ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΡΓΑΣΙΩΝ

ΘΕΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ

Α. Γενικεύσεις της θεωρίας Poincaré-Bendixson.
Εργασίες: 1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 13, 14, 19.

Β. Ευσταθείς και ασταθείς ελκυστές.
Εργασίες: 4, 16, 17, 20.

Γ. Αριθμοί στροφής, ασυμπτωτικοί κύκλοι και εφαρμογές.
Εργασίες: 6, 9, 11, 12, 15, 22.

Δ. Ομοιομορφισμοί της σφαίρας.
Εργασία: 18.

Ε. Υπολογιστική Γεωμετρία.
Εργασία: 21.

ΣΤ. Εργοδική Θεωρία.
Εργασία: 23

---

1. Η εργασία D^+-stable dynamical systems on 2-manifolds, *Math. Z.* 196 (1987), 453-462 αποτελεί το κύριο μέρος της διδακτορικής διατριβής και ο προβληματισμός της αποτελείται από την σύνθεση των παρακάτω ερωτημάτων:

- Ποιές κλάσεις ροών σ' έναν χώρο X βοηθούν στην μελέτη της δομής του;
- Ποιά είναι η συμπεριφορά των τροχιών αυτών των ροών;
- Πόσο επηρεάζει ο βαθμός διαφορισιμότητας της ροής την συμπεριφορά των τροχιών;

Η απάντηση στο δεύτερο ερώτημα έχει αυτόνομο ενδιαφέρον στην ποιοτική θεωρία των δυναμικών συστημάτων (Δ.Σ.) και χρησιμοποιείται για την καλύτερη κατανόηση της δομής του X. Η σημασία του τρίτου ερωτήματος έγκειται στο γεγονός οτι ο βαθμός διαφορισιμότητας ενός Δ.Σ. σε μια 2-πολλαπλότητα X καθορίζει τη δομή των συμπαγών ελαχίστων συνόλων στην X που αποτελούν τους δομικούς λίθους του Δ.Σ. Ενα σύνολο λέγεται *ελάχιστο* όταν είναι μη-κενό, κλειστό, αμετάβλητο και δεν έχει γνήσια υποσύνολα με αυτές τις ιδιότητες.

Στην υπόψη εργασία επελέγη η κλάση των D^+-ευσταθών Δ.Σ. Ενα Δ.Σ. σε έναν χώρο X λέγεται D^+-*ευσταθές* όταν $L^+(x) = J^+(x)$ για κάθε $x \in X$, όπου

$$L^+(x) = \{y \in X : t_n x \to y \text{ για κάποια } t_n \to +\infty\} \text{ και}$$

$$J^+(x) = \{y \in X : t_n x_n \to y \text{ για κάποια } x_n \to x, t_n \to +\infty\}$$

είναι το *θετικό οριακό σύνολο* και το *επεκταμένο θετικό οριακό σύνολο* του x αντίστοιχα. Τα τρία παραπάνω ερωτήματα απαντήθηκαν πλήρως για D^+-ευσταθή Δ.Σ. σε 2-πολλαπλότητες.

Συγκεκριμένα, όσο αφορά το πρώτο ερώτημα αποδείχθηκαν τα επόμενα:

(α) Υπάρχουν μόνον επτά 2-πολλαπλότητες που δέχονται D^+-ευσταθή Δ.Σ. που έχουν τουλάχιστον μια περιοδική τροχιά και είναι το επίπεδο $\mathbb{R}^2$, η σφαίρα S^2, ο κύλινδρος $\mathbb{R} \times S^1$, η σπείρα $S^1 \times S^1$, το προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$, η ανοιχτή ταινία του Möbious M^2 και η φιάλη του Klein K^2.

(β) Υπάρχουν μόνον τέσσερεις συμπαγείς 2-πολλαπλότητες που δέχονται (μη-τετριμένα) D^+-ευσταθή Δ.Σ. και είναι οι S^2, $S^1 \times S^1$, $\mathbb{R}P^2$ και K^2.

(γ) Κάθε μη-συμπαγής 2-πολλαπλότητα δέχεται ένα (μη-τετριμένο) D^+-ευσταθές Δ.Σ. χωρίς περιοδικές τροχιές.

Η απάντηση στο δεύτερο ερώτημα είναι πλήρης και περιέχεται στις παραγράφους 3 και 4 της εργασίας. Σε σχέση με το τρίτο ερώτημα αποδείχθηκε οτι κάθε (συνεχές) D^+-ευσταθές Δ.Σ. σε μια 2-πολλαπλότητα είναι τοπολογικά ισοδύναμο μ' ένα C^∞ D^+-ευσταθές Δ.Σ..

2. Η εργασία On minimal sets in 2-manifolds, *J. reine angew. Math.* 388 (1988), 206-211, με τον Π. Στράντζαλο, αποτέλεσε το πρώτο βήμα για την περιγραφή της ροής γύρω από ένα μη-τετριμένο συμπαγές ελάχιστο σύνολο ενός (όχι κατ' ανάγκη διαφορίσιμου) Δ.Σ. σε μια 2-πολλαπλότητα. Ενα ελάχιστο σύνολο λέγεται *τετριμένο*, αν αποτελείται μόνον από μια τροχιά ή είναι ομοιομορφικό μέ την σπείρα. Το βασικό αποτέλεσμα της εργασίας είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα. *Ενα μη-τετριμένο συμπαγές ελάχιστο σύνολο ενός Δ.Σ. σε μια 2-πολλαπλότητα είναι αδύνατον να είναι θετικά (ή αρνητικά) ευσταθές ή σαγματικού τύπου σύνολο.*

Η απόδειξη γίνεται με την βοήθεια δύο κατασκευών που ανάγουν την μελέτη Δ.Σ. σε εν γένει μη-συμπαγείς 2-πολλαπλότητες στην μελέτη σχετικά απλών Δ.Σ. σε συμπαγείς 2-πολλαπλότητες. Οπως είναι γνωστό μη-τετριμένα συμπαγή ελάχιστα σύνολα εμφανίζονται στην διάσταση 2 μόνον όταν το Δ.Σ. είναι το πολύ C^1, ενώ σε πολλαπλότητες με διάσταση ≥ 3 εμφανίζονται ακόμα και όταν το Δ.Σ. είναι C^∞ (Πρβλ. R. J. Knill, A C^∞ flow on S^3 with a Denjoy minimal set, *J. Differential Geometry* 16 (1981), 271-280).

Ας σημειωθεί οτι αναφορά στην υπόψη εργασία γίνεται στην σελίδα 40 του βιβλίου J. de Vries, *Elements of Topological Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1993.

3. Στην εργασία The flow near nontrivial minimal sets on 2-manifolds, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 108 (1990), 569-573, περιγράφεται η ροή γύρω από ένα μη-τετριμένο συμπαγές ελάχιστο σύνολο A ενός Δ.Σ. σε μια 2-πολλαπλότητα. Στο βασικό αποτέλεσμα της εργασίας αποδεικνύεται οτι:

(α) Υπάρχει μια συνεκτική, ανοιχτή και αμετάβλητη περιοχή E του A, τέτοια ώστε το περιορισμένο Δ.Σ. στο $E \setminus A$ είναι πλήρως ασταθές, δηλαδή $x \notin J^+(x)$ για κάθε $x \in E \setminus A$.

(β) Κάθε τροχιά στο $E \setminus A$ τείνει θετικά ή αρνητικά στο A.

(γ) Κάθε συνεκτική συνιστώσα του $E \setminus A$ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο x του οποίου η τροχιά τείνει θετικά και αρνητικά στο A, δηλαδή $L^+(x) = L^-(x) = A$.

(δ) Το σύνορο του E δεν περιέχει μη-τετριμένα συμπαγή ελάχιστα σύνολα.

(ε) Αν επιπλέον η πολλαπλότητα είναι προσανατολίσιμη και συμπαγής, τότε το σύνορο του E δεν περιέχει περιοδικές τροχιές.

Η περιγραφή αυτή οδηγεί σ' έναν χαρακτηρισμό των ροών του Denjoy. Μια ροή του Denjoy είναι ένα Δ.Σ. στην σπείρα που είναι ανάρτηση ενός ομοιομορφισμού του μοναδιαίου κύκλου S^1 στον εαυτό του που διατηρεί τον προσανατολισμό και αφήνει αμετάβλητο ένα σύνολο Cantor. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται οτι:

Θεώρημα. *Ενα Δ.Σ. σε μια συμπαγή και προσανατολίσιμη 2-πολλαπλότητα είναι τοπολογικά ισοδύναμο με μια ροή του Denjoy τότε και μόνον τότε όταν υπάρχει ένα τουλάχιστον* *μη-τετριμένο ελάχιστο σύνολο και δεν υπάρχουν σταθερά σημεία σαγματικού τύπου.*

Πρόκειται δηλαδή για έναν ολικό χαρακτηρισμό ενός Δ.Σ. μέσω ιδιοτήτων που αφορούν την συμπεριφορά ελαχιστων συνόλων.

4. Στην ίδια κατεύθυνση αλλά με διαφορετικά μέσα δίνεται ένας χαρακτηρισμός των ροών του Denjoy στην εργασία A characterization of Denjoy flows, *Bull. London Math. Soc.* 24 (1992), 83-86, μέσω ιδιοτήτων συμμετρίας των οριακών συνόλων στην περιοχή της κλειστότητας μιας γνήσια Poisson ευσταθούς τροχιάς. Η τροχιά ενός σημείου x λέγεται *γνήσια Poisson ευσταθής* όταν $x \in L^+(x) \cap L^-(x)$ και το x δεν είναι περιοδικό ή σταθερό σημείο. Το κύριο αποτέλεσμα της εργασίας είναι:

Θεώρημα. *Ενα Δ.Σ. σε μια συμπαγή 2-πολλαπλότητα M είναι τοπολογικά ισοδύναμο με μια ροή του Denjoy ή μια άρρητη ροή τότε και μόνον τότε όταν υπάρχει μια γνήσια Poisson ευσταθής τροχιά $C(x)$ και μια ανοιχτή περιοχή V του $\overline{C(x)}$ ώστε $L^+(y) = L^-(y)$ για κάθε $y \in V$.*

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο γένος της πολλαπλότητας. Για την απόδειξη του επαγωγικού βήματος χρησιμοποιείται μια μέθοδος τομής και συρραφής υποσυνόλων της πολλαπλότητας που προκύπτουν από την ροή. Το αποτέλεσμα αναφέρεται στην σελίδα 14, ως Theorem 1.3.2, του βιβλίου των Igor Nikolaev και Evgeny Zhuzhoma, *Flows on 2-dimensional Manifolds*, Lecture Notes in Math. 1705, Springer-Verlag, 1999.

5. Στην εργασία Cohomology and asymptotic stability of 1-dimensional continua, *Manuscripta Math.* 72 (1991), 415-423, μελετώνται Δ.Σ. σε μονοδιάστατους συμπαγείς συνεκτικούς μετρικοποιήσιμους χώρους. Τα μη-τετριμένα συμπαγή ελάχιστα σύνολα σε 2-πολλαπλότητες είναι τέτοιοι χώροι, όπως επίσης και κάθε μονοδιάστατο συμπαγές ελάχιστο σύνολο ενός Δ.Σ. σε μια πολλαπλότητα με διάσταση μεγαλύτερη του 2. Ας σημειωθεί ότι η δομή μιά ροής μέσα σ' ένα μονοδιάστατο συμπαγές ελάχιστο σύνολο ενός Δ.Σ. σε μια πολλαπλότητα διάστασης μεγαλύτερης του 2 εν γένει διαφέρει από αυτή των συμπαγών ελαχίστων συνόλων σε 2-πολλαπλότητες. Στην εργασία αποδεικνύεται το επόμενο κριτήριο περιοδικότητας ενός μονοδιάστατου συμπαγούς, συνεκτικού, μετρικοποιήσιμου χώρου μεσω της κατά Cech συνομολογίας $\check{H}^*$.

Θεώρημα. *Ενας μονοδιάστατος συμπαγής, συνεκτικός, μετρικοποιήσιμος χώρος X ο οποίος δέχεται ένα Δ.Σ. χωρίς σταθερά σημεία είναι ομοιομορφικός με τον μοναδιαίο κύκλο S^1 τότε και μόνον τότε όταν $\check{H}^1(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.*

Από αυτό προκύπτει το ακόλουθο κριτήριο περιοδικότητας τύπου Poincaré-Bendixson για μονοδιάστατα σύνολα σε τοπικά συμπαγή ANR.

Θεώρημα. *Εστω X ένα τοπικά συμπαγές ANR και $A \subset X$ ένα μονοδιάστατο συμπαγές συνεκτικό και αμετάβλητο σύνολο ενός Δ.Σ. στον X. Αν το A είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και δεν περιέχει σταθερά σημεία του Δ.Σ., τότε το A είναι μια περιοδική τροχιά.*

Κάθε τοπολογική πολλαπλότητα με πεπερασμένη διάσταση είναι ένα τοπικά συμπαγές ANR. Συνεπώς το αποτέλεσμα εφαρμόζεται άμεσα στην ποιοτική ανάλυση των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων σε διαφορίσιμες πολλαπλότητες.

6. Η εργασία Some aspects of the theory of asymptotic cycles, *Expositiones Math.* 13 (1995), 321-336, δεν περιέχει καινούργια αποτελέσματα, αλλά αποτελεί επεξεργασμένη και σχετικά απλοποιημένη απόδοση της θεωρίας των ασυμπτωτικών κύκλων με ιδιαίτερο ενδιαφέρον στούς ασυμπτωτικούς κύκλους των αναρτήσεων και των μονοδιάστατων συμπαγών ελαχίστων συνόλων. Συγκεκριμένα, υπολογίζονται λεπτομερώς και με σχετική απλότητα οι τιμές των ασυμπτωτικών κύκλων μιας ανάρτησης για κάθε αναλλοίωτο μέτρο. Επίσης αποδεικνύεται οτι μέσω των ασυμπτωτικών κύκλων αποκαθίσταται ένας ομοιομορφισμός που διατηρεί ευθείες μεταξύ του συνόλου των αναλλοίωτων μέτρων ενός μονοδιάστατου συμπαγούς ελαχίστου συνόλου X και του συνόλου των φάσεων της πρώτης ομάδας συνομολογίας Cech με ακέραιους συντελεστές $\check{H}^1(X;\mathbb{Z})$ του X ως προς τις ασθενείς τοπολογίες. Στο τέλος της εργασίας αποδεικνύεται το θεώρημα του S. Schwartzman για την ύπαρξη ολικής τομής για ένα δυναμικό σύστημα σε έναν συμπαγή μετρικοποιήσιμο χώρο.

7. Στην εργασία Minimal flows on multipunctured surfaces of infinite type, *Bull. London Math. Soc.* 27 (1995), 595-598, με τον Α. Μανούσο, μελετώνται ελάχιστα Δ.Σ. σε 2-πολλαπλότητες του τύπου $M \setminus F$, όπου η M είναι μια συμπαγής 2-πολλαπλότητα και $F \subset M$ ένα μη-κενό, ολικά-μη-συνεκτικό, κλειστό σύνολο, που λέγεται *σύνολο περάτων*. Παραδείγματα τέτοιων Δ.Σ. με πεπερασμένο σύνολο περάτων ήταν γνωστά από παλιά. Στο βασικό αποτέλεσμα της εργασίας αποδεικνύεται οτι κάθε τέτοιο Δ.Σ. με άπειρο σύνολο περάτων μπορεί να κατασκευαστεί από ένα με πεπέρασμένο, με τον τρόπο που περιγράφεται στο ακόλουθο:

Θεώρημα. *Εστω $M \setminus F$ μια διάτρητη επιφάνεια με άπειρο σύνολο περάτων F που φέρει ένα ελάχιστο Δ.Σ. Τότε υπάρχουν ένα πεπερασμένο σύνολο $K \subset F$, ένα C^∞ διανυσματικό πεδίο ξ στο $M \setminus K$ με ελάχιστη ροή και μια C^∞ συνάρτηση $f : M \setminus K \to [0,1]$ με $f^{-1}(0) = F \setminus K$ ώστε το επεκταμένο Δ.Σ. στην M είναι τοπολογικά ισοδύναμο με την επέκταση της ροής του $f\xi$ στην M, άρα και στο $M \setminus F$.*

Ειδικά κάθε ελάχιστο Δ.Σ. σε μια διάτρητη σπείρα $S^1 \times S^1 \setminus F$ είναι τοπολογικά ισοδύναμο με τον περιορισμό στο $S^1 \times S^1 \setminus F$ της ροής του γινομένου μιας C^∞ συνάρτησης $f : S^1 \times S^1 \to [0,1]$ με $f^{-1}(0) = F$ μ' ένα άρρητο διανυσματικό πεδίο. Το παραπάνω θεώρημα ξαναποδείχθηκε με άλλη μέθοδο στην διδακτορική διατριβή J-C. Beniere, *Feuilletages minimaux sur les surfaces non compactes*, Universite Claude Bernard-Lyon 1, Numero d' ordre 015-98, 1998. Επιβλέπων καθηγητής ήταν ο G. Hector.

8. Στην εργασία One-dimensional chain recurrent sets of flows in the 2-sphere, *Math. Z.* 223 (1996), 643-649, γενικεύεται η κλασική θεωρία Poincaré-Bendixson, περί της δομής των οριακών συνόλων Δ.Σ. στην S^2, στην κλάση των μονοδιάστατων συμπαγών, συνεκτικών, αμεταβλήτων και αλυσωτά επαναφερομένων συνόλων. Είναι γνωστό οτι, κάθε θετικό (ή αρνητικό) οριακό σύνολο ενός Δ.Σ. στην S^2 είναι μια περιοδική τροχιά, αν δεν περιέχει σταθερά σημεία του Δ.Σ. Στην υπόψη εργασία αποδεικνύεται οτι το ίδιο ισχύει και στην ευρύτερη κλάση που προαναφέρθηκε.

Θεώρημα. *Αν ένα μονοδιάστατο συμπαγές, συνεκτικό, αμετάβλητο, αλυσωτά επαναφερόμενο σύνολο ενός Δ.Σ. στην S^2 δεν περιέχει σταθερά σημεία, τότε είναι μια περιοδική τροχιά.*

Το αποτέλεσμα αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία στην μελέτη Δ.Σ. με υπολογιστές, γιατί στην οθόνη του υπολογιστή μπορούν να παρασταθούν μόνο ψευδοτροχιές λόγω της στρογγύλευσης που κάνει η μηχανή. Στην πορεία προς το θεώρημα αποδεικνύεται οτι τα οριακά σύνολα της τροχιάς ενός μη-περιοδικού αλυσωτά επαναφερώμενου σημείου μιάς ροής στην 2-σφαίρα αποτελούνται από σταθερά σημεία. Το αποτέλεσμα αυτό επεκτείνει μια γνωστή ιδιότητα των τροχιών που περιέχονται σε οριακά σύνολα.

Οσο αφορά την τοπολογική δομή, είναι γνωστό οτι όπως συμβαίνει και με τα οριακά σύνολα, κάθε μονοδιάστατο συμπαγές, συνεκτικό, αμετάβλητο και αλυσωτά επαναφερόμενο σύνολο ενός Δ.Σ. στην S^2 διαχωρίζει την S^2 (Πρβλ. M. W. Hirsch and C. C. Pugh, Cohomology of chain recurrent sets, *Ergodic Th. Dynamical Sys.* 8 (1988), 73-80). Σε αντίθεση όμως με τα οριακά σύνολα ένα τέτοιο σύνολο μπορεί να μην είναι τοπικά τόξο στα μη-σταθερά του σημεία. Οπως αποδεικνύεται στην εργασία, οι επιπλέον υποθέσεις που απαιτούνται για να ισχύει αυτό είναι η μεγιστικότητα και η ύπαρξη το πολύ πεπερασμένου πλήθους σταθερών σημείων. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται το ακόλουθο:

Θεώρημα. *Κάθε μονοδιάστατη αλυσωτή συνιστώσα ενός Δ.Σ. στην S^2 με πεπερασμένο πλήθος σταθερών σημείων αποτελείται από πεπερασμένες μόνον το πλήθος τροχιές και είναι ομοιομορφική με ένα πεπερασμένο γράφημα του οποίου οι κορυφές είναι τα σταθερά σημεία που περιέχονται σ' αυτήν.*

Οπως αποδεικνύεται μ' ένα παράδειγμα, η υπόθεση για πεπερασμένα σταθερά σημεία δεν μπορεί να παραληφθεί. Μια κάπως συντομότερη απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος, βασισμένη στην ίδια γεωμετρική ιδέα, δόθηκε στην εργασία P. Oprocha, Structure of one-dimensional chain-recurrent sets of flows on the 2-sphere and on the plane, *Univ. Iagel. Acta Math.* 42 (2004), 171-183.

9. Στην εργασία Flows with cyclic winding numbers groups, *J. reine angew. Math.* 481 (1996), 207-215, αντιμετωπίζεται το πρόβλημα της ύπαρξης περιοδικών τροχιών για ροές, σε σχέση με την συμπεριφορά των εικόνων των ασυμπτωτικών κύκλων. Η εικόνα W_μ του ασυμπτωτικού κύκλου ως προς το αναλλοίωτο μέτρο μ λέγεται *ομάδα των αριθμών στροφής* του μ και είναι υποομάδα του $\mathbb{R}$. Στην εργασία δίνεται πλήρης απάντηση στο ακόλουθο ερώτημα:

- Η ύπαρξη ενός αναλλοίωτου μέτρου μ τέτοιου ώστε $W_\mu \cong \mathbb{Z}$ εγγυάται την ύπαρξη περιοδικής τροχιάς;

Συγκεκριμένα αποδεικνύεται με παραδείγματα οτι για κάθε $n \geq 3$ υπάρχει ένα C^∞ διανυσματικό πεδίο σε μια συμπαγή προσανατολίσιμη n-πολλαπλότητα χωρίς σταθερά σημεία και περιοδικές τροχιές που έχει ένα αναλλοίωτο μέτρο μ για το οποίο $W_\mu \cong \mathbb{Z}$. Αντίθετα για χώρους με μικρή διάσταση αποδεικνύονται τα ακόλουθα:

Θεώρημα. *Εστω X ένα μονοδιάστατο συνεχές που φέρει μια ροή. Αν μ είναι ένα αναλλοίωτο μέτρο ώστε $W_\mu \cong \mathbb{Z}$, τότε κάθε σημείο στον φορέα του μ είναι είτε περιοδικό είτε το θετικό και το αρνητικό οριακό του σύνολο αποτελούνται από σταθερά σημεία.*

Θεώρημα. *Εστω M μια συμπαγής, προσανατολίσιμη 2-πολλαπλότητα που φέρει μια ροή και μ ένα αναλλοίωτο μέτρο. Αν $W_\mu \cong \mathbb{Z}$, τότε κάθε σημείο στον φορέα του μ είναι είτε περιοδικό είτε το θετικό και το αρνητικό οριακό του σύνολο περιέχουν σταθερά σημεία.*

Το δεύτερο Θεώρημα προκύπτει από μια πρόταση για την δομή των ελαχίστων συνόλων που περιέχονται στον φορέα του μ. Απο τα δύο αυτά θεωρήματα έχουμε το ακόλουθο:

Πόρισμα. *Για κάθε ροή χωρίς σταθερά σημεία σε ένα μονοδιάστατο συνεχές ή στην σπείρα τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) Υπάρχει μια τουλάχιστον περιοδική τροχιά.

(β) Υπάρχει ένα αναλλοίωτο μέτρο μ με $W_\mu \cong \mathbb{Z}$.

10. Αντικείμενο μελέτης στην εργασία A class of flows on 2-manifolds with simple recurrence, *Comment. Math. Helvetici.* 72 (1997), 618-635, με τους Θ. Πετρέσκου και Π. Στράντζαλο, είναι η κλάση των D-ευσταθών ροών (που είναι γνωστές και ως ροές χαρακτηριστικής 0) σε προσανατολίσιμες 2-πολλαπλότητες πεπερασμένου γένους, όχι κατ΄ ανάγκη συμπαγείς. Δίνονται απαντήσεις στα παρακάτω ερωτήματα:

- Ποιές προσανατολίσιμες 2-πολλαπλότητες πεπερασμένου γένους δέχονται D-ευσταθείς ροές.

- Ποιά είναι η συμπεριφορά των τροχιών αυτών των ροών.

Για το πρώτο ερώτημα αποδεικνύεται ότι αν μια προσανατολίσιμη 2-πολλαπλότητα πεπερασμένου γένους δέχεται μια μη-ελάχιστη D-ευσταθή ροή, τότε έχει γένος 0 ή 1. Δηλαδή, ειναι ομοιομορφική με το συμπλήρωμα ενός ολικά μη συνεκτικού κλειστού συνόλου στην 2-σφαίρα ή στην σπείρα, αντίστοιχα. Μάλιστα αν δέχεται τέτοια ροή με τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο, τότε έχει γένος 0. Οι ελάχιστες ροές σε 2-πολλαπλότητες πεπερασμένου γένους μελετήθηκαν στην εργασία 7.

Η απάντηση στο δεύτερο ερώτημα είναι δύσκολο να διατυπωθεί στην μορφή θεωρήματος, λόγω του μεγάλου (υπεραριθμήσιμου) πλήθους των περιπτώσεων που παρουσιάζονται. Τα αποτελέσματα της εργασίας δίνουν παρόλα αυτά μια σχετικά πλήρη περιγραφή της ολικής συμπεριφοράς των τροχιών των D-ευσταθών ροών σε προσανατολίσιμες 2-πολλαπλότητες με πεπερασμένο γένος. Ας σημειωθεί οτι η περιγραφή αυτή αποτελεί το κύριο εργαλείο για την απάντηση στο πρώτο ερώτημα.

11. Στην εργασία Rotation numbers and isometries, *Geom. Dedicata* 72 (1998),1-13, ορίζεται ο *ομομορφισμός στροφής* μιας συμπαγούς, συνεκτικής πολλαπλότητας Riemann M, που είναι ένας συνεχής ομομορφισμός $R : I(M) \to H_1(M;\mathbb{R})/H_1(M;\mathbb{Z})$, όπου $I(M)$ είναι η συνεκτική συνιστώσα της ομάδας των ισομετριών της M που περιέχει την ταυτοτική απεικόνιση.

Για κάθε ομοιομορφισμό $h : M \to M$ ομοτοπικό με την ταυτοτική απεικόνιση και h-αναλλοίωτο μέτρο ν ορίζεται ο ν-ομομορφισμός αριθμών στροφής $R_\nu(h) : H^1(M;\mathbb{Z}) \to S^1$, που γενικεύει την έννοια του αριθμού στροφής για ομοιομορφισμούς του S^1 που διατηρούν τον προσανατολισμό και μπορεί να θεωρηθεί στοιχείο της $H_1(M;\mathbb{R})/H_1(M;\mathbb{Z})$. Αν $h \in I(M)$, τότε ο $R_\nu(h)$ είναι ανεξάρτητος του ν, όπως αποδεικνύεται στην εργασία. Ετσι ορίζεται ο R.

Ο ομομορφισμός στροφής μπορεί να θεωρηθεί εργαλείο για την εύρεση σχέσεων της $I(M)$ με την $H_1(M;\mathbb{R})$ στην κατεύθυνση του γενικότερου προβληματισμού, πόσο η ομολογία ενός χώρου περιορίζει την συμμετρικότητα των γεωμετριών που αυτός δέχεται. Ενα παράδειγμα τέτοιας σχέσης, που αποδεικνύεται στην εργασία, είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα. *Αν η M είναι μια συμπαγής, συνεκτική, προσανατολίσιμη 3-πολλαπλότητα Riemann χωρίς συζυγή σημεία, τότε ο ομομορφισμός στροφής R έχει πεπερασμένο πυρήνα και κατά συνέπεια* $\dim I(M) \leq \mathrm{rank} H_1(M;\mathbb{Z})$.

Το ίδιο συμπέρασμα αποδεικνύεται και για πολλαπλότητες Riemann χωρίς συζυγή σημεία με διάσταση > 3, με την επιπλέον υπόθεση οτι η θεμελειώδης κλάση της συνομολογίας τους είναι το cup γινόμενο ακέραιων 1-διάστατων κλάσεων συνομολογίας.

12. Στην εργασία Volume preserving flows with cyclic winding numbers groups and without periodic orbits on 3-manifolds, *Manuscripta Math.* 97 (1998), 37-44, δίνονται παραδείγματα πουθενά μηδενιζόμενων C^1 διανυσματικών πεδίων σε συνεκτικές συμπαγείς 3-πολλαπλότητες, που διατηρούν ένα στοιχείο όγκου και δεν έχουν περιοδικές τροχιές ενώ έχουν κυκλική ομάδα αριθμών στροφής. Σύμφωνα με το θεώρημα των Conley-Zehnder-Franks δεν υπάρχουν τέτοια παραδείγματα που είναι αναρτήσεις ομοιομορφισμών της σπείρας. Η κατασκευή βασίζεται σε μια εργασία του G. Kuperberg και στην ερμηνεία κάθε αριθμού στροφής ως ροή του διανυσματικού πεδίου μέσω μιας επιφάνειας.

13. Στην εργασία Chain recurrence in flows on the Klein bottle, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 127 (1999), 83-91, με τον Α. Αλεξέλη, μελετώνται μονοδιάστατα, συμπαγή, συνεκτικά, αμετάβλητα, αλυσωτά επαναφερόμενα σύνολα Δ.Σ. στο προβολικό επίπεδο και στην φιάλη του Klein, στο πνεύμα της θεωρίας Poincaré-Bendixson. Η 2-σφαίρα S^2, το προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$ και η φιάλη του Klein K^2 είναι οι μοναδικές συμπαγείς 2-πολλαπλότητες (χωρίς σύνορο) στις οποίες ισχύει το θεώρημα Poincaré-Bendixson. Η περίπτωση της S^2 μελετήθηκε σε προηγούμενη εργασία (Πρβλ. 8). Εδώ αποδεικνύεται πρώτα οτι όλα τα αποτελέσματα που έχουμε στην S^2 μεταφέρονται στο $\mathbb{R}P^2$, αφού, όπως αποδεικνύεται στην εργασία, η αλυσωτή επαναφορά συμπεριφέρεται καλά σε σχέση με απεικονίσεις επικάλυψης συνεκτικών συμπαγών πολλαπλοτήτων. Στην περίπτωση της K^2 αποδεικνύονται τα ακόλουθα.

Θεώρημα. *Αν ένα μονοδιάστατο, συμπαγές, συνεκτικό, αμετάβλητο, αλυσωτά επαναφερόμενο σύνολο ενός Δ.Σ. στην K^2 δεν περιέχει σταθερά σημεία, τότε είτε είναι μια περιοδική τροχιά, είτε περιέχει όλες τις περιοδικές τροχιές του Δ.Σ. που δεν είναι ομοτοπικά τετριμένες και το συμπλήρωμα στην K^2 κάθε μιας από αυτές ειναι ομοιομορφικό με $(-1,1) \times S^1$.*

Ενα παράδειγμα δείχνει οτι η δεύτερη περίπτωση μπορεί να συμβεί, χωρίς το σύνολο να είναι περιοδική τροχιά. Οσο αφορά την δομή των μονοδιάστατων αλυσωτών συνιστωσών αποδεικνύεται η ακόλουθη.

Πρόταση. *Εστω A μια μονοδιάστατη αλυσωτή συνιστώσα ενός Δ.Σ. στην K^2 με πεπερασμένα το πλήθος σταθερά σημεία. Αν τα οριακά σύνολα των μη-περιοδικών τροχιών στο A είναι σταθερά σημεία, τότε το A περιέχει πεπερασμένες το πλήθος τροχιές και είναι ομοιομορφικό με πεπερασμένο γράφημα.*

Οπως αποδεικνύεται με ένα παράδειγμα, η υπόθεση είναι απαραίτητη. Γενικά, η δομή και η θέση των μονοδιάστατων αλυσωτών συνιστωσών Δ.Σ. στην K^2 με πεπερασμένα το πλήθος σταθερά σημεία περιγράφεται από το ακόλουθο.

Θεώρημα. *Κάθε μονοδιάστατη αλυσωτή συνιστώσα ενός Δ.Σ. στην K^2 με πεπερασμένα το πλήθος σταθερά σημεία είτε περιέχει πεπερασμένες το πλήθος τροχιές και είναι ομοιομορφική με πεπερασμένο γράφημα, είτε περιέχει όλες τις περιοδικές τροχιές και όλους τους απλούς τροχιακούς κύκλους που δεν είναι ομοτοπικά τετριμένα και το συμπλήρωμα στην K^2*

κάθε τέτοιας περιοδικής τροχιάς και τέτοιου απλού τροχιακού κύκλου είναι ομοιομορφικό με $(-1,1) \times S^1$.

14. Στην εργασία Cohomology of surface minimal sets, *Expositiones Math.* 17 (1999), 371-374, αποδεικνύεται οτι η πρώτη ομάδα συνομολογίας Cech με ακέραιους συντελεστές ενός μη-τετριμένου συμπαγούς ελαχίστου συνόλου μιας ροής σε μια 2-πολλαπλότητα είναι ελεύθερη αβελιανή με τάξη ≥ 2. Αυτό δεν ισχύει για μονοδιάστατα συμπαγή ελάχιστα σύνολα ροών σε πολλαπλότητες με διάσταση μεγαλύτερη του 2. Το κύριο μέρος της απόδειξης αποτελεί μια κατασκευή, με την οποία το ελάχιστο σύνολο εμφυτεύεται σε μια ροή μιας συμπαγούς 2-πολλαπλότητας, έτσι ώστε το συμπλήρωμα του να είναι ένωση ξένων μεταξύ τους δίσκων. Το αποτέλεσμα τότε προκύπτει από την θεωρία Poincaré-Bendixson και τον δυϊσμό κατά Lefschetz.

15. Στην εργασία On the Ruelle rotation for torus diffeomorphisms, *Math. Z.* 234 (2000), 225-239, μελετάται ο αριθμός στροφής του Ruelle, που ορίζεται για μια C^1 αμφιδιαφόριση h του T^2 που ειναι ισοτοπική με την ταυτοτική απεικόνιση. Είναι η μέση τιμή, ως προς ένα h-αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας ν, του ασυμπτωτικού ρυθμού με τον οποίο η παράγωγος στρέφει τα εφαπτόμενα επίπεδα. Για το υπολογισμό του, πρέπει να έχουμε εκ των προτέρων σταθεροποιήσει μια "trivialization" της εφαπτομένης δέσμης και μια ισοτοπία προς την ταυτοτική απεικόνιση, από τις οποίες και εξαρτάται. Δύο διαφορετικές ισοτοπίες δίνουν αριθμούς που διαφέρουν κατά έναν ακέραιο. Ετσι για κάθε trivialization παίρνουμε ένα καλά ορισμένο σημείο του μοναδιαίου κύκλου.

Στο κύριο αποτέλεσμα της εργασίας αποδεικνύεται οτι τα σημεία του μοναδιαίου κύκλου που παίρνουμε από δύο trivializations διαφέρουν κατά ένα στοιχείο της ομάδας $\mathrm{Im}R_\nu(h)$, όπου $R_\nu(h) : H^1(T^2;\mathbb{Z}) \to S^1$ είναι ο ομομορφισμός των ν-αριθμών στροφής του h. Από αυτό και την συνέχεια ως προς την C^1 τοπολογία προκύπτει οτι το διαφορικό του αριθμού στροφής του Ruelle, με την έννοια της συνομολογίας ομάδων, είναι ένας πραγματικός φραγμένος 2-σύγκυκλος στην ομάδα καθολικής επικάλυψης $\widetilde{Diff}_0^1(T^2,\nu)$ της συνεκτικής συνιστώσας της ταυτοτικής της ομάδας των C^1 αμφιδιαφορίσεων του T^2, που διατηρούν το μέτρο ν. Μ' αυτόν τον τρόπο ορίζεται ένα στοιχείο της δεύτερης ομάδας της φραγμένης συνομολογίας της $\widetilde{Diff}_0^1(T^2,\nu)$, ως διακριτή. Η κλάση αυτή περιέχεται στον πυρήνα του φυσικού ομομορφισμού $H_b^2(\widetilde{Diff}_0^1(T^2,\nu);\mathbb{R}) \to H^2(\widetilde{Diff}_0^1(T^2,\nu);\mathbb{R})$, που είναι μονομορφισμός όταν η $\widetilde{Diff}_0^1(T^2,\nu)$ είναι ομοιόμορφα τέλεια ομάδα. Ετσι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο της μη ομοιόμορφης τελειότητας της $\widetilde{Diff}_0^1(T^2,\nu)$. Για παράδειγμα, όπως αποδεικνύεται στην εργασία, αυτή δεν είναι ομοιόμορφα τέλεια όταν το ν είναι το μέτρο Haar ή ένα σημειακό μέτρο Dirac.

16. Στην εργασία Explosions near isolated unstable attractors, *Pacific J. Math.* 210 (2003), 201-214, μελετώνται οι τροχιές στις οποίες εκρήγνυται η ροή στο πεδίο έλξης ενός ασταθούς ελκυστή, που είναι μεμονωμένος με την έννοια του C.C. Conley. Μία ροή σε έναν συνεκτικό, τοπικά συμπαγή, μετρικοποιήσιμο χώρο M λέμε οτι εκρήγνυται στην τροχιά του σημείου $x \in M$ όταν $L^+(x) \neq J^+(x)$.

Κατ' αρχήν αποδεικνύεται στην εργασία οτι αν A είναι ένα αμετάβλητο συνεχές που είναι μεμονωμένος ασταθής ελκυστής με πεδίο έλξης $W^+(A)$, ώστε το $W^+(A) \setminus A$ να είναι συνεκτικό, τότε υπάρχουν εκρήξεις στο $W^+(A) \setminus D^+(A)$, εκτός αν $D^+(A) = M$, όπου $D^+(A)$ είναι η θετική πρώτη επέκταση του A. Το σύνολο των τροχιών στο $W^+(A) \setminus A$, στις οποίες εκρήγνυται η ροή καθορίζεται και περιγράφεται πλήρως τοπολογικά και δυναμικά μέσω ενός κατάλληλου συμπαγούς υποσυνόλου του συνόρου ενός (οποιουδήποτε) απομονωτικού μπλόκ του A (Πρβλ. Proposition 3.2). Στην περίπτωση που ο χώρος φάσεων M είναι 2-πολλαπλότητα, η ροή είναι διαφορίσιμη και το A είναι ένα σταθερό σημείο, τότε το σύνολο των τροχιών στο $W^+(A) \setminus A$, στις οποίες η ροή εκρήγνυται, είναι πεπερασμένο.

Η θετική πρώτη επέκταση $D^+(A)$ ενός ασταθούς ελκυστή A είναι ασυμπτωτικά ευσταθές συμπαγές αμετάβλητο σύνολο με το ίδιο πεδίο έλξης όπως το A. Η ροή άλλες φορές εκρήγνυται και άλλες όχι σε τροχιές του $D^+(A) \setminus A$. Οπως αποδεικνύεται στο Theorem 3.5 της εργασίας, μία ικανή συνθήκη για την ύπαρξη εκρήξεων στο $D^+(A) \setminus A$ είναι η πρώτη ακέραια ομάδα συνομολογίας κατά Alexander-Spanier $\bar{H}^1(W^+(A);\mathbb{Z})$ να είναι τετριμένη. Η σημασία του αποτελέσματος βρίσκεται στο γεγονός οτι στις πρακτικές εφαρμογές αυτό που βλέπουμε είναι το $W^+(A)$, ενώ αυτό που θέλουμε είναι το A και η ροή γύρω από αυτό.

Τέλος, στην εργασία εξετάζεται ειδικά η περίπτωση ενός σταθερού σημείου A που είναι ασταθής ελκυστής σε μία ροή στην 2-σφαίρα. Τότε, όπως αποδεικνύεται στην εργασία, το $D^+(A) \setminus A$ είναι ANR και η περιορισμένη ροή σ′ αυτό είναι πλήρως ασταθής. Αν το A είναι επιπλέον μεμονωμένο, το $D^+(A) \setminus A$ έχει πεπερασμένες στο πλήθος συνεκτικές συνιστώσες και κάθε μία από αυτές είναι είτε μία τροχιά ομοιομορφική με το $\mathbb{R}$ είτε μία μη-συμπαγής 2-πολλαπλότητα με μη-κενό και μή-συμπαγές σύνορο και με πεπερασμένες στο πλήθος συνοριακές συνιστώσες.

17. Στην εργασία Remarks on the region of attraction of an isolated invariant set, *Colloq. Math.* 104 (2006), 157-167, μελετάται η περιπλοκότητα της ροής μέσα στο πεδίο έλξης $W^+(A)$ ενός μεμονωμένου αμεταβλήτου συνόλου A. Εισάγεται το *βάθος αστάθειας* του πεδίου ελξης, που είναι ένας διατακτικός αριθμός και μετράει το πόσο απέχει το A από το να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές μέσα στο $W^+(A)$. Αποδεικνύεται οτι όταν το A αποτελείται από ένα σταθερό σημείο μιας ροής στην 2-σφαίρα S^2, τότε το βάθος αστάθειας του πεδίου έλξης του είναι το πολύ 2. Κατασκευάζονται επίσης παραδείγματα ροών στον 2-torus T^2 και στον $\mathbb{R}^3$ με μεμονωμένα σταθερά σημεία, που το πεδίο έλξης τους έχει βάθος αστάθειας 3. Η απλούστερη περίπτωση με βάθος αστάθειας 1 μελετάται στην εργασία M.A. Moron, J.J. Sanchez-Gabites and J.M.R. Sanjurjo, Topology and dynamics of unstable attractors, *Fundamenta Math.* 197 (2007), 239-252, όπου χρησιμοποιούνται αποτελέσματα της εργασίας 16, και στην εργασία J.J. Sanchez-Gabites, Unstable attractors in manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* 362 (2010), 3563-3589.

18. Στην εργασία Pointwise recurrent homeomorphisms with stable fixed points, *Topology Appl.* 153 (2006), 1192-1201, αποδεικνύεται οτι αν ένας ομοιομορφισμός της 2-σφαίρας $f : S^2 \to S^2$ διατηρεί τον προσανατολισμό, είναι κατά σημείο επαναφερόμενος και έχει ευσταθή σταθερά σημεία (με την έννοια του Lyapunov), τότε έχει ακριβώς δύο σταθερά σημεία, αν είναι διαφορετικός από την ταυτοτική απεικόνιση. Αν επιπλέον ο f δεν έχει περιοδικά σημεία, εκτός των δύο σταθερών, τότε κάθε σταθερό σημείο έχει μία βάση περιοχών που αποτελείται από τοπολογικούς ανοιχτούς δίσκους, των οποίων οι κλειστότητες έχουν συνεκτικά συμπληρώματα.

Ο f λέγεται κατά σημείο επαναφερόμενος αν $x \in L^+(x) \cap L^-(x)$ για κάθε $x \in S^2$, όπου

$$L^{\pm}(x) = \{y \in S^2 : f^{n_k}(x) \to y \text{ για κάποια } n_k \to \pm\infty\}.$$

Το συμπέρασμα αυτό ήταν γνωστό για ασθενώς σχεδόν περιοδικούς ομοιομορφισμούς που διατηρούν τον προσανατολισμό της S^2, οι οποίοι αποτελούν πολύ μικρότερη κλάση από τους κατά σημείο επαναφερόμενους με ευσταθή σταθερά σημεία. Η απόδειξη που είχε δοθεί για τους ασθενώς σχεδόν περιοδικούς ομοιομορφισμούς βασιζόταν στην θεωρία των πρώτων περάτων του Καραθεοδωρή. Στην εργασία η απόδειξη του κύριου αποτελέσματος βασίζεται στο θεώρημα μεταφοράς του Brouwer και είναι συντομότερη.

Στην εργασία μελετάται επίσης και το πρόβλημα της δυναμικής μίας ανύψωσης του f στον καθολικό χώρο επικάλυψης του συμπληρώματος του συνόλου των σταθερών σημείων. Αποδεικνύεται οτι αν ο f είναι C^1 αμφιδιαφόριση σε ανοιχτές περιοχές των δύο σταθερών σημείων και οι απειροστικοί αριθμοί στροφής στα δύο σταθερά σημεία είναι μη-μηδενικοί, τότε μία ανύψωση του $f|S^2 \setminus \mathrm{Fix}(f)$ στο $\mathbb{R}^2$ είναι τοπολογικά συζυγής με μεταφορά.

19. Το κύριο αποτέλεσμα της εργασίας Divergence of C^1 vector fields and nontrivial minimal sets on 2-manifolds, *J. Differential Equations* 243 (2007), 24-35, είναι ένα κριτήριο μη-ύπαρξης μη-τετριμένων συμπαγών ελαχίστων συνόλων για C^1 διανυσματικά πεδία σε προσανατολίσιμες 2-πολλαπλότητες ανάλογο με το κριτήριο Bendixson-Dulac για την μη-ύπαρξη περιοδικών λύσεων σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις στο $\mathbb{R}^2$. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται το ακόλουθο:

Θεώρημα. *Εστω X ένα C^1 διανυσματικό πεδίο σε μια συνεκτική, προσανατολίσιμη, C^∞ 2-πολλαπλότητα M. Αν $\mathrm{div}_\omega X \geq 0$ παντού στην M, για κάποιο στοιχείο εμβαδού ω, τότε η ροή του X δεν έχει μη-τετριμένα συμπαγή ελάχιστα σύνολα.*

Επίσης αποδεικνύεται οτι όλα τα μη-τετριμένα συμπαγή ελάχιστα σύνολα της ροής του X περιέχονται στο σύνολο μηδενισμού κάθε C^1 λύσης της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους $Xf = f \cdot \mathrm{div}_\omega X$ που ορίζεται πάνω στην M. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο μη-ύπαρξης μη-τετριμένων συμπαγών ελαχίστων συνόλων για C^1 διανυσματικά πεδία σε προσανατολίσιμες, 2-πολλαπλότητες. Ενα σχετικό παράδειγμα δίνεται στον T^2.

Τέλος, επειδή οι λύσεις της προηγούμενης γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης συνδέονται με τις απειροστικές συμμετρίες του X, έχουμε ως πόρισμα, μεταξύ των άλλων, οτι αν το X είναι ένα C^1 διανυσματικό πεδίο σε μια προσανατολίσιμη, 2-πολλαπλότητα M και το $A \subset M$ είναι ένα μη-τετριμένο συμπαγές ελάχιστο σύνολο του X, τότε κάθε απειροστική C^1 συμμετρία του X είναι τετριμένη πάνω στο A.

20. Στην εργασία Asymptotically stable one-dimensional compact minimal sets, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 30 (2007), 397-406, αποδεικνύεται οτι αν A είναι ένα ασυμπτωτικά ευσταθές, μονοδιάστατο, συμπαγές ελάχιστο μιας συνεχούς ροής σ′ έναν τοπικά συμπαγή, μετρικό χώρο X και ο X είναι τοπικά συνεκτικός στα σημεία του A, τότε το A είναι μια περιοδική τροχιά. Αυτό γενικεύει το δεύτερο κύριο αποτέλεσμα της εργασίας 5 από τοπικά συμπαγείς χώρους φάσεων που είναι ANR σε τοπικά συνεκτικούς. Η γενίκευση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην μελέτη του πεδίου έλξης ενός μεμονωμένου μονοδιάστατου συμπαγούς ελαχίστου συνόλου.

21. Η εργασία The equipartition of curves, *Computational Geom.* 42 (2009), 677-689, με τους Κ. Παναγιωτάκη και Γ. Τζιρίτα, αναφέρεται στο παρακάτω πρόβλημα ισοδιαμέρισης καμπυλών. Εστω X ένας τοπολογικός χώρος και $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ μία συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα οτι $d(x, y) = 0$ τότε και μόνον τότε όταν $x = y$. Για κάθε απλή συνεχή καμπύλη $c : [0, 1] \to X$ και κάθε ακέραιο $n \geq 2$ ζητείται μία διαμέριση $0 = t_0 < t_1 < \cdots <$

$t_n = 1$ ώστε
$$d(c(t_0), c(t_1)) = d(c(t_1), c(t_2)) = \cdots = d(c(t_{n-1}), c(t_n)).$$
Στην εργασία δίνεται μία επαγωγική απόδειξη της ύπαρξης λύσης, που βασίζεται στην τοπολογική μελέτη του zero level set μιας κατάλληλης συνεχούς συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $(n-1)$-simplex $\Delta_{n-1} = \{(t_1, ..., t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : 0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq 1\}$. Η ιδέα και η μέθοδος της απόδειξης οδηγούν σε έναν προσεγγιστικό αλγόριθμο, που κατασκευάζεται στην εργασία, όταν $X = \mathbb{R}^n$ και d είναι η ευκλείδεια απόσταση. Στην εργασία παρουσιάζονται επίσης πειραματικά αποτελέσματα, τόσο από την εφαρμογή του αλγορίθμου σε υπολογιστή, όσο και από την εφαρμογή της προσεγγιστικής λύσης στην παραγωγή εικόνας υψηλής ευκρίνειας.

22. Στην εργασία The Ruelle rotation of Killing vector fields, *Colloq. Math.* 116 (2009), 243-247, υπολογίζεται ο αριθμός στροφής του Ruelle $\rho(X)$ ενός διανυσματικού πεδίου Killing X με τετριμένη εγκάρσια δέσμη σε μια προσανατολισμένη, συμπαγή, συνεκτική 3-πολλαπλότητα Riemann M ως προς το κανονικοποιημένο στοιχείο όγκου ω που ορίζει η μετρική Riemann. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται οτι
$$\rho(X) = \frac{1}{2\pi} \int_M \langle [X, Z], Y \rangle \omega$$
όπου $\langle ., . \rangle$ είναι η μετρική Riemann στην M και $\{Y, Z\}$ είναι ένα ορθοκανονικό πλαίσιο της εγκάρσιας δέσμης του X, ώστε το $\{X, Y, Z\}$ να είναι θετικά προσανατολισμένο ορθογώνιο πλαίσιο της εφαπτομένης δέσμης της M.

23. Στην εργασία Denjoy C^1 diffeomorphisms of the circle and McDuff's question, *Expositiones Math.*, to appear, γίνεται στην αρχή μία ανασκόπηση της θεωρίας των Poincaré, Denjoy και Herman για τη δυναμική των C^1 αμφιδιαφορίσεων του κύκλου που διατηρούν τον προσανατολισμό. Στη συνέχεια αποδεικνύεται το θεώρημα της Dusa McDuff για τη γεωμετρία του μοναδικού αναλλοίωτου συνόλου Cantor μιας C^1 αμφιδιαφόρισης του Denjoy $f : S^1 \to S^1$, σύμφωνα με το οποίο $\liminf_{n \to +\infty} \dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} = 1$, όπου $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > 0$ είναι τα μήκη των συνεκτικών συνιστωσών του $S^1 \setminus K$ σε φθίνουσα ακολουθία. Απάντηση στο ερώτημα της Dusa McDuff αν ισχύει πάντα οτι $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} = 1$ δεν έχει δοθεί ακόμα. Στο τελευταίο μέρος αποδεικνύεται με τις μεθόδους του A. Portela οτι αυτό ισχύει στην περίπτωση που η συνομολογική εξίσωση $\log f' = u - u \circ f$ έχει συνεχή λύση $u : K \to \mathbb{R}$. Η εξίσωση αυτή δεν έχει ποτέ συνεχή λύση $u : S^1 \to \mathbb{R}$. Παραδείγματα δείχνουν οτι άλλοτε έχει και άλλοτε δεν έχει συνεχή λύση στο K. Ετσι ένα δεύτερο ανοιχτό ερώτημα είναι η εύρεση ικανών και αναγκαίων συνθηκών για την ύπαρξη συνεχούς λύσης στο K.

24. Στην εργασία On the existence of absolutely continuous automorphic measures, preprint, μελετάται η ύπαρξη απολύτως συνεχών αυτόμορφων μέτρων ως προς ένα εργοδικό αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας για μια συνεχή απεικόνιση $T : X \to X$ ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X. Παρουσιάζεται μια ικανή συνθήκη που εξασφαλίζει την ύπαρξη. Το πρόβλημα αυτό έχει σχέση με την ύπαρξη μετρήσιμης ή και συνεχούς λύσης της συνομολογικής εξίσωσης $f = u - u \circ T$, όπου $f : X \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση.

Αποδεικνύεται το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα. *Εστω X ένας συμπαγής μετρικός χώρος, $T : X \to X$ μια συνεχής και επί απεικόνιση και μ ένα εργοδικό T-αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας. Εστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση ώστε $\int_X f d\mu = 0$ και $E_n(f) = \exp(-\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k)$, για $n \in \mathbb{Z}^+$.*

(α) Αν υπάρχει μια σταθερά $c \geq 1$ ώστε

$$E_n(f) \leq c \int_X E_n(f) d\mu$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$, τότε υπάρχει ένα e^f-αυτόμορφο μέτρο για τον T που είναι ισοδύναμο με το μ. Επιπλέον, $\frac{d\nu}{d\mu} \in L^\infty(\mu)$ και η $-\log(\frac{d\nu}{d\mu})$ είναι μετρήσιμη λύση της συνομολογικής εξίσωσης $f = u - u \circ T$.

(β) Αν η T είναι τοπικά τελικά επί τοπικός ομοιομορφισμός, το μ είναι θετικό στα μη-κενά ανοιχτά σύνολα και υπάρχει $c \geq 1$ ώστε

$$\frac{1}{c} \int_X E_n(f) d\mu \leq E_n(f) \leq c \int_X E_n(f) d\mu$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$, τότε $\log(\frac{d\nu}{d\mu}) \in L^\infty(\mu)$ και υπάρχει συνεχής $u : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f = u - u \circ T$.

Στην ειδική περίπτωση των μονοσήμαντα εργοδικών ομοιομορφισμών αποδεικνύεται με άλλη μέθοδο το ακόλουθο.

Θεώρημα. *Εστω X ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $T : X \to X$ ένας μονοσήμαντα εργοδικός ομοιομορφισμός με μοναδικό αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας μ. Εστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση ώστε $\int_X f d\mu = 0$. Αν υπάρχει $g \in L^1(\mu)$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε*

$$E_n(f) \leq g \int_X E_n(f) d\mu$$

για κάθε $n \geq n_0$, τότε υπάρχει ένα e^f-σύμμορφο μέτρο για τον T που είναι ισοδύναμο με το μ.