ΜΑΘ 235 – ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ Μ.Δ.Ε.
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 4

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$u_{tt}(x,t) - au_{xx}(x,t) = f(x,t), x \in (a,b),\ t > 0,$$

με $u(a,t) = A, u(b,t) = B$ και $u(x,0) = u_0(x)$, $u_t(x,0) = u_1(x)$.

Θεωρούμε μια διαμέριση του (a,b), $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} = b$. Επίσης για $k \in \mathbb{R}$ θέτουμε $t^j = jk$, $j = 0,1,2,\ldots$. Κατασκευάζουμε διανύσματα $U^j \in \mathbb{R}^{n+2}$, των οποίων η κάθε μια συνιστώσα U_i^j αποτελεί προσέγγιση της $u(x_{i-1}, t^j)$, $i = 1,\ldots,n+2$. Θεωρούμε ότι $U_1^j = A$ και $U_{n+2}^j = B$.

Διατυπώστε τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών Courant Friedrichs και Levy, σε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό $x_i = ih$, $i = 0,\ldots,n+1$, με $h = 1/(n+1)$ και δοσμένο k, για κάθε ένα από τα παρακάτω προβλήματα και βρείτε τα ζητούμενα διανύσματα U^j.

1. $u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in (0,1), t > 0,$ με $u(0,t) = 0, u(1,t) = 0,$ $u(x,0) = \sin(2\pi x)$ και $u_t(x,0) = 2\pi\sin(2\pi x)$, βήμα διαμερισμού $h = 1/2$, και $k = 1/2$. Βρείτε το διάνυσμα προσέγγισης για $t = 2$, χρησιμοποιώντας την προτεινόμενη μεθόδο. Επαναλάβεται για $k = 1/8$. Συγκρίνεται με την ακριβή λύση $u(x,t) = (\cos(2\pi t) + \sin(2\pi t))\sin(2\pi x)$

2. $u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in (0,1), t > 0,$ με $u(0,t) = 0, u(1,t) = 0,$ $u(x,0) = \sin(\pi x)$ και $u_t(x,0) = 0$ βήμα διαμερισμού $h = 1/2$, και $k = 1/2$. Βρείτε το διάνυσμα προσέγγισης για $t = 2$, χρησιμοποιώντας την προτεινόμενη μεθόδο. Επαναλάβεται για $k = 1/8$. Συγκρίνεται με την ακριβή λύση $u(x,t) = \cos(\pi t)\sin(\pi x)$

3. $u_{tt} - \dfrac{1}{16\pi^2}u_{xx} = 0, x \in (0,1/2), t > 0,$ με $u(0,t) = 0, u(1/2,t) = 0,$ $u(x,0) = 0$ και $u_t(x,0) = \sin(4\pi x)$ βήμα διαμερισμού $h = 1/4$, και $k = 1/2$. Βρείτε το διάνυσμα προσέγγισης για $t = 2$, χρησιμοποιώντας την προτεινόμενη μεθόδο. Επαναλάβεται για $k = 1/8$. Συγκρίνεται με την ακριβή λύση $u(x,t) = \sin(t)\sin(4\pi x)$