τότε όταν $|x| > \sqrt{\frac{a+1}{3}}$. Η $f'_a|_{I_{-1}}$ είναι φθίνουσα και

$$f_a(-\sqrt{\frac{a+1}{3}}) = \frac{2a-1}{3} \sqrt{\frac{a+1}{3}} > \sqrt{a+1} = \xi_+,$$

αφού $a > 4$. Συνεπώς, $f'_a(x) > 1$ για κάθε $x \in I_{-1}$ και λόγω της συμμετρίας $f_a(x) = -f_a(-x)$, $x \in \mathbb{R}$, έχουμε και $f'_a(x) > 1$ για κάθε $x \in I_1$. Από την άλλη μεριά, $f'_a(x) = 3x^2 - a < -1$ τότε και μόνο τότε όταν $|x| > \sqrt{\frac{a-1}{3}}$ και

$$f_a\left(-\sqrt{\frac{a-1}{3}}\right) = \frac{2a+1}{3} \sqrt{\frac{a-1}{3}} > \sqrt{a+1} = \xi_+,$$

αφού $a > 4$. Συνεπώς, $f'_a(x) < -1$ για κάθε $x \in I_0$. Συμπερασματικά, $|f'_a(x)| > 1$ για κάθε $x \in A_1$. Επειδή το A_1 είναι συμπαγές και η f'_a συνεχής, υπάρχει $M > 1$ ώστε $|f'_a(x)| \geq M > 1$ για κάθε $x \in A_1$.

Αν τώρα $x < y$ και $[x, y] \in A_n$, από το θεώρημα της μέσης τιμής και τον κανόνα της αλυσίδας

$$2\sqrt{a+1} = \xi_+ - \xi_- \geq |f_a^n(x) - f_a^n(y)| \geq M^n|x - y|,$$

αφού $f_a^n(x), f_a^n(y) \in [\xi_-, \xi_+]$. Αν λοιπόν το A περιέχει κάποιο διάστημα, αυτό πρέπει να έχει μήκος το πολύ $\frac{2\sqrt{a+1}}{M^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αντίφαση. Αυτό δείχνει ότι το A είναι ολικά-μη-συνεχτικό. Επίσης είναι τέλει σύνολο, γιατί για κάθε $x \in A$ και $\epsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{2\sqrt{a+1}}{M^n} < \epsilon$ και το x περιέχεται ακριβώς σε ένα από τα 3^n ζένα μεταξύ τους κλειστά

διαστήματα που συναποτελούν το A_n και έχουν μήκος το πολύ $\frac{2\sqrt{a+1}}{M^n} < \epsilon$, όπως δείξαμε προηγουμένως. Τα άκρα του διαστήματος αυτού ανήκουν στο A , είναι τελικά σταθερά σημεία της f_a και απέχουν απόσταση $< \epsilon$ μεταξύ τους και από το x . Επειδή το x είναι διαφορετικό από τουλάχιστον ένα από τα δύο, αυτό δείχνει ότι το x είναι σημείο συσσώρευσης του A και το A είναι τέλει σύνολο. Αφού το A είναι συμπαγές, ολικά-μη-συνεχτικό και τέλει, τοπολογικά είναι ένα σύνολο Cantor.

4.2.4 Ασκήσεις της παραγράφου 2.4.

1. (α) Προφανώς $\sigma(X) \subset X$. Αντίστροφα, Αν $s = (s_n)_{n \geq 0} \in X$ και $s_0 = 0$, τότε $10s_1s_2\dots \in X$ και $\sigma(10s_1s_2\dots) = s$. Αν $s_0 = 1$, τότε $\sigma(01s_1s_2\dots) = s$ και $01s_1s_2\dots \in X$.

(β) Έστω $s = (s_n)_{n \geq 0} \in X$. Τα βασικά ανοιχτά σύνολα της τοπολογίας του X που περιέχουν το σημείο s είναι τα σύνολα της μορφής

$$U = X \cap \left(\{s_0\} \times \dots \times \{s_N\} \times \prod_{n=N+1}^{\infty} \{0, 1\} \right).$$

Αν $s_0 = s_N = 0$, τότε $s_{N+1} = 1$ και η ακολουθία $s_0s_1\dots s_Ns_{N+1}s_0s_1\dots s_Ns_{N+1}\dots \in X$ είναι περιοδικό σημείο στο U . Αν πάλι $s_0 = 1$, το ίδιο συμβαίνει και για την ακολουθία $s_0\dots s_Ns_0\dots s_N\dots \in X$.

(γ) Ονομάζουμε μία λέξη $s_0\dots s_N$ μήκους $N+1$ αποδεκτή αν $s_{n+1} = 1$ όταν $s_n = 0$ για $0 \leq n < N$. Το σύνολο των αποδεκτών λέξεων μήκους $N+1$ είναι πεπερασμένο και συνεπώς το σύνολο όλων των αποδεκτών λέξεων οποιουδήποτε (πεπερασμένου) μήκους είναι αριθμήσιμο. Έστω $s^{(0)}, s^{(1)}, \dots$ μία αρίθμηση τους. Τότε η ακολουθία

$$s^{(0)}, 1, s^{(1)}, 1, \dots, 1, s^{(n)}, 1, \dots$$

ανήκει στο X και έχει παντού πυκνή τροχιά στο X , γιατί κάθε αποδεκτή λέξη εμφανίζεται σε αυτή.

3. (α) Κάνουμε επαγωγή στο μήκος της λέξης. Για $m = 1$ το συμπέρασμα είναι τετριμένο εξ ορισμού. Συμβολίζουμε με N_{ij}^m το πλήθος των αποδεκτών λέξεων $i...j$ (δηλαδή που αρχίζουν με το i και τελειώνουν με το j) μήκους $m + 1$. Αν $k \in \{0, 1\}$, κάθε αποδεκτή λέξη $i...k$ μήκους $m + 1$ δίνει μία αποδεκτή λέξη $i...kj$ μήκους $m + 2$ τότε και μόνο τότε όταν $a_{kj} = 1$. Άρα το πλήθος των αποδεκτών λέξεων $i...j$ μήκους $m + 2$ είναι

$$N_{ij}^{m+1} = \sum_{k=0}^1 N_{ik}^m a_{kj}.$$

Αν όμως το N_{ik}^m είναι το (i, k) στοιχείο του A^m , σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση, αυτό σημαίνει ότι το N_{ij}^{m+1} είναι το (i, j) στοιχείο του A^{m+1} .

(β)-(γ) Τα βασικά ανοιχτά σύνολα της τοπολογίας του X είναι της μορφής

$$U = X \cap \left(\{s_0\} \times \cdots \times \{s_N\} \times \prod_{n=N+1}^{\infty} \{0, 1\} \right),$$

όπου $s_0 s_1 \dots s_N$ είναι μία αποδεκτή λέξη.

Αν ο A είναι ανάγωγος, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε το (s_N, s_0) στοιχείο του πίνακα A^m να είναι θετικός αριθμός. Από το (α), υπάρχει μία αποδεκτή λέξη $t_0 t_1 \dots t_m$ μήκους $m + 1$ με $t_0 = s_N$ και $t_m = s_0$. Η ακολουθία τώρα

$$s_0 s_1 \dots s_N t_1 \dots t_{m-1} s_0 s_1 \dots s_N t_1 \dots t_{m-1} \dots$$

είναι περιοδικό σημείο της $\sigma|_X$ και περιέχεται στο U .

Έστω $t = (t_n)_{n \geq 0} \in X$ οποιοδήποτε. Αν ο A είναι απεριοδικός, υπάρχει κάποιο $m \in \mathbb{N}$ ώστε όλα τα στοιχεία του πίνακα A^m είναι θετικοί αριθμοί. Από το (α), υπάρχει μία αποδεκτή λέξη $s_N \dots t_0$ μήκους $m + 1$. Συνεπώς η ακολουθία

$$y = (s_0 \dots s_N \dots t_0 t_1 \dots t_n \dots)$$

ανήκει στο X και προφανώς $\sigma^{N+m}(y) = t$. Αυτό δείχνει ότι $\sigma^{N+m}(U) = X$.

4.2.5 Ασκήσεις της παραγράφου 2.5.

2. Από τις απαιτήσεις μας για την h πρέπει $\alpha \neq 0$ και $h \circ q_d = f_\lambda \circ h$, οπότε

$$\alpha x^2 + \alpha d + \beta = -\lambda \alpha^2 x^2 + (\lambda \alpha - 2\lambda \alpha \beta)x + \lambda \beta - \lambda \beta^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς πρέπει να λύσουμε το σύστημα εξισώσεων (με αγνώστους τους α , β και λ)

$$\alpha = -\lambda \alpha^2, \quad \lambda \alpha - 2\lambda \alpha \beta = 0, \quad \alpha d + \beta = \lambda \beta - \lambda \beta^2$$

υπό τις επιπλέον συνθήκες $\lambda > 1$, $\alpha \neq 0$ και $d < \frac{1}{4}$. Αφού $\alpha \neq 0$, η πρώτη εξίσωση γίνεται $\lambda \alpha = -1$, οπότε αντικαθιστώντας στη δεύτερη $\beta = \frac{1}{2}$. Η τρίτη λοιπόν γίνεται $\alpha d + \frac{1}{2} = \frac{\lambda}{4}$ και αντικαθιστώντας από την πρώτη

$$-\frac{d}{\lambda} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4} = 0.$$

Συνεπώς, $\lambda = 1 + \sqrt{1 - 4d} > 1$ και $\alpha = -\frac{1}{1 + \sqrt{1 - 4d}} \neq 0$.

3. Θα δείξουμε πρώτα με επαγωγή ότι $T^n\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right) = [0, 1]$ μονότονα «γραμμικά» (με κλίση $\pm 2^n$) για κάθε $0 \leq k < 2^n$ και $n \in \mathbb{N}$. Για $n = 1$ αυτό είναι ο ορισμός της απεικόνισης «τέντα» T . Έστω ότι ο ισχυρισμός μας έχει αποδειχθεί για το n . Για κάθε ακέραιο $0 \leq k < 2^{n+1}$ έχουμε $\left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right] \subset [0, \frac{1}{2}]$ ή $\left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right] \subset [\frac{1}{2}, 1]$. Στη πρώτη περίπτωση έχουμε $0 \leq k < 2^n$ και $T\left(\left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right]\right) = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$, οπότε

$$T^{n+1}\left(\left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right]\right) = T^n\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right) = [0, 1]$$

μονότονα «γραμμικά». Στη δεύτερη περίπτωση ανάλογα έχουμε $2^{n+1} - k \leq 2^n$ και $T\left(\left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right]\right) = \left[\frac{2^{n+1} - k - 1}{2^n}, \frac{2^{n+1} - k}{2^n}\right]$, οπότε

$$T^{n+1}\left(\left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right]\right) = T^n\left(\left[\frac{2^{n+1} - k - 1}{2^n}, \frac{2^{n+1} - k}{2^n}\right]\right) = [0, 1]$$

μονότονα «γραμμικά».

Από την Πρόταση 2.1.1 προκύπτει ότι για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και ακέραιο $0 \leq k < 2^N$ υπάρχει $x \in \left[\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}\right]$ ώστε $T^N(x) = x$, το οποίο μάλιστα είναι μοναδικό γιατί η T^N στο διάστημα $\left[\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}\right]$ είναι «γραμμική» μονότονη. Συνεπώς, το σύνολο $\{x \in [0, 1] : T^N(x) = x\}$ αποτελείται από 2^N σημεία και το σύνολο των περιοδικών σημείων

$$\{x \in [0, 1] : T^N(x) = x, \quad N \in \mathbb{N}\}$$

της T είναι αριθμήσιμο και επιπλέον πυκνό στο $[0, 1]$, αφού το σύνολο των δυαδικών ρητών αριθμών $D = \left\{\frac{k}{2^n} : k = 0, 1, \dots, 2^n - 1, n \in \mathbb{N}\right\}$ είναι πυκνό στο $[0, 1]$.

4.2.6 Ασκήσεις της παραγράφου 2.6.

1. Όπως δείξαμε στην άσκηση 3 της παραγράφου 2.5, το σύνολο των περιοδικών σημείων της απεικόνισης «τέντα» T είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $[0, 1]$. Επίσης, επειδή το σύνολο των δυαδικών ρητών αριθμών $D = \left\{\frac{k}{2^n} : k = 0, 1, \dots, 2^n - 1, n \in \mathbb{N}\right\}$ είναι πυκνό στο $[0, 1]$, για κάθε ανοιχτό υποσύνολο του $[0, 1]$ υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και ακέραιος $0 \leq k < 2^n$ ώστε $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \subset U$. Συνεπώς,

$$T^n(U) \supset T^n\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right) = [0, 1].$$

Από αυτό προκύπτει ότι η T είναι τοπολογικά μεταβατική, όπως επίσης ότι παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες (χωρίς χρήση του Θεωρήματος 2.6.8), γιατί για κάθε $x \in [0, 1]$ και $\epsilon > 0$ υπάρχουν κάποιος $n \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ και ακέραιος

$0 \leq k < 2^n$ ώστε $x \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right]$. Άρα $\max\{|x - \frac{k}{2^n}|, |x - \frac{k+1}{2^n}|\} < \epsilon$ και αφού $T^n\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right) = [0, 1]$ μονότονα «γραμμικά» (με κλίση $\pm 2^n$), έχουμε

$$|T^n(x) - T^n\left(\frac{k}{2^n}\right)| \geq \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad |T^n(x) - T^n\left(\frac{k+1}{2^n}\right)| \geq \frac{1}{2}.$$

3. Όπως δείξαμε στην άσκηση 1 της παραγράφου 2.4, το σύνολο των περιδικών σημείων της $\sigma|_X$ είναι πυκνό υποσύνολο του X και το X περιέχει ένα σημείο του οποίου η τροχιά είναι πυκνή στο X . Το X είναι συμπαγές, ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς μετρικού χώρου (Σ_2, d) και ειδικά είναι πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Επίσης, το X δεν έχει μεμονωμένα σημεία, δηλαδή είναι τέλει υποσύνολο του Σ_2 . Πράγματι, για κάθε $s = (s_n)_{n \geq 0} \in X$ και $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2^N} < \epsilon$. Αν τώρα $t = (t_n)_{n \geq 0}$, όπου $t_n = s_n$ για $0 \leq n \leq N$ και $t_n = 1$ για $n > N$, τότε $t \in X$ και

$$d(s, t) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} < \epsilon.$$

Αν $s_n \neq 1$ για κάποιο $n > N$, έχουμε $s \neq t$. Αν $s_n = 1$ για κάθε $n > N$, επιλέγουμε $t_{N+1} = 1, t_{N+2} = 0$ και $t_n = 1$ για $n > N+2$, οπότε πάλι $s \neq t$ και ισχύουν τα ίδια. Από την Πρόταση 2.6.4 και το Θεώρημα 2.6.8, η $\sigma|_X$ είναι τοπολογικά μεταβατική και παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.

6. Όπως δείξαμε στην άσκηση 3 της παραγράφου 2.4, το σύνολο των περιδικών σημείων της $\sigma|_X$ είναι πυκνό υποσύνολο του X . Επίσης, για κάθε μη-κενό ανοιχτό υποσύνολο U του X υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\sigma^n(U) = X$. Από αυτό προκύπτει ότι η $\sigma|_X$ είναι τοπολογικά μεταβατική. Επειδή το X δεν είναι πεπερασμένο σύνολο, από το Θεώρημα 2.6.8 έχουμε ότι η $\sigma|_X$ είναι χαοτική.

4.2.7 Ασκήσεις της παραγράφου 2.7.

2. Αρκεί να δείξουμε ότι η f έχει περιδικό σημείο περιόδου 3. Θεωρούμε τα διαστήματα

$$I_1 = [f^{n-2}(x), f^{n-1}(x)], I_2 = [f^{n-3}(x), f^{n-2}(x)], \dots, I_{n-1} = [x, f(x)].$$

Από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής έχουμε

$$f(I_{n-1}) \supset I_{n-2}, \dots, f(I_2) \supset I_1$$

και $f(I_1) \supset I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{n-1}$. Αφού λοιπόν $f(I_1) \supset I_1, f(I_1) \supset I_2$ και $f(I_2) \supset I_1$, προκύπτει ότι $f^3(I_1) \supset I_1$ και από την Πρόταση 2.1.1 υπάρχει $y \in I_1$ ώστε $f^3(y) = y$. Επειδή ο 3 είναι πρώτος αριθμός, είναι η περίοδος του y .

3. Έχουμε $176 = 2^4 \cdot 11$ και $96 = 2^5 \cdot 3$. Συνεπώς $176 \triangleright 96$ στη διάταξη του Sarkovskii και από το ομόνυμο θεώρημα προκύπτει αμέσως το συμπέρασμα.

4.3 Ασκήσεις από το κεφάλαιο 3

4.3.1 Ασκήσεις της παραγράφου 3.1.

2. Αν ο f είναι ελαχιστικός και το $A \subset X$ είναι μη-κενό, κλειστό και f -αναλλοίωτο, δηλαδή $f(A) = A$, τότε υπάρχει ένα σημείο $x \in A$, οπότε $X = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\} \subset A$. Αντίστροφα, για κάθε $x \in A$ το σύνολο $\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι μη-κενό, κλειστό και f -αναλλοίωτο, αφού η f είναι ομοιομορφισμός. Συνεπώς, $X = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$.

3. Επειδή η f είναι συστολή, υπάρχει $0 < \lambda < 1$ ώστε $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) \leq \lambda \delta(X)$ για κάθε $x, y \in X$, όπου $\delta(X) = \sup\{d(x, y) : x, y \in X\} < +\infty$, αφού ο X υποτίθεται συμπαγής. Επαγωγικά, $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \lambda^n \delta(X)$ για κάθε $x, y \in X$ και $n \in \mathbb{N}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.6, η f έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο $x_0 \in X$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = x_0$ για κάθε $x \in X$, όπως δείχνει η απόδειξη. Έστω $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ μία οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση. Επειδή ο X υποτίθεται συμπαγής, η ϕ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Αν λοιπόν $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|\phi(x) - \phi(y)| < \epsilon$, όταν $d(x, y) < \delta$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda^n \delta(X) < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Προκύπτει τώρα ότι $d(f^n(x), x_0) < \delta$ και συνεπώς $|\phi(f^n(x)) - \phi(x_0)| < \epsilon$ για κάθε $x \in X$ και $n \geq n_0$. Αυτό δείχνει ότι $\phi(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi \circ f^n$ ομοιόμορφα. Άρα

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ f^k = \phi(x_0)$$

ομοιόμορφα στον X .

4. Επειδή η f υποτίθεται τοπολογικά μεταβατική και ο X συμπαγής, άρα πλήρης και διαχωρίσιμος, όπως δείχνει το πρώτο μέρος της απόδειξης της Πρότασης 2,6,4, υπάρχει κάποιο σημείο $x_0 \in X$ του οποίου η τροχιά $\{f^n(x_0) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του X . Από την υπόθεσή μας η

$$\tilde{\phi} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ f^k : X \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι συνεχής συνάρτηση για κάθε συνεχή συνάρτηση $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$. Επιπλέον,

$$\tilde{\phi} \circ f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ f^{k+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left[\phi \circ f^n - \phi + \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ f^k \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ f^k = \tilde{\phi}.$$

Επαγωγικά, $\tilde{\phi} \circ f^n = \tilde{\phi}$ και ειδικά $\tilde{\phi}(f^n(x_0)) = \tilde{\phi}(x_0)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$. Από τη συνέχεια της $\tilde{\phi}$ και αφού το $\{f^n(x_0) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του X προκύπτει ότι $\tilde{\phi}(x) = \tilde{\phi}(x_0)$ για κάθε $x \in X$. Αυτό δείχνει ότι η f είναι μονοσήμαντα εργοδική.

7. Η f έχει ακριβώς δύο σταθερά σημεία, τα 0 και 1, και $f(x) > x$ για κάθε $0 < x < 1$. Από αυτό προκύπτει ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 1$ μονότονα για κάθε $0 < x < 1$. Αν λοιπόν $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση, τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(f^n(x)) = \phi(1)$ για κάθε $0 < x \leq 1$. Υπάρχει όμως τουλάχιστον μία τέτοια συνεχής συνάρτηση ϕ για την οποία $\phi(0) \neq \phi(1)$ (π.χ. $\phi(x) = x$) και τότε η ακολουθία συνεχών συναρτήσεων

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ f^k, \quad n \in \mathbb{N},$$

δεν συγλίνει ομοιόμορφα σε σταθερά (συγλίνει κατά σημείο σε μη-συνεχή και μη-σταθερά). Από αυτό συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι μονοσήμαντα εργοδική.

4.3.2 Ασκήσεις της παραγράφου 3.2.

4. Επειδή το 0 είναι σταθερό σημείο του F , έχουμε $F^n(0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Συνεπώς, $\rho(F) = 0$.

6. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε $h \circ R_{na} = h \circ (R_a)^n = (R_a)^n \circ h = R_{na} \circ h$. Αυτό σημαίνει ότι

$$e^{2\pi i H(x+na)} = h(R_{na}(e^{2\pi i x})) = R_{na}(h(e^{2\pi i x})) = e^{2\pi i(H(x)+na)}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{Z}$. Ειδικά, για $x = 0$ έχουμε

$$h(e^{2\pi i na}) = e^{2\pi i H(na)} = e^{2\pi i H(0)} \cdot e^{2\pi i na}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Επειδή $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, το σύνολο $\{e^{2\pi i na} : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό στον S^1 . Από τη συνέχεια συνεπώς της h προκύπτει ότι $h(z) = e^{2\pi i H(0)} \cdot z$ για κάθε $z \in S^1$, δηλαδή η h είναι στροφή κατά γωνία $2\pi H(0)$.

7. Έχουμε $h \circ f = R_a \circ h$ και $g \circ f = R_a \circ g$, οπότε $h \circ g^{-1} \circ R_a \circ g = R_a \circ h$, δηλαδή $h \circ g^{-1} \circ R_a = R_a \circ h \circ g^{-1}$. Το συμπέρασμα προκύπτει τώρα εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης 6.

9. (α) Η ϕ είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο 1, οπότε $\phi(x) = \phi(x - [x])$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από την άλλη μεριά, αν $x, y \in \mathbb{R}$, με $y \leq x < y + 1$, τότε

$$\phi(y) - \phi(x) = F(y) - F(x) + x - y \leq x - y < 1.$$

Από αυτά προκύπτει ότι $|\phi(x) - \phi(y)| < 1$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(β) Προχωρούμε επαγωγικά. Για $n = 1$, το συμπέρασμα είναι τετριμμένο. Έστω ότι $|F^n(0) - nF(0)| \leq n - 1$. Από το (α), $|F(x) - x - F(0)| < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ειδικά, για $x = F^n(0)$ έχουμε $|F^{n+1}(0) - F^n(0) - F(0)| < 1$, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη

$$|F^{n+1}(0) - (n+1)F(0)| \leq |F^{n+1}(0) - F^n(0) - F(0)| + |F^n(0) - nF(0)| < 1 + n - 1 = n.$$

10. Εφαρμόζοντας το (β) της προηγούμενης άσκησης 9 για τις $G \circ F$, G και F παίρνουμε

$$|(G \circ F)^n(0) - nG(F(0)) - G^n(0) + nG(0) - F^n(0) + nF(0)| \leq 3n - 3$$

και συνεπώς

$$|(G \circ F)^n(0) - G^n(0) - F^n(0)| \leq 3n - 3 + n|G(F(0)) - G(0) - F(0)| \leq 3n - 3 + n = 4n - 3.$$

4.3.3 Ασκήσεις της παραγράφου 3.3.

1. (α) Η $F_{\lambda,a}$ είναι αναλυτική, γιατί η συνάρτηση ημίτονο είναι αναλυτική. Επίσης

$$F'_{\lambda,a}(x) = 1 + 2\pi\lambda \cos 2\pi x > 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η $F_{\lambda,a}$ είναι γνήσια αύξουσα. Τέλος, είναι προφανές ότι η $F_{\lambda,a}$ είναι επί του \mathbb{R} .

(β) Για $n = 1$ έχουμε $g_0(x) = x$. Επαγωγικά, έστω ότι έχουν κατασκευαστεί οι συνεχείς συναρτήσεις g_0, \dots, g_{n-1} ώστε

$$F_{\lambda,a}^n(x) = x + na + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \sin 2\pi(g_k(x) + ka)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε

$$F_{\lambda,a}^{n+1}(x) = x + (n+1)a + \lambda \left[\sum_{k=0}^{n-1} \sin 2\pi(g_k(x) + ka) + \sin 2\pi \left(x + na + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \sin 2\pi(g_k(x) + ka) \right) \right]$$

και συνεπώς αρκεί να επιλέξουμε

$$g_n(x) = x + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \sin 2\pi(g_k(x) + ka).$$

(γ) Έχουμε

$$\frac{F_{\lambda,a}^n(0)}{n} = a + \lambda \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin 2\pi(g_k(0) + ka)$$

και

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin 2\pi(g_k(0) + ka) = 0$$

από το Πρόγραμμα 3.1.7. Από αυτό προκύπτει ότι $\rho(F_{\lambda,a}) = a$.

(δ) Αφού $\rho(f_{\lambda,a}) = e^{2\pi ia}$, από το (γ) και η $f_{\lambda,a}$ είναι αναλυτική, αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, εφαρμόζεται το Θεώρημα 3.3.2 του A. Denjoy.

3. (α) Επειδή τα διαστήματα I_n , $n \in \mathbb{Z}$, είναι ξένα μεταξύ τους, έχουμε

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ell(I_n) = \ell \left(\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} I_n \right) = \ell(S^1 \setminus K) \leq \ell(S^1) = 2\pi.$$

Από τη σύγκλιση των σειρών έχουμε αμέσως ότι $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \ell(I_n) = 0$.

(β) Συμβολίζουμε με d την συνάρτηση απόστασης στον S^1 , για την οποία $d(z_1, z_2)$ είναι το μήκος του μικρού κυκλικού τόξου με άκρα τα σημεία $z_1, z_2 \in S^1$. Επειδή τα διαστήματα $f^n(I)$, $n \in \mathbb{Z}$, είναι ξένα μεταξύ τους, από το (α) έχουμε $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \ell(f^n(I)) = 0$. Επειδή το V είναι ανοιχτή περιοχή του συμπαγούς συνόλου K , υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $d(z, K) < \delta$ τότε $z \in V$. Επιλέγουμε ένα οποιοδήποτε σημείο $z_0 \in I$. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.11, αφού $L^+(z_0) = L^-(z_0) = K$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(f^{n_0}(z_0), K) < \frac{\delta}{2}$ και $d(f^n(z), f^{n_0}(z_0)) \leq \ell(f^n(I)) < \frac{\delta}{2}$ για κάθε $z \in I$ και $|n| \geq n_0$. Από την τριγωνική ανισότητα προκύπτει ότι $d(f^n(z), K) < \delta$ και συνεπώς $f^n(z) \in V$ για κάθε $z \in I$ και $|n| \geq n_0$.

Βιβλιογραφία

- [1] R.L. Devaney, An introduction to chaotic dynamical systems, Addison-Wesley, 1989.
- [2] M. Einsiedler and K. Schmidt, Dynamische Systeme: Ergodentheorie und topologische Dynamik, Birkhäuser, 2014.
- [3] B. Hasselblatt and A. Katok, A first course in dynamics, Cambridge University Press, 2003.
- [4] R.A. Holmgren, A first course in discrete dynamical systems, Springer, 1996.
- [5] M. Vellenkoop and R. Berglund, On Intervals, Transitivity=Chaos, *Amer. Math. Monthly* 101:4 (1994), 353-355.