Θερινό Σχολείο Μαθηματικών 2002

Ηράκλειο, 15-27 Ιουλίου

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Η θεωρία Poincaré-Bendixson

Κωνσταντίνος Αθανασόπουλος

Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών

1. Διαφορικές Εξισώσεις και ροές

Η θεωρία των διαφορικών εξισώσεων είναι μία από τις σημαντικότερες περιοχές των Μαθηματικών, όπου η θεωρία βρίσκεται σε συνεχή αλληλεπίδραση με τις εφαρμογές. Οι διαφορικές εξισώσεις είναι τα καταλληλότερα αντικείμενα για την μαθηματικοποίηση προβλημάτων από άλλες επιστήμες, όπως η Φυσική, η Βιολογία, η Οικονομία κ.λπ. Οσον αφορά την σημασία τους στα Μαθηματικά, ιστορικά έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της Ανάλυσης και της Γεωμετρίας, ενώ αποτελούν τον κλάδο, που περισσότερο από κάθε άλλον είναι εμφανής η άποψη της δυναμικής, που τείνει να κυριαρχήσει στα σύγχρονα Μαθηματικά.

Στην θεωρία των συνηθισμένων διαφορικών εξισώσεων μας ενδιαφέρει η περιγραφή των λύσεων μίας αυτόνομης διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης

$$x' = f(x)$$

όπου η $f : X \to \mathbb{R}^n$ είναι μία συνάρτηση ορισμένη σ' ένα ανοιχτό σύνολο $X \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, με ιδιότητες που εξασφαλίζουν την ύπαρξη και την μονοσήμαντη εξάρτηση των λύσεων από τις αρχικές συνθήκες. Στην συνέχεια θα υποθέτουμε οτι η f είναι C^k, $1 \leq k \leq \infty$, οπότε από το θεώρημα του Cauchy για κάθε $x \in X$ υπάρχει μία μοναδική μέγιστη λύση $\phi_x : I_x \to X$, που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\phi_x(0) = x$, ορισμένη σ' ένα ανοιχτό διάστημα $I_x = (a_x, b_x)$, που περιέχει το 0. Ο όρος «μέγιστη» σημαίνει οτι η ϕ_x δεν μπορεί να επεκταθεί σ' ένα ανοιχτό διάστημα μεγαλύτερο από το I_x. Αν θέσουμε

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times X : a_x < t < b_x\}$$

και θεωρήσουμε την συνάρτηση $\phi : D \to X$, με $\phi(t, x) = \phi_x(t)$, τότε

(α) το D είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R} \times X$ και η ϕ είναι C^k,

(β) $I_{\phi(t,x)} = I_x - t$ για κάθε $t \in I_x$, $x \in X$ και

(γ) $\phi(t + s, x) = \phi(t, \phi(s, x))$ για κάθε t, $s \in \mathbb{R}$ με $t + s \in I_x$ και $x \in X$.

Για την απόδειξη των ιδιοτήτων αυτών παραπέμπουμε στο [2, Chapter 3]. Απλά παραδείγματα δείχνουν οτι το D δεν είναι πάντα ίσο με $\mathbb{R} \times X$, δηλαδή οι λύσεις δεν ορίζονται πάντα σ' όλο το $\mathbb{R}$.

1.1. Πρόταση. *Αν $x \in X$ και το $\overline{\phi_x([0, b_x))}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X, τότε $b_x = +\infty$.*

Απόδειξη. Εστω οτι $b_x < +\infty$. Για κάθε $y \in \overline{\phi_x([0, b_x))}$ υπάρχουν $\delta_y > 0$ και μία ανοιχτή περιοχή V_y του y ώστε $(-\delta_y, \delta_y) \times V_y \subset D$. Από την συμπάγεια, υπάρχουν $y_1, ..., y_m \in \overline{\phi_x([0, b_x))}$ ώστε

$$\overline{\phi_x([0, b_x))} \subset V_{y_1} \cup ... \cup V_{y_m}.$$

Αν $\delta = \min\{\delta_{y_1}, ..., \delta_{y_1}\}$, τότε $(-\delta, \delta) \times \overline{\phi_x([0, b_x))} \subset D$. Θεωρούμε μία αύξουσα ακολουθία $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $[0, b_x)$, που συγκλίνει στο b_x. Τότε

$$(-\delta, \delta) \subset I_{\phi(t_n,x)} = (a_x - t_n, b_x - t_n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, που είναι αντίφαση. □

Το σύνολο $\phi_x(I_x)$ λέγεται *τροχιά* του σημείου $x \in X$. Από την μονοσήμαντη εξάρτηση των λύσεων από τις αρχικές συνθήκες, οι τροχιές συνιστούν διαμέριση του X. Η γραφική παράσταση που προκύπτει από τον τρόπο που κατανέμονται οι τροχιές στο X λέγεται *διάγραμμα φάσεων*. Το πρόβλημα της γεωμετρικής θεωρίας των συνηθισμένων διαφορικών εξισώσεων είναι η κατανόηση του διαγράμματος φάσεων, χωρίς να χρειαστεί να λύσουμε την διαφορική εξίσωση. Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο, αφού σπάνια μία διαφορική εξίσωση μπορεί να επιλυθεί. Από την άλλη μεριά, πληροφορίες που προκύπτουν από την έστω και μερική κατανόηση του διαγράμματος φάσεων είναι κρίσιμες στις εφαρμογές. Οι πληροφορίες αυτές έχουν γεωμετρικό χαρακτήρα και όχι ποσοτικό, δηλαδή δεν αναφέρονται στην χρονική παραμέτριση των τροχιών.

Στα πλαίσια αυτά μπορούμε να περιορίσουμε την ανάπτυξη της θεωρίας κάνοντας την επιπλέον υπόθεση οτι $D = \mathbb{R} \times X$, όπως δείχνει το επόμενο θεώρημα, για την απόδειξη του οποίου παραπέμπουμε στο [4].

1.2. Θεώρημα. *Εστω $X \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f : X \to \mathbb{R}^n$ μία C^k συνάρτηση, $1 \leq k \leq \infty$. Τότε υπάρχει μία C^∞ συνάρτηση $\lambda : X \to (0,1]$ ώστε όλες οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης*

$$x' = \lambda(x)f(x)$$

να ορίζονται σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$. $\square$

Οι διαφορικές εξισώσεις $x' = f(x)$ και $x' = \lambda(x)f(x)$ έχουν τις ίδιες τροχιές, αλλά διαφορετικά παραμετρισμένες. Αν $\phi_x : I_x \to X$ είναι η μέγιστη λύση της πρώτης με $\phi_x(0) = x$, τότε η $\psi_x = \phi_x \circ h^{-1}$, όπου η $h : I_x \to \mathbb{R}$ έχει τύπο

$$h(t) = \int_0^t \frac{1}{\lambda(\phi_x(s))} ds,$$

είναι η μέγιστη λύση της δεύτερης με $\psi_x(0) = x$. Πράγματι, από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\psi_x'(t) = (h^{-1})'(t)\phi_x'(h^{-1}(t)) = \frac{1}{h'(h^{-1}(t))} f(\psi_x(t)) = \lambda(\psi_x(t))f(\psi_x(t)).$$

1.3. Ορισμός. *Εστω X ένας μετρικός χώρος. Μία ροή στον X είναι μία συνεχής συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \times X \to X$ ώστε*

(α) $\phi(0,x) = x$ για κάθε $x \in X$ και

(β) $\phi(t+s,x) = \phi(t,\phi(s,x))$ για κάθε t, $s \in \mathbb{R}$ και $x \in X$.

Συνήθως γράφουμε για απλότητα $\phi(t,x) = tx$ και $\phi(I \times A) = IA$ για $I \subset \mathbb{R}$ και $A \subset X$. Αξίζει να σημειωθεί οτι κάθε ροή ορίζει την μονοπαραμετρική ομάδα ομοιομορφισμών $\phi_t : X \to X$, όπου $\phi_t(x) = tx$.

Το σύνολο $C(x) = \{tx : t \in \mathbb{R}\}$ λέγεται *τροχιά* του x και το $C^+(x) = \{tx : t \geq 0\}$ λέγεται *θετική ημιτροχιά* του x. Οι τροχιές συνιστούν διαμέριση του X. Το $x \in X$ λέγεται *σταθερό σημείο* της ροής, αν $C(x) = \{x\}$. Η τροχιά $C(x)$ λέγεται *περιοδική* και το x *περιοδικό σημείο*, αν υπάρχει $T > 0$ ώστε $Tx = x$ και $tx \neq x$ για κάθε $0 < t < T$. Σ' αυτήν την περίπτωση η $g : S^1 \to C(x)$ με

$$g(e^{2\pi i t}) = \phi(tT, x), \qquad 0 \leq t < 1$$

είναι καλά ορισμένη, επί, ένα προς ένα και συνεχής. Επειδή ο μοναδιαίος κύκλος S^1 είναι συμπαγής, η g είναι ομοιομορφισμός. Συνεπώς, αν η τροχιά είναι περιοδική, είναι μία απλή κλειστή καμπύλη. Το T λέγεται *περίοδος* του x.

Στην περίπτωση της ροής μίας αυτόνομης διαφορικής εξίσωσης $x' = f(x)$, το x είναι σταθερό σημείο ακριβώς τότε όταν $f(x) = 0$.

2. Οριακά σύνολα

Εστω $\phi : \mathbb{R} \times X \to X$ μία ροή στον μετρικό χώρο X. Το σύνολο $A \subset X$ λέγεται *αμετάβλητο* αν $C(x) \subset A$ για κάθε $x \in A$ και *θετικά αμετάβλητο* αν $C^+(x) \subset A$ για κάθε $x \in A$. Εύκολα βλέπουμε οτι αν το A είναι αμετάβλητο, τότε τα $X \setminus A$, $\overline{A}$, $\mathrm{int}A$ και ∂A είναι επίσης αμετάβλητα. Αν το A είναι θετικά αμετάβλητο, τότε τα $\overline{A}$ και $\mathrm{int}A$ είναι θετικά αμετάβλητα. Το A λέγεται *αρνητικά αμετάβλητο*, αν το $X \setminus A$ είναι θετικά αμετάβλητο. Το σύνολο

$$L^+(x) = \{y \in X : t_n x \to y \text{ για κάποια } t_n \to +\infty\}$$

λέγεται *θετικό οριακό σύνολο* του x. Ανάλογα ορίζεται το *αρνητικό οριακό σύνολο* $L^-(x)$. Είναι προφανές οτι αν το x είναι σταθερό ή περιοδικό, τότε $C(x) = L^+(x) = L^-(x)$.

2.1. Παραδείγματα. (α) Το διάγραμμα φάσεων της διδιάστατης γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

έχει μοναδικό σταθερό σημείο το $(0,0)$ και $L^+(1,0) = \{(0,0)\}$, ενώ $L^+(1,1) = \varnothing$.

(β) Η διδιάστατη διαφορική εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες

$$r' = r(1-r) \text{ και } \theta' = 1$$

έχει το $(0,0)$ σταθερό σημείο και τον μοναδιαίο κύκλο S^1 περιοδική τροχιά. Για κάθε $r > 0$ έχουμε $L^+(r,\theta) = S^1$.

2.2. Πρόταση. *Τα οριακά σύνολα έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες.*

(α) $\overline{C^+(x)} = C^+(x) \cup L^+(x)$.

(β) Το $L^+(x)$ *είναι αμετάβλητο.*

(γ) $L^+(tx) = L^+(x)$ *για κάθε* $t \in \mathbb{R}$.

(δ) $L^+(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{C^+(tx)}$ *και συνεπώς το* $L^+(x)$ *είναι κλειστό σύνολο.*

Απόδειξη. (α) Από τον ορισμό είναι προφανές οτι $L^+(x) \subset \overline{C^+(x)}$. Εστω οτι $y \in \overline{C^+(x)}$, δηλαδή υπάρχουν $t_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, ώστε $t_n x \to y$. Αν $t_n \to +\infty$, τότε $y \in L^+(x)$. Αν όχι, τότε υπάρχει μία υπακολουθία $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, που συγκλίνει σε κάποιο $t \geq 0$. Από την συνέχεια της ροής έχουμε τότε οτι $y = tx$, δηλαδή $y \in C^+(x)$.

(β) Αν $t_n \to +\infty$ και $t_n x \to y$, τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε $t + t_n \to +\infty$ και $(t + t_n)x \to ty$, από την συνέχεια της ροής. Αρα $ty \in L^+(x)$.

(γ) Αν $y \in L^+(tx)$, τότε $(t+t_n)x = t_n(tx) \to y$ για κάποια $t_n \to +\infty$. Αφού $t + t_n \to +\infty$, έχουμε $y \in L^+(x)$.

(δ) Από τα (α) και (β) έχουμε $L^+(x) \subset \bigcap_{t \geq 0} \overline{C^+(tx)}$. Αν $y \in \bigcap_{t \geq 0} \overline{C^+(tx)}$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $t_n \geq n$, ώστε $d(y, t_n x) < 1/n$, όπου d είναι η απόσταση. Συνεπώς $t_n \to +\infty$ και $t_n x \to y$, δηλαδή $y \in L^+(x)$. $\square$

2.3. Θεώρημα. *Αν το $\overline{C^+(x)}$ είναι συμπαγές, τότε το $L^+(x)$ είναι μη-κενό, συμπαγές και συνεκτικό.*

Απόδειξη. Η μη-κενότητα και η συμπάγεια του $L^+(x)$ είναι σ' αυτήν την περίπτωση προφανείς. Θα αποδείξουμε την συνεκτικότητα με απαγωγή στο άτοπο. Εστω οτι υπάρχουν δύο μη-κενά, ξένα μεταξύ τους, κλειστά σύνολα A, $B \subset L^+(x)$, ώστε $L^+(x) = A \cup B$. Τα A, B είναι συμπαγή, αφού το $\overline{C^+(x)}$ είναι, οπότε

$$\delta = \inf\{d(a,b) : a \in A \text{ και } b \in B\} > 0$$

όπου d είναι η απόσταση. Τότε $S(A, \delta/3) \cap S(B, \delta/3) = \varnothing$. Εστω $y \in A$ και $z \in B$. Υπάρχουν t_n, $s_n \to +\infty$ με $t_n x \to y$ και $s_n x \to z$. Ετσι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $t_n x \in S(A, \delta/3)$ και $s_n x \in S(B, \delta/3)$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς

$$d(A, t_n x) < \frac{\delta}{3} < d(A, s_n x)$$

και από το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $r_n \in \mathbb{R}$ μεταξύ των t_n και s_n ώστε $d(A, r_n x) = \delta/3$, $n \geq n_0$. Είναι φανερό οτι $r_n \to +\infty$. Επειδή το $\overline{C^+(x)}$ είναι συμπαγές, η ακολουθία $(r_n x)_{n \geq n_0}$ έχει τουλάχιστον ένα οριακό σημείο $w \in \overline{C^+(x)}$. Προφανώς $w \in L^+(x)$, ενώ

$$d(A, w) = \frac{\delta}{3} > 0 \text{ και } d(B, w) \geq \frac{\delta}{3} > 0.$$

Αυτό σημαίνει οτι $w \notin A \cup B$, που είναι αντίφαση. $\square$

Οταν το $\overline{C^+(x)}$ δεν είναι συμπαγές, το $L^+(x)$ μπορεί να είναι μη-κενό, μη-συμπαγές και μη-συνεκτικό.

Η μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των λύσεων μίας διαφορικής εξίσωσης έχει μεγάλη σημασία στις εφαρμογές, αλλά και ως μέρος της διαδικασίας κατανόησης του διαγράμματος φάσεων. Για να γίνει αυτό, πρέπει να μελετηθούν τα οριακά σύνολα, δηλαδή να καθοριστεί η τοπολογική τους δομή και η συμπεριφορά των τροχιών μέσα και γύρω από αυτά. Η θεωρία των Poincaré-Bendixson δίνει απαντήσεις στα ερωτήματα αυτά στην διάσταση 2. Σε διαστάσεις μεγαλύτερες από 2 δεν υπάρχει αντίστοιχη θεωρία.

3. Τοπικές τομές

Στην παράγραφο αυτήν θα περιγράψουμε την συμπεριφορά των τροχιών μίας αυτόνομης διαφορικής εξίσωσης τοπικά στην περιοχή ενός μη-σταθερού σημείου. Το αντίστοιχο πρόβλημα για σταθερά σημεία είναι άλυτο. Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση

$$x' = f(x)$$

όπου η $f : X \to \mathbb{R}^n$ είναι C^k, $1 \leq k \leq \infty$, στο ανοιχτό σύνολο $X \subset \mathbb{R}^n$. Μία *τοπική τομή* στο σημείο $x \in X$ είναι ένα σύνολο $S \subset X$ με $x \in S$ για το οποίο υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε η ροή ϕ της διαφορικής εξίσωσης να απεικονίζει ομοιομορφικά το $(-\epsilon, \epsilon) \times S$ επί του $(-\epsilon, \epsilon)S$ και το τελευταίο να είναι ανοιχτό υποσύνολο του X. Το $(-\epsilon, \epsilon)S$ λέγεται *flow box*.

3.1. Θεώρημα. *Εστω $x_0 \in X$ με $f(x_0) \neq 0$. Τότε υπάρχει μία τοπική τομή S στο x_0, που είναι μία $(n-1)$-διάστατη ανοιχτή μπάλλα με κέντρο x_0 πάνω στο υπερεπίπεδο H που διέρχεται από το x_0 και είναι κάθετο στο $f(x_0)$.*

Απόδειξη. Η $\phi|\mathbb{R} \times (H \cap X)$ είναι C^k και το $\mathbb{R} \times (H \cap X)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Θεωρώντας γραμμικές συντεταγμένες στον γραμμικό χώρο $\mathbb{R}^n$ ως προς την ορθογώνια διάσπαση $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \oplus (H - x_0)$, βρίσκουμε

$$D\phi(0, x_0)e_1 = \frac{\partial \phi}{\partial t}(0, x_0) = \phi'_{x_0}(0) = f(x_0)$$

και $D\phi(0, x_0)e_i = e_i$, για $2 \geq i \leq n$, αφού $\phi(0, x) = x$ για κάθε $x \in H \cap X$. Με άλλα λόγια η $D\phi(0, x_0)$ απεικονίζει την βάση $\{e_1, ..., e_n\}$, ως προς την παραπάνω διάσπαση του $\mathbb{R}^n$, στο $\{f(x_0), e_2, ..., e_n\}$ που είναι βάση του $\mathbb{R}^n$, γιατί το $f(x_0)$ είναι κάθετο στο $H - x_0$. Συνεπώς, η $D\phi(0, x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικός ισομορφισμός και από το θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης υπάρχουν $\epsilon > 0$ και μία $(n-1)$-διάστατη ανοιχτή μπάλλα $S \subset H \cap X$ με κέντρο x_0, ώστε το $\phi((-\epsilon, \epsilon) \times S) = (-\epsilon, \epsilon)S$ να είναι ανοιχτό σύνολο και η $\phi|(-\epsilon, \epsilon) \times S$ να είναι C^k αμφιδιαφόριση, ειδικά ομοιομορφισμός. □

Οπως φαίνεται από την απόδειξη του 3.1, το υπερεπίπεδο H δεν είναι ανάγκη να είναι κάθετο στο $f(x_0)$. Αρκεί να είναι εγκάρσιο στο $f(x_0)$, δηλαδή $\mathbb{R}^n = \langle f(x_0) \rangle \oplus (H - x_0)$.

4. Οριακά σύνολα στο $\mathbb{R}^2$

Στην παράγραφο αυτήν θα αποδείξουμε το θεώρημα Poincaré-Bendixson, που αναφέρεται στην δομή των οριακών συνόλων της ροής μίας αυτόνομης διαφορικής εξίσωσης

$$x' = f(x)$$

όπου η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι C^1. Οπως είδαμε στην παράγραφο 1, μπορούμε να υποθέτουμε οτι η διαφορική εξίσωση έχει ροή $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Αν το $y \in \mathbb{R}^2$ είναι ένα μη-σταθερό σημείο, δηλαδή $f(y) \neq 0$, σύμφωνα με το θεώρημα 3.1 υπάρχει ένα ανοιχτό ευθύγραμμο τμήμα $S \subset \mathbb{R}^2$, που περιέχει το y και είναι τοπική τομή της ροής. Δηλαδή, υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε η ϕ να απεικονίζει ομοιομορφικά το $(-\epsilon, \epsilon) \times S$ επί του $(-\epsilon, \epsilon)S$ και το τελευταίο να είναι ανοιχτή περιοχή του y. Το S θα αποκαλείται στην συνέχεια *εγκάρσια τομή* της ροής στο y.

Ας υποθέσουμε οτι η $C^+(y)$ ξανατέμνει το S σε κάποιο θετικό χρόνο. Τότε

$$t = \inf\{s > 0 : sy \in S\} > \epsilon$$

και $ty \in S$, ενώ $(0,t)y \cap S = \varnothing$. Το σύνολο $C = [0,t]y \cup [y, ty]$ είναι μία απλή κλειστή καμπύλη, δηλαδή ομοιομορφικό με τον S^1, όπου με $[y, ty]$ έχουμε συμβολίσει το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα y και ty. Σύμφωνα με το θεώρημα Jordan-Schönflies, για το οποίο παραπέμπουμε στο [3, σελ. 115 και 169], το $\mathbb{R}^2 \setminus C$ έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες A, B, που έχουν κοινό σύνορο $\partial A = \partial B = C$ και το $\overline{A}$ είναι ομοιομορφικό με τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο, ενώ το B είναι μη-φραγμένο. Επιπλέον $\mathrm{int}\overline{A} = A$ και $\mathrm{int}\overline{B} = B$.

4.1. Λήμμα. *Είτε το A είναι θετικά αμετάβλητο είτε το B είναι θετικά αμετάβλητο.*

Απόδειξη. Επειδή το S είναι εγκάρσια τομή, έχουμε $(0,\epsilon](y,ty) \cap C = \varnothing$, όπου $(y,ty) = [y,ty] \setminus \{y,ty\}$ είναι το ανοιχτό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα y και ty. Αφού το $(0,\epsilon](y,ty)$ είναι συνεκτικό σύνολο, προκύπτει οτι είτε $(0,\epsilon](y,ty) \subset A$ είτε $(0,\epsilon](y,ty) \subset B$. Εστω οτι συμβαίνει το πρώτο. Τότε $[0,\epsilon][y,ty] \subset \overline{A}$ και συνεπώς

$$[0,\epsilon]C = [0,\epsilon][y,ty] \cup [0,t+\epsilon]y \subset \overline{A} \cup [0,t]y \cup [t,t+\epsilon]y \subset \overline{A} \cup [0,\epsilon](ty) \subset \overline{A}.$$

Εστω τώρα οτι υπάρχει $z \in A$, του οποίου η θετική ημιτροχιά δεν περιέχεται στο A. Τότε υπάρχει το

$$s = \sup\{r > 0 : [0,r]z \subset \overline{A}\} < +\infty$$

και $[0,s]z \subset \overline{A}$ και $sz \in \partial A$. Συνεπώς, $[s, s+\epsilon]z = [0,\epsilon](sz) \subset \overline{A}$, που είναι αντίφαση. Αυτό δείχνει οτι το A είναι θετικά αμετάβλητο και το ίδιο είναι και το $\mathrm{int}\overline{A} = A$. Ομοια, αν συμβαίνει η δεύτερη περίπτωση, τότε το B είναι θετικά αμετάβλητο. □

4.2. Θεώρημα. *Εστω $x \in \mathbb{R}^2$ και $y \in L^+(x)$. Αν το y δεν είναι σταθερό σημείο, τότε η τροχιά του y τέμνει κάθε εγκάρσια τομή το πολύ σ' ένα σημείο.*

Απόδειξη. Εστω S μία εγκάρσια τομή έκτασης $\epsilon > 0$. Ας υποθέσουμε οτι η τροχιά του y τέμνει το S σε τουλάχιστον δύο σημεία. Επειδή το σύνολο $T = \{t \in \mathbb{R} : ty \in S\}$ είναι διακριτό, αφού $|t - s| \geq 2\epsilon$ για κάθε t, $s \in T$, με $t \neq s$, λόγω της υπόθεσης που κάναμε, υπάρχουν t, $s \in T$ με $ty \neq sy$, $t - s > 2\epsilon$ και $(s,t)y \cap S = \varnothing$. Το σύνολο $C = (s,t)y \cup [sy, ty]$ είναι μία απλή κλειστή καμπύλη και το $\mathbb{R}^2 \setminus C$ έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες A και B, σύμφωνα με το θεώρημα Jordan-Schönflies. Από το λήμμα 4.1, μία από τις δύο είναι θετικά αμετάβλητη. Εστω οτι είναι η A. Αυτό σημαίνει οτι $(t, +\infty)y \subset A$ και $(-\infty, s)y \subset B$. Ομως $C(y) \subset L^+(x)$ και συνεπώς υπάρχει $r > 0$ ώστε $rx \in A$, αφού το A είναι ανοιχτό. Προκύπτει τώρα οτι

$$(-\infty, s)y \subset C(y) \subset L^+(x) \subset \overline{C^+(rx)} \subset \overline{A},$$

που είναι αντίφαση, γιατί $\overline{A} = \mathbb{R}^2 \setminus B$. □

4.3. Πόρισμα. *Εστω $x \in \mathbb{R}^2$ ώστε το $\overline{C^+(x)}$ να είναι συμπαγές. Αν $y \in L^+(x)$ και το y δεν είναι περιοδικό, τότε το $L^+(y)$ αποτελείται από σταθερά σημεία.*

Απόδειξη. Επειδή $\overline{C(y)} \subset L^+(x) \subset \overline{C^+(x)}$, το $\overline{C(y)}$ είναι επίσης συμπαγές και συνεπώς $L^+(y) \neq \varnothing$. Εστω $z \in L^+(y)$. Υποθέτουμε οτι το z δεν είναι σταθερό σημείο, οπότε ούτε το y είναι και θα δείξουμε οτι τότε το y πρέπει να είναι περιοδικό σημείο. Κατ' αρχήν υπάρχουν $t_n \to +\infty$ ώστε $t_n y \to z$. Θεωρούμε μία εγκάρσια τομή S στο z με έκταση $\epsilon > 0$. Αφού το $(-\epsilon, \epsilon)S$ είναι ανοιχτή περιοχή του z, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $t_n y \in (-\epsilon, \epsilon)S$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς, υπάρχουν $|s_n| < \epsilon$ ώστε $(s_n + t_n)y \in S$, $n \geq n_0$. Από το θεώρημα 4.2, η τροχιά του y τέμνει το S το πολύ σ' ένα σημείο. Πρέπει λοιπόν $(s_n + t_n)y = (s_{n_0} + t_{n_0})y$ ή ισοδύναμα $(s_n - s_{n_0} + t_n - t_{n_0})y = y$ για κάθε $n \geq n_0$. Επειδή $t_n \to +\infty$ υπάρχει κάποιο $n \geq n_0$ ώστε $s_n - s_{n_0} + t_n - t_{n_0} > 0$. Αφού το y δεν είναι σταθερό, αυτό σημαίνει οτι το y είναι περιοδικό. □

4.4. Λήμμα. *Εστω $x \in \mathbb{R}^2$ ένα μη-περιοδικό σημείο και S μία εγκάρσια τομή με άκρα a, $b \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$, δηλαδή $S = i((0,1))$, όπου $i : (0,1) \to \mathbb{R}^2$ είναι η τοπολογική εμφύτευση $i(s) = (1-s)a + sb$, με αριθμητικούς πολλαπλασιαμούς στο δεύτερο μέλος. Εστω $t_1 < t_2 < t_3$ ώστε $t_j x \in S$, δηλαδή $t_j x = i(s_j)$ για κάποια $0 < s_j < 1$, $j = 1, 2, 3$, είναι τρείς διαδοχικές τομές της τροχιάς του x με το S. Αν $s_1 < s_2$, τότε $s_1 < s_2 < s_3$.*

Απόδειξη. Το σύνολο $C = [t_1, t_2]x \cup i([s_1, s_2])$ είναι μία απλή κλειστή καμπύλη, που διαχωρίζει το $\mathbb{R}^2$ σε δύο ακριβώς συνεκτικές συνιστώσες A, B, σύμφωνα με το θεώρημα Jordan-Schönflies. Από το λήμμα 4.1, είτε το A είναι θετικά αμετάβλητο είτε το B είναι. Συνεπώς, $(t_2, +\infty)x \subset A$ είτε $(t_2, +\infty)x \subset B$. Αρα $i(s_3) = t_3 x \in A \cup B$, απ' όπου προκύπτει οτι είτε $s_1 < s_2 < s_3$ είτε $s_3 < s_1 < s_2$, αφού $i([s_1, s_2]) \subset \partial A$. Για να αποκλείσουμε την δεύτερη περίπτωση, εφαρμόζουμε αυτό που ήδη αποδείξαμε για την διαφορική εξίσωση $x' = -f(x)$, της οποίας η ροή είναι η $\psi(t,x) = \phi(-t,x)$. Επειδή $-t_3 < -t_2 < -t_1$, αν $s_3 < s_2$, τότε είτε $s_1 < s_3 < s_2$ είτε $s_3 < s_2 < s_1$, που είναι αντίφαση. □

4.5. Θεώρημα. (Poincaré-Bendixson) *Εστω $x \in \mathbb{R}^2$ ώστε το $\overline{C^+(x)}$ να είναι συμπαγές. Αν το $L^+(x)$ δεν περιέχει σταθερά σημεία, τότε το $L^+(x)$ είναι μία περιοδική τροχιά.*

Απόδειξη. Αν το $L^+(x)$ δεν περιέχει σταθερά σημεία, τότε από το πόρισμα 4.3 περιέχει μόνον περιοδικές τροχιές. Αν το ίδιο το x είναι περιοδικό, τότε $L^+(x) = C(x)$. Εστω οτι το x δεν είναι περιοδικό και $y \in L^+(x)$. Το y είναι περιοδικό. Θα δείξουμε οτι $L^+(x) = C(y)$. Θεωρούμε μία εγκάρσια τομή S στο y έκτασης $\epsilon > 0$, με άκρα a, $b \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$. Εστω $i : (0,1) \to \mathbb{R}^2$ η τοπολογική εμφύτευση $i(s) = (1-s)a + sb$, με αριθμητικούς πολλαπλασιασμούς στο δεύτερο μέλος. Το σύνολο $\{t \geq 0 : tx \in S\}$ είναι διακριτό, συνεπώς αριθμήσιμο και αποτελείται από τους όρους μίας μη-φραγμένης, γνήσια αύξουσας ακολουθίας $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $t_{n+1} - t_n \geq 2\epsilon$. Το y είναι ένα οριακό σημείο της ακολουθίας $(t_n x)_{n\in\mathbb{N}}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μοναδικό $0 < s_n < 1$ με $i(s_n) = t_n x$. Από το λήμμα 4.4 προκύπτει επαγωγικά οτι η ακολουθία $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μονότονη και συνεπώς συγκλίνει, αφού είναι φραγμένη. Αρα $t_n x \to y$. Εστω τώρα οτι το y έχει περίοδο T. Τότε $T \geq 2\epsilon$ και $(T + t_n)x \to y$. Αφού το $(-\epsilon, \epsilon)S$ είναι ανοιχτή περιοχή του y, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $(T + t_n)x \in (-\epsilon, \epsilon)S$ για κάθε $n \geq n_0$. Ετσι υπάρχουν μοναδικά $|r_n| < \epsilon$ ώστε $(T + t_n + r_n)x \in S$, $n \geq n_0$. Εχουμε τώρα $T + t_n + r_n > t_n$ και συνεπώς υπάρχει $k_n \in \mathbb{N}$ ώστε $T + t_n + r_n = t_{n+k_n}$, $n \geq n_0$. Αρα

$$t_{n+1} - t_n \leq t_{n+k_n} - t_n = T + r_n < T + \epsilon, \qquad n \geq n_0.$$

Για να αποδείξουμε οτι $L^+(x) = C(y)$, αρκεί να δείξουμε οτι $\lim_{t\to+\infty} d(C(y), tx) = 0$. Εστω $\eta > 0$. Από την συνέχεια της ροής και την συμπάγεια του κλειστού διαστήματος $[-T - \epsilon, T + \epsilon]$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $d(tz, ty) < \eta$, όταν $d(y, z) < \delta$ και $|t| \leq T + \epsilon$. Υπάρχει $n_1 \geq n_0$ ώστε $d(t_n x, y) < \delta$, όταν $n \geq n_1$, οπότε $d((t + t_n)x, ty) < \eta$ για κάθε $|t| \leq T + \epsilon$, $n \geq n_1$. Για κάθε $t \geq t_{n_1}$ υπάρχει κάποιο $n \geq n_1$ ώστε $t_n \leq t \leq t_{n+1}$. Αφού $0 \leq t - t_n \leq t_{n+1} - t_n \leq T + \epsilon$ έχουμε

$$d(C(y), tx) \leq d(tx, (t - t_n)y) = d((t - t_n)(t_n x), (t - t_n)y) < \eta. \qquad \square$$

5. Εφαρμογές του θεωρήματος Poincaré-Bendixson

Το θεώρημα Poincaré-Bendixson είναι ένα κριτήριο ύπαρξης περιοδικής τροχιάς, υπό την προϋπόθεση της απουσίας σταθερών σημείων. Θα ολοκληρώσουμε την θεωρητική μελέτη της σχέσης αυτής.

5.1. Λήμμα. *Εστω X ένας μετρικός χώρος με μία ροή και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία περιοδικών σημείων με αντίστοιχες περιόδους $T_n \to 0$. Αν $x_n \to x$, τότε το x είναι σταθερό σημείο.*

Απόδειξη. Εστω οτι το x δεν είναι σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $t_0 > 0$ με $t_0 x \neq x$. Θέτουμε $a = d(x, t_0 x) > 0$. Από την συνέχεια της ροής υπάρχει $0 < T < t_0$ ώστε $d(x, tx) < a/8$ για κάθε $0 \leq t \leq T$ και επειδή το κλειστό διάστημα $[0, t_0]$ είναι συμπαγές, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $d(tx, ty) < a/8$, όταν $d(x, y) < \delta$ και $0 \leq t \leq t_0$. Ετσι για κάθε $0 \leq t \leq T$ και $d(x, y) < \delta$ έχουμε $d(x, ty) < a/4$. Αφού $x_n \to x$ και $T_n \to 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $0 \leq T_n \leq T$ και $d(x, x_n) < \delta$ για $n \geq n_0$. Συνεπώς $d(x, tx_n) < a/4$ για κάθε $0 \leq t \leq T_n$ και $n \geq n_0$, που σημαίνει οτι $d(x, tx_n) < a/4$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Αρα

$$\frac{a}{4} > d(x, t_0 x_n) \geq d(x, t_0 x) - d(t_0 x, t_0 x_n) > a - \frac{a}{8}. \quad \square$$

5.2. Πρόταση. *Εστω X ένας μετρικός χώρος με μία ροή ϕ. Εστω A ένα μη-κενό, συμπαγές και θετικά αμετάβλητο σύνολο. Αν το A είναι ομοιομορφικό με την n-διάστατη κλειστή μοναδιαία μπάλλα $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, για κάποιο $n \geq 1$, τότε το A περιέχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μία ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $t_n \to 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\phi_{t_n}(A) = t_n A \subset A$, αφού το A είναι θετικά αμετάβλητο. Από το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer, για το οποίο παραπέμπουμε στο [1, σελ. 341], η ϕ_{t_n} έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο στο A. Δηλαδή, υπάρχει $x_n \in A$ ώστε $t_n x_n = x_n$. Με άλλα λόγια, το x_n είναι σταθερό σημείο της ροής ή περιοδικό με περίοδο το πολύ t_n. Επειδή το A είναι συμπαγές, η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει τουλάχιστον ένα οριακό σημείο στο A, που από το λήμμα 5.1 πρέπει να είναι σταθερό σημείο της ροής. □

5.3. Θεώρημα. *Εστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ μία C^1 συνάρτηση. Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$, τότε η διαφορική εξίσωση $x' = f(x)$ στο $\mathbb{R}^2$ δεν έχει καμμία περιοδική λύση.*

Απόδειξη. Εστω οτι υπάρχει μία περιοδική λύση και C η αντίστοιχη τροχιά. Το C είναι απλή κλειστή καμπύλη και το $\mathbb{R}^2 \setminus C$ έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες A, B, που έχουν κοινό σύνορο την C και από τις οποίες η A είναι φραγμένη και το $\overline{A}$ είναι ομοιομορφικό με τον $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$. Αφού $\partial A = C$, το A και συνεπώς το $\overline{A}$ είναι θετικά αμετάβλητο. Από την πρόταση 5.2, το A περιέχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο x_0 της ροής, δηλαδή $f(x_0) = 0$. □

Η θεωρία Poincaré-Bendixson μας δίνει την δυνατότητα να αποφανθούμε, αν μία αυτόνομη διαφορική εξίσωση στο $\mathbb{R}^2$ έχει μη-σταθερές περιοδικές λύσεις, δεν μας λέει όμως πόσες.

5.4. Παράδειγμα. Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$x'' - x'(1 - x^2 - 2(x')^2) + x = 0$$

που ανάγεται στην πρώτης τάξης αυτόνομη διαφορική εξίσωση στο $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x + y(1 - x^2 - 2y^2)) \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή, εδώ έχουμε $f(x,y) = (y, -x + y(1 - x^2 - 2y^2))$. Το $(0,0)$ είναι το μοναδικό σταθερό σημείο. Οπως δείχνει η απόδειξη του θεωρήματος 5.3, κάθε ενδεχόμενη περιοδική τροχιά θα πρέπει να περικλείει το μοναδικό σταθερό σημείο. Θα προσπαθήσουμε να δούμε, αν υπάρχει σύνολο της μορφής $A(a,b) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x^2 + y^2 \leq b\}$ για κάποια $0 < a < b$, που είναι θετικά αμετάβλητο. Αν ναι, τότε το θετικό οριακό σύνολο κάθε σημείου του $A(a,b)$ θα είναι μία περιοδική τροχιά, σύμφωνα με το θεώρημα Poincaré-Bendixson.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $g(x,y) = x^2 + y^2$. Τότε

$$\langle \nabla g(x,y), f(x,y) \rangle = 2y^2(1 - x^2 - 2y^2).$$

Παρατηρούμε τώρα οτι

$$\langle \nabla g(x,y), f(x,y) \rangle \geq 0, \quad \text{για } x^2 + y^2 < \frac{1}{2} \quad \text{και}$$

$$\langle \nabla g(x,y), f(x,y) \rangle \leq 0, \quad \text{για } x^2 + y^2 > 1.$$

Αυτό σημαίνει οτι η g είναι αύξουσα κατά μήκος των κομματιών των λύσεων στο σύνολο $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{1}{2}\}$ και φθίνουσα στο $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$. Κατά συνέπεια το $A(1/2, 1)$ είναι θετικά αμετάβλητο και υπάρχει περιοδική τροχιά μέσα σ' αυτό.

Αναφορές

1. J. Dugundji, *Topology*, Allyn-Bacon, 1966.

2. M.C. Irwin, *Smooth dynamical systems*, Academic Press, 1980.

3. M.H.A. Newman, *Elements of the topology of plane sets of points*, Dover, 1992.

4. R.L.Renz, Equivalent flows on smooth Banach manifolds, *Indiana Math. J.* 20 (1971), 695-698.

Ενδεικτική βιβλιογραφία

1. N.P. Bhatia and G.P. Szegö, *Stability theory of dynamical systems*, Springer-Verlag, 1970.

2. C. Godbillon, *Dynamical systems on surfaces*, Springer-Verlag, 1983.

3. M.W. Hirsch and S. Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, 1974.

4. A. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press, 1995.

5. V.V. Nemytskii and V.V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*, Dover 1989.