

**ΜΑΘ 235 – ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ Μ.Δ.Ε.
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 3**

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$u_t(x, t) - au_{xx}(x, t) = f(x, t), x \in (a, b), t > 0,$$

με $u(a, t) = A, u(b, t) = B$ και $u(x, 0) = u_0(x)$.

Θεωρούμε μια διαμέριση του (a, b) , $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b$. Επίσης για $k \in \mathbb{R}$ θέτουμε $t^j = jk, j = 0, 1, 2, \dots$. Κατασκευάζουμε διάνυσματα $U^j \in \mathbb{R}^{n+2}$, των οποίων η κάθε μια συνιστώσα U_i^j αποτελεί προσέγγιση της $u(x_{i-1}, t^j), i = 1, \dots, n+2$. Θεωρούμε ότι $U_1^j = A$ και $U_{n+2}^j = B$.

Διατυπώστε τις μεθόδους πεπερασμένων διαφορών, άμεση Euler πεπλεγμένη Euler και Crank-Nicolson σε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό $x_i = ih, i = 0, \dots, n+1$, με $h = 1/(n+1)$ και δοσμένο k , για κάθε ένα από τα παρακάτω προβλήματα και βρείτε τα ζητούμενα διάνυσμα U^j .

- 1.** $u_t - u_{xx} = 0, x \in (0, 1), t > 0$, με $u(0, t) = 0, u(1, t) = 0$, και $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ βήμα διαμερισμού $h = 1/2$, και $k = 1/2$. Βρείτε το διάνυσμα προσέγγισης για $t = 2$, χρησιμοποιώντας κάθε μια από τις προτεινόμενες μεθόδους. Επαναλάβεται για $k = 1/8$. Συγκρίνεται με την ακριβή λύση $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$
- 2.** $u_t - u_{xx} = 2, x \in (0, 1), t > 0$, με $u(0, t) = 0, u(1, t) = 0$, και $u(x, 0) = \sin(\pi x) + x(1-x)$ βήμα διαμερισμού $h = 1/2$, και $k = 1/2$. Βρείτε το διάνυσμα προσέγγισης για $t = 2$, χρησιμοποιώντας κάθε μια από τις προτεινόμενες μεθόδους. Επαναλάβεται για $k = 1/8$. Συγκρίνεται με την ακριβή λύση $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) + x(1-x)$
- 3.** $u_t - \frac{1}{\pi^2} u_{xx} = 0, x \in (0, 1), t > 0$, με $u(0, t) = 0, u(1, t) = 0$, και $u(x, 0) = \cos(\pi(x - \frac{1}{2}))$ βήμα διαμερισμού $h = 1/2$, και $k = 1/2$. Βρείτε το διάνυσμα προσέγγισης για $t = 2$, χρησιμοποιώντας κάθε μια από τις προτεινόμενες μεθόδους. Επαναλάβεται για $k = 1/8$. Συγκρίνεται με την ακριβή λύση $u(x, t) = e^{-t} \cos(\pi(x - \frac{1}{2}))$