

**ΜΑΘ 235 – ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ Μ.Δ.Ε.
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1**

1. Η σχέση

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi),$$

με $\xi \in (x-h, x+h)$, χρησιμοποιείται συχνά για την αριθμητική προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου. Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα Taylor για τις $f(x+h)$ και $f(x-h)$, δείξτε ότι το σφάλμα αυτής της προσέγγισης έχει τη μορφή $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}h^{2n}$. Προσδιορίστε τους συντελεστές a_{2n} ακριβώς.

2. Δείξτε τις παρακάτω δύο σχέσεις για την προσέγγιση παραγώγων και δείξτε ότι και οι δύο είναι $O(h^4)$, βρίσκοντας τα σφάλματα.

$$f'(x) \approx \frac{1}{12h}[-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)],$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{12h}[f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h)].$$

3. Δείξτε ότι οι παρακάτω δύο σχέσεις προσεγγίζουν την τρίτη παράγωγο. Βρείτε τους όρους του σφάλματος και ποιά από τις δύο είναι πιο ακριβής.

$$f'''(x) \approx \frac{1}{h^3}[f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)],$$

$$f'''(x) \approx \frac{1}{2h^3}[f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)].$$