

## Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 1

1. Στο  $\mathbb{R}$  θεωρούμε την διαφορίσιμη δομή  $\mathcal{B}$  που ορίζεται από τον άτλαντα  $\{(\mathbb{R}, \psi)\}$ , όπου  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι η συνάρτηση με τύπο  $\psi(t) = t^3$ . Εστω  $\mathcal{A}$  η συνηθισμένη διαφορίσιμη δομή του  $\mathbb{R}$ .

(α) Δείξτε ότι  $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ .

(β) Δείξτε ότι η  $id : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  δεν είναι αμφιδιαφόριση.

(γ) Είναι οι λείες πολλαπλότητες  $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ ,  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  αμφιδιαφορίσιμες;

2. Εστω  $U_i^+ = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_i > 0\}$  και  $U_i^- = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_i < 0\}$ , ενώ  $h_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n$  είναι η απεικόνιση με τύπο

$$h_i^\pm(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}), \quad 1 \leq i \leq n+1.$$

(α) Δείξτε ότι ο  $\mathcal{B} = \{(U_i^\pm, h_i^\pm) : 1 \leq i \leq n+1\}$  είναι  $C^\infty$  άτλας στην  $S^n$ .

(β) Δείξτε ότι ο  $\mathcal{B}$  ορίζει την ίδια διαφορίσιμη δομή με τον  $C^\infty$  άτλαντα  $\mathcal{A} = \{(S^n \setminus \{e_{n+1}\}, \pi_+), (S^n \setminus \{-e_{n+1}\}, \pi_-)\}$ , όπου  $\pi_\pm : S^n \setminus \{\pm e_{n+1}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  είναι η στερεογραφική προβολή.

3. Εστω  $\{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)\}$  ο κανονικός άτλας του μιγαδικού προβολικού χώρου  $\mathbb{C}P^1$ . Παρατηρήστε ότι  $\mathbb{C}P^1 \setminus U_1 = \{[0, 1]\}$  και  $\mathbb{C}P^1 \setminus U_2 = \{[1, 0]\}$ . Δείξτε ότι η απεικόνιση  $g : \mathbb{C}P^1 \rightarrow S^2$  με τύπο

$$g[z_1, z_2] = \begin{cases} (\pi_+^{-1} \circ \phi_1)[z_1, z_2], & \text{όταν } z_1 \neq 0 \\ (0, 0, 1), & \text{όταν } z_1 = 0. \end{cases}$$

είναι αμφιδιαφόριση, όπου  $\pi_+ : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}$  είναι η στερεογραφική προβολή ως προς τον βόρειο πόλο.

4. Εστω  $X$  ένας χώρος Hausdorff και  $H(X)$  η ομάδα των ομοιομορφισμών του  $X$  επί του εαυτού του. Μία υποομάδα  $G$  της  $H(X)$  ορίζει στον  $X$  την σχέση ισοδυναμίας  $x \sim y$  όταν υπάρχει  $g \in G$  ώστε  $y = g(x)$ . Οι κλάσεις ισοδυναμίας λέγονται τροχιές της  $G$ .

(α) Δείξτε ότι η απεικόνιση πηλίκο  $p : X \rightarrow X/G$  είναι ανοιχτή (και συνεχής, επί, εξορισμού).

Η  $G$  λέμε ότι δρά γνήσια ασυνεχώς επί του  $X$  όταν κάθε  $x \in X$  έχει μία ανοιχτή περιοχή  $U$  τέτοια ώστε  $U \cap g(U) = \emptyset$ , για κάθε  $g \in G$ ,  $g \neq id$ .

(β) Αν η  $G$  δρά γνήσια ασυνεχώς, δείξτε ότι κάθε  $[x] \in X/G$  έχει μία ανοιχτή περιοχή  $V^*$  ώστε

$$p^{-1}(V^*) = \bigcup_{g \in G} g(V),$$

όπου  $V$  είναι μία κατάλληλη ανοιχτή περιοχή του  $x \in X$ , ώστε  $g_1(V) \cap g_2(V) = \emptyset$ , για  $g_1 \neq g_2$  και η  $p|_V : V \rightarrow V^*$  είναι ομοιομορφισμός.

(γ) Εστω  $M$  μία λεία  $n$ -πολλαπλότητα και  $G$  μία ομάδα αμφιδιαφορίσεων που δρά γνήσια ασυνεχώς επί της  $M$ . Αν ο  $M/G$  είναι Hausdorff, δείξτε ότι είναι λεία  $n$ -πολλαπλότητα.

(δ) Εστω  $M$  μία λεία  $n$ -πολλαπλότητα και  $G$  μία πεπερασμένη ομάδα αμφιδιαφορίσεων της  $M$ . Αν  $g(x) \neq x$  για κάθε  $x \in M$ ,  $g \in G$ ,  $g \neq id$ , δείξτε ότι η  $G$  δρά γνήσια ασυνεχώς επί της  $M$ , ο  $M/G$  είναι Hausdorff και συνεπώς λεία  $n$ -πολλαπλότητα.

(ε) Στην  $n$ -σφαίρα  $S^n$  η αντιποδική απεικόνιση  $a : S^n \rightarrow S^n$  με  $a(x) = -x$  είναι αμφιδιαφόριση. Αν  $G = \{id, a\}$ , ποιά είναι η λεία πολλαπλότητα  $S^n/G$ ;

(στ) Στον  $T^2 = S^1 \times S^1$  ορίζεται η απεικόνιση  $f : T^2 \rightarrow T^2$  με  $f(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}) = (e^{-2\pi ix}, -e^{2\pi iy})$ . Αν  $G = \{id, f\}$ , δείξτε ότι ο  $K^2 = T^2/G$  είναι λεία 2-πολλαπλότητα. Η  $K^2$  λέγεται φιάλη του Klein.

(ζ) Στο  $\mathbb{R}^n$  δρά η ομάδα των μεταφορών κατά ακέραιο διάνυσμα  $\mathbb{Z}^n$ . Δείξτε ότι ο  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  είναι λεία πολλαπλότητα αμφιδιαφορίσιμη με τον  $T^n$ .

## Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 2

1. Εστω  $f : M \rightarrow N$  μία 1-1, επί και λεία απεικόνιση. Αν η  $f_{*p} : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  είναι γραμμικός ισομορφισμός για κάθε  $p \in M$ , δείξτε ότι η  $f$  είναι αμφιδιαφόριση.

2. Εστω  $f : M \rightarrow Q$  μία λεία απεικόνιση και  $q \in Q$  μία κανονική τιμή της, ώστε  $N = f^{-1}(q) \neq \emptyset$ . Αν  $i_N : N \hookrightarrow M$  είναι η ένθεση, δείξτε ότι  $(i_N)_{*p}(T_p N) = \text{Ker} f_{*p}$  για κάθε  $p \in N$ .

3. Να αποδειχθεί ότι  $T_p S^n = \{[\gamma]_p \in T_p \mathbb{R}^{n+1} : \langle \gamma'(0), p \rangle = 0\}$  για κάθε  $p \in S^n$ , όπου  $\langle, \rangle$  είναι το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

4. Εστω  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$  μία λεία συνάρτηση.

(α) Αν  $\tilde{f} : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μία λεία επέκταση της  $f$  σε κάποιο ανοικτό σύνολο  $S^n \subset A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , δείξτε ότι η  $\tilde{f}_{*p}|_{T_p S^n}$  εξαρτάται μόνον από την  $f$ , όταν  $p \in S^n$ .

(β) Δείξτε μ' ένα παράδειγμα ότι η  $f_{*p} : T_p \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \in S^n$ , εξαρτάται από την  $\tilde{f}$ .

(Υπόδειξη για το (β) : Θεωρείστε την  $f = x^1|_{S^n}$  και τις επεκτάσεις της  $\tilde{f}_1(x) = x^1(\frac{x}{\|x\|^2})$  και  $\tilde{f}_2(x) = x^1(x \cdot \|x\|^2)$  στο  $A = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ .)

5. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει 1-1, λεία συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

6. Το σύνολο  $S$  των πραγματικών  $n \times n$  συμμετρικών πινάκων είναι γραμμικός υπόχωρος του  $\mathbb{R}^{n \times n}$  διαστάσεως  $n(n+1)/2$ . Εστω  $f : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow S$  η απεικόνιση με τύπο  $f(A) = A \cdot A^t$ .

(α) Να αποδειχθεί ότι  $f_{*A}(H) = AH^t + HA^t$  για κάθε  $H \in T_A GL(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A \in GL(n, \mathbb{R})$ .

(β) Να αποδειχθεί ότι ο ταυτοτικός πίνακας  $I_n \in S$  είναι κανονική τιμή της  $f$ .

(γ) Να αποδειχθεί ότι η ορθογώνια ομάδα  $O(n, \mathbb{R})$  είναι κανονική  $n(n-1)/2$ -υποπολλαπλότητα της  $GL(n, \mathbb{R})$ .

(δ) Να αποδειχθεί ότι  $T_{I_n} O(n, \mathbb{R}) = \{H \in \mathbb{R}^{n \times n} : H + H^t = 0\}$ .

7. Εστω  $M$  μία λεία  $n$ -πολλαπλότητα,  $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$  ένας άτλας της και  $\bar{\mathcal{A}} = \{(\pi^{-1}(U_i), \bar{\phi}_i) : i \in I\}$  ο αντίστοιχος άτλας της  $TM$ , όπου  $\pi : TM \rightarrow M$  είναι η εφαπτόμενη δέσμη της  $M$ . Να αποδειχθεί ότι

$$\det D(\bar{\phi}_i \circ \bar{\phi}_j^{-1})(x, v) > 0$$

για κάθε  $i, j \in I$  με  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  και  $(x, v) \in \phi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$ .

8. Εστω  $0 \leq k < n$ . Να αποδειχθεί ότι το σύνολο

$$N_k = \{[z_1, \dots, z_{k+1}, 0, \dots, 0] \in \mathbb{C}P^n : (z_1, \dots, z_{k+1}) \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}\}$$

είναι κανονική υποπολλαπλότητα της  $\mathbb{C}P^n$  και η απεικόνιση  $j : \mathbb{C}P^k \rightarrow N_k$  με  $j[z_1, \dots, z_{k+1}] = [z_1, \dots, z_{k+1}, 0, \dots, 0]$  είναι αμφιδιαφόριση.

9. Εστω  $d \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  και  $V_d^{2n}$  το σύνολο των σημείων  $(z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  που ικανοποιούν την εξίσωση

$$z_0^d + z_1^2 + \dots + z_n^2 = 0.$$

(α) Να αποδειχθεί ότι το  $V_d^{2n}$  είναι λεία  $2n$ -πολλαπλότητα.

(β) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο  $W_d^{2n-1} = V_d^{2n} \cap S^{2n+1}$  είναι λεία  $(2n - 1)$ -πολλαπλότητα. Η  $W_d^{2n-1}$  λέγεται πολλαπλότητα του Brieskorn.

### Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 3

1. Εστω  $N \subset M$  μία κανονική υπολλαπλότητα της πολλαπλότητας  $M$  και  $\xi \in \mathcal{X}(M)$ , ώστε  $\xi(p) \in T_p N$  για κάθε  $p \in N$ . Δείξτε ότι  $\xi|_N \in \mathcal{X}(N)$ .

2. Στο  $\mathbb{R}^{2n}$  θεωρούμε το λείο διανυσματικό πεδίο

$$\xi = x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} + \dots + x^{2n} \frac{\partial}{\partial x^{2n-1}} - x^{2n-1} \frac{\partial}{\partial x^{2n}}.$$

Δείξτε ότι το  $\xi|_{S^{2n-1}}$  είναι ένα λείο διανυσματικό πεδίο της  $S^{2n-1}$ , που δεν μηδενίζεται πουθενά.

3. (α) Εστω  $M$  μία λεία πολλαπλότητα και  $G$  μία ομάδα αμφιδιαφορίσεων της  $M$  που δρά γνήσια ασυνεχώς επί της  $M$ . Αν  $\xi \in \mathcal{X}(M)$ , ώστε  $g_* \xi = \xi$  για κάθε  $g \in G$ , να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα μοναδικό  $\zeta \in \mathcal{X}(M/G)$  ώστε  $p_* \xi(x) = \zeta(p(x))$  για κάθε  $x \in M$ , όπου  $p : M \rightarrow M/G$  είναι η απεικόνιση πιλήχο.

(β) Κατασκευάστε ένα λείο διανυσματικό πεδίο στο πραγματικό προβολικό επίπεδο  $\mathbb{R}P^2$ , που έχει ακριβώς ένα σημείο μηδενισμού, ενώ κάθε άλλη ολοκληρωτική καμπύλη είναι μή-σταθερή περιοδική.

4. Μία  $n$ -πολλαπλότητα  $M$  λέγεται παραλληλήσιμη αν υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \mathcal{X}(M)$ , ώστε το  $\{\xi_1(p), \xi_2(p), \dots, \xi_n(p)\}$  να αποτελεί βάση του  $T_p M$  για κάθε  $p \in M$ . Να αποδειχθεί ότι η  $M$  είναι παραλληλήσιμη τότε και μόνον τότε όταν η εφαιτομένη δέσμη της είναι τετριμένη, δηλαδή υπάρχει μία αμφιδιαφόριση  $f : TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$  ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{f} & M \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow \pi & & \downarrow \text{προβολή} \\ M & \xrightarrow{id} & M \end{array}$$

και η  $f$  απεικονίζει γραμμικά τον  $T_p M$  στο  $\{p\} \times \mathbb{R}^n$  για κάθε  $p \in M$ .

5. Να αποδειχθεί ότι οι πολλαπλότητες  $S^1, T^2 = S^1 \times S^1, S^3$  είναι παραλληλήσιμες.

6. Να ευρεθεί η ροή του διανυσματικού πεδίου  $x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$  του  $\mathbb{R}^2$ .

7. Εστω  $M$  μία πολλαπλότητα,  $p \in M$  και  $\xi \in \mathcal{X}(M)$ .

(α) Αν  $\xi(p) = 0$ , δείξτε ότι η σταθερή καμπύλη  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  με  $\gamma(t) = p$  είναι η μοναδική ολοκληρωτική καμπύλη που διέρχεται από το  $p$ . Συνεπώς, αν  $\phi : D \rightarrow M$  είναι η ροή του  $\xi$ , τότε  $\phi_t(p) = p$  για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ .

(β) Εστω  $\gamma : I_p \rightarrow M$  η ολοκληρωτική καμπύλη με  $\gamma(0) = p$ . Αν υπάρχει  $T \in I_p$ ,  $T > 0$ , ώστε  $\gamma(0) = \gamma(T)$  και ο  $T$  είναι ο ελάχιστος θετικός πραγματικός αριθμός με αυτήν την ιδιότητα, να αποδειχθεί ότι  $I_p = \mathbb{R}$  και υπάρχει μία immersion  $\bar{\gamma} : S^1 \rightarrow M$  ώστε  $\gamma(t) = \bar{\gamma}(e^{2\pi i t/T})$  για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ .

8. Εστω  $M$  μία πολλαπλότητα και  $f : M \rightarrow M$  μία αμφιδιαφόριση. Αν το  $\xi \in \mathcal{X}(M)$  έχει ροή  $\phi : D \rightarrow M$ , δείξτε ότι το  $f_*\xi$  έχει ροή  $\psi : D \rightarrow M$  με τύπο  $\psi(t, f(p)) = f(\phi(t, p))$ .

9. Εστω  $h : [0, 1] \rightarrow [0, \pi]$  μία λεία συνάρτηση με  $h^{-1}(0) = [0, 1/5] \cup [4/5, 1]$  και  $h^{-1}(\pi/2) = [2/5, 3/5]$ . Επεκτείνουμε την  $h$  στο  $\mathbb{R}$  περιοδικά θέτοντας  $h(x+1) = h(x)$ . Δείξτε ότι τα διανυσματικά πεδία

$$\xi(x) = x^2 \cos^2 h(x) \frac{d}{dx} \text{ και } \zeta(x) = x^2 \sin^2 h(x) \frac{d}{dx}$$

είναι πλήρη στο  $\mathbb{R}$ , αλλά το  $\xi + \zeta$  δεν είναι πλήρες.

10. Εστω  $M$  μία πολλαπλότητα και  $\xi \in \mathcal{X}(M)$ , με ροή  $\phi : D \rightarrow M$ , όπου

$$D = \bigcup_{p \in M} (a_p, b_p) \times \{p\}.$$

Αν  $f : M \rightarrow (0, 1]$  είναι μία λεία συνάρτηση με την ιδιότητα  $f(p) < \min\{-a_p, b_p\}$  για κάθε  $p \in M$ , να αποδειχθεί ότι το διανυσματικό πεδίο  $f \cdot \xi$  είναι πλήρες.

(Υπόδειξη : Εστω  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  η λεία συνάρτηση με τύπο

$$g(t, p) = \int_0^t \frac{1}{f(\phi(s, p))} ds.$$

Δείξτε ότι η απεικόνιση  $h : D \rightarrow \mathbb{R} \times M$  με τύπο  $h(t, p) = (g(t, p), p)$  είναι αμφιδιαφόριση και η  $\psi = \phi \circ h^{-1}$  είναι η ροή του  $f \cdot \xi$ . Για την ύπαρξη μιας τέτοιας συνάρτησης  $f$  και περισσότερα κοιτάξτε την εργασία R.L. Renz, Equivalent flows on smooth Banach manifolds, *Indiana Math. J.* 20 (1971), 695-698.)

11. Εστω  $M$  μία πολλαπλότητα και  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , πλήρη, με ροές  $\phi$  και  $\psi$  αντίστοιχα. Αν υπάρχει μια λεία συνάρτηση  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  ώστε  $[X, Y] = hX$ , να αποδειχθεί ότι

$$(\psi_t \circ \phi_s)(p) = (\phi_{T_p(t,s)} \circ \psi_t)(p)$$

για κάθε  $p \in M, t, s \in \mathbb{R}$ , όπου  $T_p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι η λεία συνάρτηση

$$T_p(t, s) = \int_0^s \left( \exp \left( \int_0^t h(\psi_\tau(\phi_\sigma(p))) d\tau \right) \right) d\sigma.$$

## Άσκησεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 4

1. Να υπολογιστεί το  $d\omega$  όταν  
 (α)  $\omega = x^2 y dy - xy dx$ , (β)  $\omega = f(x, y) dx$ , όπου  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μία λεία συνάρτηση,  
 (γ)  $\omega = P dx + Q dy + R dz$ , όπου οι  $P, Q, R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  είναι λείες συναρτήσεις.

2. Αν  $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i$  και  $\beta = \sum_{i=1}^n \beta_i dx^i$  στον  $\mathbb{R}^n$ , δείξτε ότι

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{i < j} (\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i) dx^i \wedge dx^j.$$

3. Να υπολογιστεί το  $d\omega$ , όταν  $\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$ .

4. Αν  $\rho = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x^j dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \dots \wedge dx^n$  στον  $\mathbb{R}^n$ , να αποδειχθεί ότι  $d\rho = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ .

5. Εστω  $M$  μία λεία πολλαπλότητα και  $\omega \in A^1(M)$ . Αν υπάρχει  $f \in C^\infty(M)$ , ώστε  $f(p) \neq 0$  για κάθε  $p \in M$  και η  $f\omega$  να είναι κλειστή, δείξτε ότι  $\omega \wedge d\omega = 0$ .

6. Εστωσαν  $M, N$  δύο λείες πολλαπλότητες και  $f : M \rightarrow N$  μία submersion επί της  $N$ . Να αποδειχθεί ότι η  $f^* : A(N) \rightarrow A(M)$  είναι 1-1.

7. Να αποδειχθεί ότι  $H^1(\mathbb{R}) = 0$ .

8. Εστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια λεία, περιοδική συνάρτηση με περίοδο 1, δηλαδή  $f(x+1) = f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδειχθεί ότι υπάρχει  $\lambda \in \mathbb{R}$  και μια λεία, περιοδική συνάρτηση  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με περίοδο 1, ώστε  $f dx = \lambda dx + dg$  στο  $\mathbb{R}$ . Κατά συνέπεια  $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$ .

9. Στο  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  θεωρούμε την διαφορική 1-μορφή

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

(α) Να αποδειχθεί ότι η  $\omega$  είναι κλειστή, αλλά δεν είναι ακριβής.

(β) Εστω  $F : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  η λεία τοπική αμφιδιαφόριση (εκθετική απεικόνιση) με τύπο

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$

Να αποδειχθεί ότι  $F^*\omega = d\theta$ .

(γ) Εστω  $\eta$  μια κλειστή, διαφορική 1-μορφή στο  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν  $\lambda \in \mathbb{R}$ , μια λεία, περιοδική συνάρτηση  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με περίοδο  $2\pi$  και μια λεία συνάρτηση  $h : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με την ιδιότητα  $h(\rho, \theta + 2\pi) = h(\rho, \theta)$  για κάθε  $\rho > 0$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ , ώστε

$$F^*\eta = dh + \lambda d\theta + g'(\theta) d\theta$$

στο  $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ .

(δ) Να αποδειχθεί ότι  $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \cong \mathbb{R}$ .

(Υπόδειξη : Για το (γ) χρησιμοποιείστε την άσκηση 8 και για το (δ) την άσκηση 6.)

10. Εστω  $M \subset \mathbb{R}^3$  ένα ανοιχτό σύνολο. Για κάθε  $\alpha \in A^1(M)$  υπάρχουν μοναδικές  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in C^\infty(M)$ , ώστε  $\alpha = \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2 + \alpha_3 dx^3$ . Η  $\phi : \mathcal{X}(M) \rightarrow A^1(M)$  με

$$\phi\left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x^3}\right) = \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2 + \alpha_3 dx^3$$

είναι ισομορφισμός. Για κάθε  $\theta \in A^2(M)$  υπάρχουν μοναδικές  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in C^\infty(M)$  ώστε  $\theta = \beta_1 dx^2 \wedge dx^3 + \beta_2 dx^3 \wedge dx^1 + \beta_3 dx^1 \wedge dx^2$  και η  $\psi : \mathcal{X}(M) \rightarrow A^2(M)$  με

$$\psi\left(\beta_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \beta_3 \frac{\partial}{\partial x^3}\right) = \theta$$

είναι ισομορφισμός. Τέλος, η  $\mu : C^\infty(M) \rightarrow A^3(M)$  με  $\mu(f) = f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$  είναι ισομορφισμός. Να αποδειχθεί ότι  $\phi(\xi) \wedge \phi(\zeta) = \psi(\xi \times \zeta)$  και  $\phi(\xi) \wedge \psi(\zeta) = \mu(\langle \xi, \zeta \rangle)$  για κάθε  $\xi, \zeta \in \mathcal{X}(M)$ , όπου  $\times$  είναι το εξωτερικό γινόμενο στον  $\mathbb{R}^3$  και  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  είναι το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο και ότι το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccccccc} C^\infty(M) & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathcal{X}(M) & \xrightarrow{\text{curl}} & \mathcal{X}(M) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(M) \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \phi & & \downarrow \psi & & \downarrow \mu \\ C^\infty(M) & \xrightarrow{d} & A^1(M) & \xrightarrow{d} & A^2(M) & \xrightarrow{d} & A^3(M) \end{array}$$

11. Εστω  $M \subset \mathbb{R}^n$  ένα ανοιχτό σύνολο και  $\omega \in A^1(M)$ , ώστε  $\omega \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k = 0$ , όπου  $k < n$ . Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν  $f_1, \dots, f_k \in C^\infty(M)$  ώστε  $\omega = f_1 dx^1 + \dots + f_k dx^k$ .

## Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 5

1. Να αποδειχθεί ότι η εφαπτομένη δέσμη κάθε λείας πολλαπλότητας είναι προσανατολισμένη.

2. Εστω  $X \subset \mathbb{R}^n$  ένα ανοιχτό σύνολο και  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  μία λεία συνάρτηση. Αν το  $a \in \mathbb{R}$  είναι κανονική τιμή της  $f$  και  $M = f^{-1}(a) \neq \emptyset$ , δείξτε ότι η  $M$  είναι προσανατολισμένη υποπολλαπλότητα του  $\mathbb{R}^n$ .

(Υπόδειξη : Ο περιορισμός της  $\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial f}{\partial x^j} \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \dots \wedge dx^n$  είναι ένα στοιχείο όγκου. Η απόδειξη είναι όμοια με την περίπτωση της σφαίρας.)

3. Να αποδειχθεί ότι η έννοια της προσανατολισσιμότητας είναι αναλλοίωτη από αμφιδιαφορίσεις.

4. Εστω  $M$  μία λεία  $n$ -πολλαπλότητα και  $\omega \in A^k(M)$ ,  $0 \leq k \leq n$ . Εστω  $G$  μία ομάδα αμφιδιαφορίσεων της  $M$  που δρά γνήσια ασυνεχώς επί της  $M$ , ώστε ο χώρος  $M/G$  να είναι Hausdorff. Αν  $g^*\omega = \omega$  για κάθε  $g \in G$ , να αποδειχθεί ότι υπάρχει μία μοναδική  $\tilde{\omega} \in A^k(M/G)$  ώστε  $p^*\tilde{\omega} = \omega$ , όπου  $p : M \rightarrow M/G$  είναι η απεικόνιση πιλήκο. Να αποδειχθεί μετά από αυτό ότι αν η  $M$  είναι προσανατολισμένη και η  $\omega$  είναι ένα στοιχείο όγκου ώστε  $g^*\omega = \omega$  για κάθε  $g \in G$ , τότε η  $M/G$  είναι προσανατολισμένη.

5. Εστω  $M$  μία λεία  $n$ -πολλαπλότητα και  $\omega \in A^k(M)$ ,  $0 \leq k \leq n$ . Εστω  $G$  μία ομάδα αμφιδιαφορίσεων της  $M$  που δρά γνήσια ασυνεχώς επί της  $M$ , ώστε ο χώρος  $M/G$  να είναι Hausdorff. Αν  $\tilde{\omega} \in A^k(M/G)$ ,  $0 \leq k \leq n$  και  $\omega = p^*\tilde{\omega}$ , όπου  $p : M \rightarrow M/G$  είναι η απεικόνιση πιλήκο, δείξτε ότι  $g^*\omega = \omega$  για κάθε  $g \in G$ . Να αποδειχθεί μετά από αυτό ότι αν η  $M/G$  είναι προσανατολισμένη, τότε και η  $M$  είναι προσανατολισμένη.

6. Να αποδειχθεί ότι ο πραγματικός προβολικός χώρος  $\mathbb{R}P^n$ ,  $n > 1$ , είναι προσανατολισμένη πολλαπλότητα τότε και μόνον τότε όταν ο  $n$  είναι περιττός. Συνεπώς, το πραγματικό προβολικό επίπεδο είναι μη-προσανατολισμένη, συνεκτική, συμπαγής 2-πολλαπλότητα.

7. Εστω ότι  $G = \langle g, h \rangle$ , όπου  $g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  είναι οι  $g(x, y) = (x + 1, y)$  και  $h(x, y) = (1 - x, y + 1)$ . Δηλαδή,  $G = \langle g, h | h^{-1}gh = g^{-1} \rangle$ . Να αποδειχθεί ότι η  $K^2 = \mathbb{R}^2/G$ , που είναι η φιάλη του Klein, είναι μη-προσανατολισμένη, συνεκτική, συμπαγής 2-πολλαπλότητα.

8. Εστω  $M$  μία προσανατολισμένη  $n$ -πολλαπλότητα με στοιχείο όγκου  $\omega \in A^n(M)$ . Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση  $i_\omega : \mathcal{X}(M) \rightarrow A^{n-1}(M)$  με

$$(i_\omega)_p(v_1, \dots, v_{n-1}) = \omega_p(\xi(p), v_1, \dots, v_{n-1}), v_1, \dots, v_{n-1} \in T_pM, p \in M$$

είναι γραμμικός ισομορφισμός. Η  $i_\omega$  λέγεται flux form του  $\xi$ .

(Υπόδειξη : Εστω  $(U, \phi)$  ένας χάρτης με αντίστοιχα βασικά διανυσματικά πεδία  $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n$  στο  $U$ . Υπάρχει μοναδική  $f \neq 0$  ώστε  $\omega|_U = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ . Αν

$\xi|_U = \sum_{k=1}^n \xi_k(\partial/\partial x^k)$ , δείξτε πρώτα ότι

$$i_{\xi}\omega|_U = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} f\xi_j \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

**9.** Εστω  $M$  μία προσανατολισμένη  $n$ -πολλαπλότητα με στοιχείο όγκου  $\omega \in A^n(M)$ . Για κάθε  $\xi \in \mathcal{X}(M)$  υπάρχει μία μοναδική συνάρτηση  $\operatorname{div}_{\omega}\xi \in C^\infty(M)$ , που λέγεται  $\omega$ -απόκλιση του  $\xi$ , ώστε  $d(i_{\xi}\omega) = (\operatorname{div}_{\omega}\xi)\omega$ . Αν  $M = \mathbb{R}^n$  και  $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ , όπου  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  με  $f \neq 0$ , να αποδειχθεί ότι για

$$\xi = \sum_{k=1}^n \xi_k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

έχουμε

$$\operatorname{div}_{\omega}\xi = \frac{1}{f} \sum_{k=1}^n \frac{\partial(f\xi_k)}{\partial x^k}.$$

**10.** Εστω  $M \subset \mathbb{R}^3$  μία προσανατολισμένη 2-υποπολλαπλότητα, για την οποία υπάρχει μία αμφιδιαφόριση  $f = (f_1, f_2, f_3) : U \rightarrow M$ , που διατηρεί τον προσανατολισμό, όπου  $U \subset \mathbb{R}^2$  είναι ένα ανοιχτό σύνολο. Αν

$$\xi = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \xi_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$$

και  $\omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ , τότε

$$i_{\xi}\omega = \xi_1 dx^2 \wedge dx^3 + \xi_2 dx^3 \wedge dx^1 + \xi_3 dx^1 \wedge dx^2.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$f^*(i_{\xi}\omega) = \begin{vmatrix} \xi_1 \circ f_1 & \xi_2 \circ f_2 & \xi_3 \circ f_3 \\ \partial_u f_1 & \partial_u f_2 & \partial_u f_3 \\ \partial_v f_1 & \partial_v f_2 & \partial_v f_3 \end{vmatrix} du \wedge dv = \langle \xi \circ f, \partial_u f \times \partial_v f \rangle du \wedge dv,$$

όπου  $\partial/\partial u, \partial/\partial v$  είναι τα βασικά διανυσματικά πεδία στο  $\mathbb{R}^2$ .

## Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 6

1. Εστω  $U \subset \mathbb{R}^n$  ένα ανοιχτό σύνολο με  $0 \in U$  και  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  μια  $C^\infty$  συνάρτηση, ώστε  $f(0) = 1$  και  $f_{*0} = 0$ . Εστω  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  το γράφημα της  $f$  και  $g : M \rightarrow S^n$  η απεικόνιση Gauss

$$g(p, f(p)) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(p)\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x^n}(p)\right)^2 + 1}} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(p), 1\right).$$

(α) Αν  $\omega$  είναι το συνηθισμένο στοιχείο όγκου της  $S^n$ , να αποδειχθεί ότι

$$(g^*\omega)_{e_{n+1}} = (-1)^n \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(0)\right) \cdot (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)_{e_{n+1}}.$$

(β) Εστω  $M \subset \mathbb{R}^3$  μια συνεκτική, συμπαγής, προσανατολίσιμη επιφάνεια, δηλαδή κανονική 2-υποπολλαπλότητα του  $\mathbb{R}^3$ . Αν  $K$  είναι η καμπυλότητα Gauss της  $M$ , να αποδειχθεί ότι

$$\int_M K d\sigma = 4\pi \deg g,$$

όπου  $g$  είναι η απεικόνιση Gauss και  $d\sigma$  είναι το στοιχείο όγκου στην  $M$ , που επάγεται από το ευκλείδειο στοιχείο όγκου  $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$  του  $\mathbb{R}^3$ .

(Υπόδειξη : Για το (β), αν  $\omega$  είναι το συνηθισμένο στοιχείο όγκου της  $S^2$ , δείξτε ότι  $g^*\omega = Kd\sigma$ . Χρησιμοποιείστε το (α) και το γεγονός ότι τοπικά η  $M$  είναι το γράφημα κάποιας  $C^\infty$  συνάρτησης.)

2. Αν  $k \in \mathbb{Z}^+$  να αποδειχθεί ότι η

$$\omega_k = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} \frac{x^j}{\|x\|^k} \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \dots \wedge dx^{n+1}$$

δεν είναι ακριβής στο  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ .

(Υπόδειξη : Υποθέστε ότι η  $\omega_k$  είναι ακριβής στο  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  και χρησιμοποιείστε το θεώρημα του Stokes για να φτάσετε σε αντίφαση.)

3. Εστω  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  η  $p(t) = e^{2\pi it}$  και  $\omega \in A^1(S^1)$ . Υπάρχει  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  ώστε  $p^*\omega = fdt$ .

(α) Να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι περιοδική με περίοδο 1 και

$$\int_{S^1} \omega = \int_0^1 f(t)dt.$$

(β) Δείξτε χρησιμοποιώντας το (α) ότι ο  $\int_{S^1} : H^1(S^1) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι ισομορφισμός.

(Υπόδειξη : Για το (α) θεωρείστε για κάθε  $\epsilon > 0$  τον άτλαντα  $\mathcal{A} = \{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)\}$ , όπου  $U_1 = p((0, 1))$ ,  $\phi_1 = (p|_{(0, 1)})^{-1}$ ,  $U_2 = p((-\epsilon, \epsilon))$ ,  $\phi_2 = (p|_{(-\epsilon, \epsilon)})^{-1}$  και μία διαμέριση της μονάδας  $\{f_1, f_2\}$  υποκαείμενη στο ανοιχτό κάλυμα  $\{U_1, U_2\}$ . Παρατηρήστε

οτι  $(\phi_j^{-1})^*(f_j\omega) = (f_j \circ p)p^*\omega$ ,  $j = 1, 2$ , ενώ  $\text{supp}(f_2 \circ p) \subset (-\epsilon, \epsilon)$ .

4. Εστω  $E = \mathbb{C}P^n \setminus \{[0, \dots, 0, 1]\}$ . Αν  $\pi : E \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$  και  $i : \mathbb{C}P^{n-1} \rightarrow E$  είναι οι απεικονίσεις με τύπους  $\pi[z_1, \dots, z_n, z_{n+1}] = [z_1, \dots, z_n]$  και  $i[z_1, \dots, z_n] = [z_1, \dots, z_n, 0]$ , να αποδειχθεί οτι  $i \circ \pi \simeq id$ . Συνεπώς  $H(E) \cong H(\mathbb{C}P^{n-1})$ . Χρησιμοποιείστε το γεγονός αυτό, το γεγονός οτι ο  $\mathbb{C}P^1$  είναι αμφιδιαφορίσιμος με την  $S^2$  και την ακολουθία Mayer-Vietoris για το ανοιχτό κάλυμα  $\mathbb{C}P^n = E \cup U_{n+1}$  για να αποδείξετε επαγωγικά οτι

$$H^k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{για } k = 0, 2, 4, \dots, 2n \\ 0, & \text{για } k \text{ αλλιώς.} \end{cases}$$

5. Αν  $\pi : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ ,  $n \geq 1$ , είναι η γενικευμένη απεικόνιση Hopf, να αποδειχθεί οτι δεν υπάρχει λεία  $s : \mathbb{C}P^n \rightarrow S^{2n+1}$  ώστε  $\pi \circ s = id$ .

6. Να αποδειχθεί οτι η διαβαθμισμένη άλγεβρα  $H(\mathbb{C}P^n)$ ,  $n \geq 1$ , είναι ισόμορφη με την κόλουρη πολυωνυμική άλγεβρα  $\mathbb{R}[X]/\langle X^{n+1} \rangle$ , όπου  $X$  είναι μία μη-μηδενική κλάση συνολογίας στον βαθμό 2 και  $\langle X^{n+1} \rangle$ , είναι το ιδεώδες (ως προς το cup product) που παράγεται από το στοιχείο  $X^{n+1}$ .

(Υπόδειξη : Χρησιμοποιείστε επαγωγή και τον δυϊσμό Poincaré.)

7. Να αποδειχθεί οτι  $H^k(S^2 \times S^4) \cong H^k(\mathbb{C}P^3)$ , για κάθε  $k$ , αλλά οι διαβαθμισμένες άλγεβρες  $H(S^2 \times S^4)$  και  $H(\mathbb{C}P^3)$  δεν είναι ισόμορφες.

## Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 7

1. Εστω  $M$  μία  $n$ -πολλαπλότητα και  $D \subset M$  ένας τόπος με λείο σύνορο. Ένα διάνυσμα  $v \in T_p M$ , όπου  $p \in \partial D$ , λέμε ότι έχει κατεύθυνση προς τα έξω του  $D$ , αν υπάρχει κάποιος χάρτης τύπου  $(\beta)$   $(U, \phi)$  με  $p \in U$  ώστε  $dx^n(\phi_{*p}(v)) < 0$ . Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα λείο διανυσματικό πεδίο  $\nu : \partial D \rightarrow TM$  κατά μήκος του  $\partial D$ , δηλαδή  $\nu(p) \in T_p M$  για κάθε  $p \in \partial D$ , με κατεύθυνση προς τα έξω του  $D$ .

(Υπόδειξη : Ορίστε το  $\nu$  πρώτα τοπικά και συγχολείστε τους τοπικούς ορισμούς χρησιμοποιώντας μία διαμέριση της μονάδας.)

2. Εστω  $M$  μία προσανατολισμένη  $n$ -πολλαπλότητα και  $\omega \in A^n(M)$ , που δίνει τον προσανατολισμό. Αν  $D \subset M$  είναι ένας τόπος με λείο σύνορο, να αποδειχθεί ότι ο επαγόμενος προσανατολισμός του  $\partial D$  δίνεται από την  $\tilde{\omega} \in A^{n-1}(\partial D)$  με τύπο

$$\tilde{\omega}_p(v_1, \dots, v_{n-1}) = (-1)^n \omega(\nu(p), v_1, \dots, v_{n-1}),$$

για  $v_1, \dots, v_{n-1} \in T_p \partial D$ ,  $p \in \partial D$ , όπου  $\nu : \partial D \rightarrow TM$  είναι ένα λείο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος του  $\partial D$  με κατεύθυνση προς τα έξω του  $D$ .

3. Εστω  $M$  μία προσανατολισμένη  $n$ -πολλαπλότητα και  $D \subset M$  ένας τόπος με λείο σύνορο. Να αποδειχθεί ότι για κάθε  $f \in C^\infty(M)$  και  $\omega \in A_c^{n-1}(M)$  ισχύει ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά μέρη

$$\int_D f d\omega = (-1)^n \int_{\partial D} f\omega - \int_D df \wedge \omega.$$

4. Εστω  $D \subset \mathbb{R}^2$  ένας φραγμένος τόπος με λείο σύνορο και  $F = (P, Q)$  ένα λείο διανυσματικό πεδίο που ορίζεται σε μία ανοιχτή περιοχή του  $\bar{D}$ . Να αποδειχθεί το θεώρημα του Green

$$\int_{\partial D} F = \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

5. Εστω  $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  μία λεία απλή κλειστή καμπύλη που είναι το σύνορο ενός δίσκου με λείο σύνορο  $D \subset \mathbb{C}$  και  $f = u + iv$  μία ολόμορφη συνάρτηση που ορίζεται σε μία ανοιχτή περιοχή του  $\bar{D}$ . Σύμφωνα με τις εξισώσεις Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ και } -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Να αποδειχθεί το θεώρημα του Cauchy

$$\int_\gamma f(z) dz = 0.$$

(Υπόδειξη : Αποδείξτε πρώτα ότι  $\int_\gamma f(z) dz = \int_\gamma \omega_1 + i \int_\gamma \omega_2$ , όπου  $\omega_1 = u dx - v dy$ ,  $\omega_2 = v dx + u dy$  και ακολούθως ότι  $\int_\gamma \omega_1 = \int_\gamma \omega_2 = 0$ , χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Stokes.)

## Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 8

1. Είναι η παράγωγος Lie μία γραμμική συνοχή σε μία λεία πολλαπλότητα;
2. Να αποδειχθεί ότι η ευκλείδεια συνοχή στον  $\mathbb{R}^n$  είναι η μοναδική γραμμική συνοχή για την οποία ισχύει  $\nabla_X Y = 0$  για κάθε  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$  και κάθε σταθερό  $Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ .
3. Εστω  $\nabla$  μία γραμμική συνοχή σε μία πολλαπλότητα  $M$ . Μία λεία αμφιδιαφόριση  $f : M \rightarrow M$  λέγεται *συσχετισμένη* (affine), αν διατηρεί την  $\nabla$ , δηλαδή  $f_*(\nabla_X Y) = \nabla_{f_*X} f_*Y$ , για κάθε  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ . Το σύνολο των συσχετισμένων αμφιδιαφορίσεων της  $\nabla$  αποτελεί ομάδα. Να αποδειχθεί ότι αν  $M = \mathbb{R}^n$  και  $\nabla$  είναι η ευκλείδεια συνοχή, τότε κάθε συσχετισμένη αμφιδιαφόριση έχει την μορφή

$$f(x) = Ax + b, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

όπου  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  και  $b \in \mathbb{R}^n$ .

4. Μία λεία  $n$ -πολλαπλότητα  $M$  λέγεται *συσχετισμένα επίπεδη* (affinely flat), αν έχει έναν άτλαντα  $\{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$ , ώστε για κάθε  $i, j \in I$  με  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  υπάρχουν  $A_{ij} \in GL(n, \mathbb{R})$  και  $b_{ij} \in \mathbb{R}^n$  ώστε

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1}(x) = A_{ij}x + b_{ij}$$

για κάθε  $x \in \phi_j(U_i \cap U_j)$ . Να αποδειχθεί ότι σε μια τέτοια πολλαπλότητα υπάρχει μια φυσική γραμμική συνοχή  $\nabla$ , ώστε κάθε χάρτης  $\phi_i : U_i \rightarrow \phi_i(U_i)$  να μεταφέρει την  $\nabla|U$  στην ευκλείδεια συνοχή του  $\phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ .

5. Εστω  $M \subset \mathbb{R}^n$  μία κανονική  $m$ -υποπολλαπλότητα. Για κάθε  $p \in M$  έχουμε  $T_p\mathbb{R}^n = T_pM \oplus N_p(M)$ , όπου  $N_p(M) = \{v \in T_p\mathbb{R}^n : v \perp T_pM\}$ . Εστω  $\pi_p : T_p\mathbb{R}^n \rightarrow T_pM$  η προβολή ως προς αυτήν την διάσπαση.

(α) Εστω  $X \in \mathcal{X}(M)$ . Να αποδειχθεί ότι κάθε  $p \in M$  έχει μια ανοιχτή περιοχή  $U \subset \mathbb{R}^n$  στην οποία υπάρχει ένα  $\tilde{X} \in \mathcal{X}(U)$  ώστε  $\tilde{X}|U \cap M = X$ .

(β) Αν  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  και  $p \in M$  θέτουμε  $(\bar{\nabla}_X Y)(p) = \pi_p((\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})(p))$ , όπου  $\nabla$  είναι η ευκλείδεια συνοχή και  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  είναι επεκτάσεις των  $X, Y$ , αντίστοιχα, σε μία περιοχή του  $p$  στο  $\mathbb{R}^n$ . Να αποδειχθεί ότι το  $(\bar{\nabla}_X Y)(p)$  δεν εξαρτάται από τις επεκτάσεις.

(γ) Να αποδειχθεί ότι η  $\bar{\nabla}$  είναι μία γραμμική συνοχή στην  $M$ . Η  $\bar{\nabla}$  λέγεται η ευκλείδεια συνοχή της  $M$ .

6. Στο  $\mathbb{R}^2$  θεωρούμε την γραμμική συνοχή για την οποία τα σύμβολα του Christoffel δίνονται από τους τύπους  $\Gamma_{11}^1 = x$ ,  $\Gamma_{12}^1 = 1$ ,  $\Gamma_{22}^2 = 2y$ , ενώ τα υπόλοιπα μηδενίζονται.

(α) Ποια είναι η διαφορική εξίσωση των γεωδαισιακών αυτής της γραμμικής συνοχής;

(β) Εστω  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  η λεία καμπύλη  $\gamma(t) = (t, 0)$ . Να υπολογιστεί η παράλληλη μεταφορά του διανύσματος  $(\frac{\partial}{\partial y})_{(0,0)}$  κατά μήκος της  $\gamma$  στο  $(1, 0)$ , ως προς αυτήν την γραμμική συνοχή.

## Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 9

1. Εστω  $M, N$  δύο συνεκτικές πολλαπλότητες Riemann και  $f : M \rightarrow N$  μία λεία αμφιδιαφόριση. Εστω ότι υπάρχει  $p \in M$  ώστε η  $f_{*p} : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  να είναι ισομετρία. Να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι ισομετρία τότε και μόνον τότε όταν είναι συσχετισμένη ως προς την συνοχή Levi-Civita.

2. Να αποδειχθεί ότι σε μία  $n$ -πολλαπλότητα Riemann ισχύει σε τοπικές συντεταγμένες ο τύπος

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k g_{kl} + \sum_{k=1}^n \Gamma_{il}^k g_{kj}.$$

3. Στον  $\mathbb{R}^3$  ορίζουμε την  $\nabla : \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$  από τον τύπο

$$\nabla_X Y = D_X Y + \frac{1}{2} X \times Y,$$

όπου  $D_X Y$  είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος του  $Y$  ως προς  $X$  και  $X \times Y$  είναι εξωτερικό γινόμενο (ως προς την ευκλείδεια μετρική).

(α) Να αποδειχθεί ότι η  $\nabla$  είναι συνοχή. Είναι η  $\nabla$  συμμετρική;

(β) Είναι η παράλληλη μεταφορά ως προς την  $\nabla$  κατά μήκος μιας λείας καμπύλης ευκλείδεια γραμμική ισομετρία;

4. Εστω  $M$  μία  $n$ -πολλαπλότητα Riemann και  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  μία λεία συνάρτηση. Το gradient της  $f$  είναι το μοναδικό λείο διανυσματικό πεδίο  $\text{grad} f$  για το οποίο ισχύει

$$f_{*p}(v) = \langle \text{grad} f(p), v \rangle, \quad v \in T_p M, \quad p \in M.$$

(α) Να αποδειχθεί ότι στις τοπικές συντεταγμένες ενός χάρτη το gradient της  $f$  έχει τύπο

$$\text{grad} f = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial f}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

(β) Αν  $\|\text{grad} f\| = 1$  παντού στην  $M$ , να αποδειχθεί ότι οι ολοκληρωτικές καμπύλες του  $\text{grad} f$  είναι γεωδαισιακές.

5. Στον  $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  θεωρούμε την μετρική Riemann

$$\langle v, w \rangle = \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} \cdot \text{Re}(v\bar{w}), \quad v, w \in T_z \mathbb{D}^2, \quad z \in \mathbb{D}^2.$$

(α) Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση  $C : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  με τύπο

$$C(z) = -i \frac{z + i}{z - i}$$

είναι ισομετρία. Η  $C$  λέγεται μετασχηματισμός του Cayley.

(β) Να αποδειχθεί ότι αν  $a, b \in \mathbb{C}$  και  $|a|^2 - |b|^2 = 1$ , τότε η

$$h(z) = \frac{az + b}{bz + \bar{a}}$$

είναι ισομετρία του  $\mathbb{D}^2$ .

(γ) Ποιές είναι οι γεωδαισιακές στον  $\mathbb{D}^2$ ;

6. Εστω  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$  η λεία καμπύλη  $\gamma(t) = (t, 1)$ . Να ευρεθεί το παράλληλο διανυσματικό πεδίο  $X$  κατά μήκος της  $\gamma$  με  $X(0) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\gamma(0)}$ . Σχεδιάστε το  $X$  στο διάστημα  $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$ .

7. Εστω  $M, N$  δύο συνεκτικές πολλαπλότητες Riemann.

(α) Εστω  $p \in M, q \in N$  και  $T : T_p M \rightarrow T_q N$  μία ισομετρία. Αν υπάρχει μία ισομετρία  $h : M \rightarrow N$  ώστε  $h(p) = q$  και  $h_* p = T$ , Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν κανονικές περιοχές  $V$  του  $p$  και  $W$  του  $q$ , ώστε  $h(V) = W$  και  $h|_V = \exp_q \circ T \circ \exp_p^{-1}$ .

(β) Να αποδειχθεί ότι αν  $g, h : M \rightarrow N$  είναι δύο ισομετρίες για τις οποίες υπάρχει  $p \in M$  ώστε  $g(p) = h(p)$  και  $g_* p = h_* p$ , τότε  $g = h$ .

8. Εστω  $n \geq 1$  και  $\pi : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ , η γενικευμένη απεικόνιση Hopf. Αν για κάθε  $\lambda \in S^1$  θεωρήσουμε την  $g_\lambda : S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}$  με  $g_\lambda(z) = \lambda z$ , τότε η  $g_\lambda$  είναι ισομετρία της  $S^{2n+1}$  και ο  $\mathbb{C}P^n$  είναι ο χώρος των τροχιών της δράσης της ομάδας  $\{g_\lambda : \lambda \in S^1\} \cong S^1$  επί της  $S^{2n+1}$ . Για κάθε  $[z] \in \mathbb{C}P^n$ , το  $\pi^{-1}([z])$  είναι ο κύκλος, που παραμετρίζεται από την λεία καμπύλη  $\gamma(t) = e^{it}z, t \in \mathbb{R}$ .

(α) Αν  $V_z$  είναι η (πραγματική) ευθεία που παράγεται από την ταχύτητα  $\dot{\gamma}(0)$  και  $H_z = \{v \in T_z S^{2n+1} : v \perp \dot{\gamma}(0)\}$ , να αποδειχθεί ότι  $(g_{e^{it}})_* z (V_z) = V_{e^{it}z}$  και  $(g_{e^{it}})_* z (H_z) = H_{e^{it}z}$ .

(β) Να αποδειχθεί ότι η  $\pi_* z |_{H_z} : H_z \rightarrow T_{[z]} \mathbb{C}P^n$  είναι γραμμικός ισομορφισμός.

(γ) Να αποδειχθεί ότι το εσωτερικό γινόμενο στον  $T_{[z]} \mathbb{C}P^n$ , που ορίζεται από την ισότητα

$$\langle v, w \rangle = \langle (\pi_* z |_{H_z})^{-1}(v), (\pi_* z |_{H_z})^{-1}(w) \rangle, \quad v, w \in T_{[z]} \mathbb{C}P^n$$

δεν εξαρτάται από τον αντιπρόσωπο  $z$  του σημείου  $[z] \in \mathbb{C}P^n$ . Η μετρική Riemann που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο στον  $\mathbb{C}P^n$  οφείλεται στους Fubini και Study.

(δ) Να αποδειχθεί ότι ο  $\mathbb{C}P^n$  με την μετρική Fubini-Study είναι ομογενής πολλαπλότητα Riemann.

9. Εστω  $M$  μία πολλαπλότητα Riemann και  $G$  ένα μη-κενό σύνολο ισομετριών της. Εστω  $F = \{p \in M : g(p) = p \text{ για κάθε } g \in G\}$ . Να αποδειχθεί ότι το  $F$  είναι κανονική υποπολλαπλότητα της  $M$ .

(Υπόδειξη: Θεωρείστε για κάθε  $p \in F$  τον γραμμικό υπόχωρο  $V = \{v \in T_p M : g_* p (v) = v \text{ για κάθε } g \in G\}$  του  $T_p M$  και δείξτε ότι  $\exp_p(U \cap V) = F \cap \exp_p(U)$ , για μια κατάλληλη ανοιχτή περιοχή  $U$  του  $0 \in T_p M$ .)

## Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλότητας 10

1. Εστω  $M$  μία πολλαπλότητα Riemann με ομάδα ισομετριών  $I(M)$ . Για κάθε γνήσια ασυνεγή υποομάδα  $G$  της  $I(M)$  να αποδειχθεί ότι η  $M/G$  γίνεται πολλαπλότητα Riemann, αν είναι Hausdorff, και η απεικόνιση πηλίκο  $p : M \rightarrow M/G$  τοπική ισομετρία. Αν η  $M$  είναι πλήρης, να αποδειχθεί ότι και η  $M/G$  είναι πλήρης. Για παράδειγμα, ο  $n$ -torus  $T^n$  δέχεται με αυτόν τον τρόπο μία μετρική Riemann μηδενικής καμπυλότητας, ενώ ο πραγματικός προβολικός χώρος  $\mathbb{R}P^n$  μία μετρική Riemann με σταθερή καμπυλότητα τομής 1. Ποιές είναι οι γεωδαισιακές στον  $T^2$  και ποιές στο  $\mathbb{R}P^2$ ;

2. Να αποδειχθεί ότι κάθε ομογενής πολλαπλότητα Riemann είναι πλήρης.

3. Να αποδειχθεί ότι κάθε συνεκτική, ισοτροπική (σε κάθε σημείο) και πλήρης πολλαπλότητα Riemann είναι ομογενής.

4. Εστω  $M$  μία συνεκτική, μη-συμπαγής, πλήρης πολλαπλότητα Riemann με απόσταση Riemann  $d$ . Να αποδειχθεί ότι για κάθε  $p \in M$  υπάρχει μια γεωδαισιακή  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  με  $\gamma(0) = p$  και  $d(p, \gamma(t)) = t$  για κάθε  $t \geq 0$ .

5. Εστω  $M$  μία συνεκτική, πλήρης πολλαπλότητα Riemann και έστω  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  μια κλειστή γεωδαισιακή, δηλαδή η  $\gamma$  είναι περιοδική, που σημαίνει ότι το  $K = \gamma(\mathbb{R})$  είναι μια απλή κλειστή καμπύλη. Εστω  $x \in M \setminus K$  και  $a = d(x, K)$ , όπου  $d$  είναι η απόσταση Riemann. Όπως είναι γνωστό υπάρχει  $y \in K$  ώστε  $d(x, K) = d(x, y)$ . Λόγω της πληρότητας, υπάρχει μια ελάχιστη γεωδαισιακή  $c : [0, a] \rightarrow M$ , παραμετρισμένη με το μήκος της, ώστε  $c(0) = x$ ,  $c(a) = y$ ,  $d(x, y) = L(c) = a$ .

(α) Να αποδειχθεί ότι  $d(c(t), K) = d(c(t), y)$  για κάθε  $0 \leq t \leq a$ .

(β) Να αποδειχθεί ότι αν  $y = \gamma(s)$ , τότε τα διανύσματα  $\dot{\gamma}(s)$  και  $\dot{c}(a)$  είναι κάθετα.

6. Εστω  $M$  μία πλήρης πολλαπλότητα Riemann και  $X \in \mathcal{X}(M)$ . Αν υπάρχει  $c > 0$  ώστε  $\|X(p)\| \leq c$  για κάθε  $p \in M$ , να αποδειχθεί ότι το  $X$  είναι πλήρες.

7. Εστω  $M$  και  $N$  δύο πολλαπλότητες Riemann και  $h : M \rightarrow N$  μια αμφιδιαφόριση για την οποία υπάρχει  $c > 0$  ώστε  $c\|h_{*p}(v)\| \leq \|v\|$  για κάθε  $v \in T_pM$  και  $p \in M$ . Αν η  $N$  είναι πλήρης, να αποδειχθεί ότι και η  $M$  είναι πλήρης.

8. Εστω  $M$  μία συνεκτική, πλήρης,  $n$ -πολλαπλότητα Riemann,  $N$  μία  $n$ -πολλαπλότητα Riemann και  $f : M \rightarrow N$  μια λεία, επί, απεικόνιση, ώστε

$$\|v\| \leq \|f_{*p}(v)\|$$

για κάθε  $v \in T_pM$  και  $p \in M$ . Να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι απεικόνιση επικάλυψης.

## Ασκήσεις θεωρίας πολλαπλοτήτων 11

1. Εστω  $M$  μία πολλαπλότητα Riemann και  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  μια γεωδαισιακή παραμετρισμένη με το μήκος της. Εστω  $X \in \mathcal{X}(M)$  και  $\phi$  η ροή του.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει  $T > 0$  ώστε η  $\phi$  να ορίζεται τουλάχιστον στο  $[-T, T] \times \gamma([0, l])$ .

(β) Εστω  $\Gamma : [0, T] \times [0, l] \rightarrow M$  η λεία μεταβολή της  $\gamma$  με τύπο  $\Gamma(s, t) = \phi_s(\gamma(t))$ . Αν  $\Gamma_T = \Gamma(T, \cdot)$  και  $L(\gamma)$ ,  $L(\Gamma_T)$  είναι τα μήκη των  $\gamma$ ,  $\Gamma_T$ , αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι

$$|L(\Gamma_T) - L(\gamma)| \leq \int_0^T \int_0^l \|\nabla_{\frac{\partial \Gamma}{\partial t}} X\| ds dt.$$

2. Εστω  $M$  μία 2-πολλαπλότητα Riemann και  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  μια γεωδαισιακή παραμετρισμένη με το μήκος της. Εστω  $X$  ένα λείο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της  $\gamma$  με  $\langle X, \dot{\gamma} \rangle = 0$  και  $\|X\| = 1$  στο  $[0, l]$ .

(α) Να αποδειχθεί ότι το  $X$  είναι παράλληλο κατά μήκος της  $\gamma$ .

(β) Εστω  $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  μια λεία συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι το  $fX$  είναι πεδίο Jacobi κατά μήκος της  $\gamma$  τότε και μόνον τότε όταν  $f''(t) + K(\gamma(t))f(t) = 0$  για κάθε  $0 \leq t \leq l$ , όπου  $K$  είναι η καμπυλότητα τομής της  $M$ .

3. Εστω  $M$  μία πολλαπλότητα Riemann με τανυστή καμπυλότητας  $R$ . Εστω  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$  με  $\|v\| = 1$  και  $\gamma$  η γεωδαισιακή με  $\gamma(0) = p$ ,  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Εστω  $u, w \in T_p M$  και  $Y, Z$  τα διανυσματικά πεδία Jacobi κατά μήκος της  $\gamma$  με  $Y(0) = Z(0) = 0$  και

$$\frac{DY}{dt}(0) = u, \quad \frac{DZ}{dt}(0) = w.$$

Να αποδειχθεί ότι αν το  $t$  είναι αρκετά κοντά στο 0, τότε

$$\langle Y(t), Z(t) \rangle = t^2 \langle u, w \rangle - \frac{1}{3} \langle R(u, v)v, w \rangle t^4 + o(t^5)$$

όπου  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t^5)}{t^4} = 0$ .

(Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε του θεώρημα του Taylor για την συνάρτηση  $f(t) = \langle Y(t), Z(t) \rangle$ . Τότε  $f(0) = f'(0) = 0$ ,  $f''(0) = 2\langle u, w \rangle$ ,  $f^{(3)}(0) = 0$  και  $f^{(4)}(0) = 8\langle R(u, v)v, w \rangle$ . Για το τελευταίο θα χρειαστεί να αποδειχθεί ο τύπος

$$\frac{DR(Y, \dot{\gamma})\dot{\gamma}}{dt}(0) = R\left(\frac{DY}{dt}(0), \dot{\gamma}(0)\right)\dot{\gamma}(0) = R(u, v)v.$$

4. Εστω  $M$  μία πολλαπλότητα Riemann με καμπυλότητα τομής  $K$ . Εστω  $p \in M$ ,  $u, v \in T_p M$  με  $\|u\| = \|v\| = 1$  και  $\langle u, v \rangle = 0$ . Αν  $\gamma$  είναι η γεωδαισιακή με  $\gamma(0) = p$ ,  $\dot{\gamma}(0) = v$ , να αποδειχθεί ότι υπάρχει  $\epsilon > 0$  ώστε για  $|t| < \epsilon$  το διανυσματικό πεδίο Jacobi κατά μήκος της  $\gamma$  με αρχικές συνθήκες

$$Y(0) = 0, \quad \frac{DY}{dt}(0) = u$$

ικανοποιεί τις ισότητες

$$(\alpha) \|Y(t)\|^2 = t^2 - \frac{1}{3}K_p(\sigma)t^4 + o(t^5),$$

$$(\beta) \|Y(t)\| = t - \frac{1}{6}K_p(\sigma)t^3 + o(t^4),$$

όπου  $\sigma$  είναι το επίπεδο στον  $T_pM$  με βάση  $\{v, u\}$ .

5. Εστω  $M$  μία πλήρης πολλαπλότητα Riemann με μηδενική καμπυλότητα. Να αποδειχθεί ότι για κάθε  $p \in M$  υπάρχει  $\epsilon > 0$  ώστε η  $\exp_p : S(0, \epsilon) \rightarrow S(p, \epsilon)$  να είναι ισομετρία.

6. Στο παραβολοειδές  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$  θεωρούμε την επαγόμενη μετρική Riemann από το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο του  $\mathbb{R}^3$ .

(α) Δείξτε ότι η καμπυλότητα τομής του παραβολοειδούς δίνεται από τον τύπο

$$K(x, y, z) = \frac{4}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^2}$$

και συνεπώς  $\inf\{K(x, y, z) : (x, y, z) \in M\} = 0$ .

(β) Να αποδειχθεί ότι η  $M$  είναι πλήρης.

(γ) Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν συζυγή προς το  $(0, 0, 0)$  σημεία, δηλαδή το  $(0, 0, 0)$  είναι πόλος.