

Ασκήσεις - 3. Αριθμητική Επίλυση ΜΔΕ

Ασκήσεις για προβλήματα αρχικών τιμών της μορφής:

$$(1) \quad u_t(x, t) + \alpha u_x(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T],$$

$$(2) \quad u(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Δείξτε ότι η μέθοδος upwind και Lax–Wendroff δίνουν την ακριβή λύση για $\lambda = 1$.

2. Θεωρούμε τη μέθοδο

$$(1 + \lambda)U_i^{j+1} + (1 - \lambda)U_{i-1}^{j+1} = (1 - \lambda)U_i^j + (1 + \lambda)U_{i-1}^j.$$

(α') Βρείτε το σφάλμα διακριτοποίησης της μεθόδου.

(β') Ποιά είναι η συνθήκη CFL για αυτή τη μέθοδο;

(γ') Αν για κάθε j η τιμή U_0^{j+1} είναι γνωστή δείξτε ότι το σχήμα είναι άμεσο.

(δ') Είναι ευσταθής;

3. Θεωρούμε τη μέθοδο

$$U_i^{j+1} = U_i^{j-1} - \lambda(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j).$$

(α') Βρείτε το σφάλμα διακριτοποίησης της μεθόδου.

(β') Ποιά είναι η συνθήκη CFL για αυτή τη μέθοδο;

(γ') Αν για κάθε j η τιμή U_0^{j+1} είναι γνωστή δείξτε ότι το σχήμα είναι άμεσο.

(δ') Δείξτε ότι είναι ευσταθής για $\lambda < 1$ και ασταθής για $\lambda < 1$;

4. Θεωρούμε τη μέθοδο

$$U_i^{j+1} = \frac{1}{4}\lambda(\lambda-1)U_{i-2}^j + \frac{1}{4}\lambda(5-\lambda)U_{i-1}^j - \frac{1}{4}(\lambda-1)(\lambda+4)U_i^j + \frac{1}{4}\lambda(\lambda-1)U_{i+1}^j.$$

(α') Βρείτε το σφάλμα διακριτοποίησης της μεθόδου.

(β') Ποιά είναι η συνθήκη CFL για αυτή τη μέθοδο;

(γ') Είναι η μέθοδος ευσταθής;

5. Θεωρούμε ένα αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιεί τις τιμές U_i^{j+1} , U_{i-1}^j , U_i^j και U_{i-1}^{j-1} , για την προσέγγιση της λύσης της εξίσωσης (1).

(α') Βρείτε το σχήμα ώστε η μέθοδος να είναι συνεπής και το σφάλμα διακριτοποίησης να είναι $O(h^2) + O(k)$

(β') Είναι η μέθοδος άμεση ή πεπλεγμένη;

(γ') Ποια είναι η συνθήκη CFL για αυτή τη μέθοδο;

(δ') Είναι ευσταθής;

6. Θεωρούμε ένα αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιεί τις τιμές U_{i+1}^{j+1} , U_i^{j+1} , U_{i-1}^{j+1} , U_{i+1}^j , U_i^j και U_{i-1}^j , για την προσέγγιση της λύσης της εξίσωσης (1).

(α') Βρείτε το σχήμα ώστε η μέθοδος να είναι συνεπής και το σφάλμα διακριτοποίησης να είναι $O(h^2) + O(k^2)$

(β') Είναι η μέθοδος άμεση ή πεπλεγμένη;

(γ') Ποια είναι η συνθήκη CFL για αυτή τη μέθοδο;

(δ') Είναι ευσταθής;