**ΜΑΘ 235 – ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ Μ.Δ.Ε.**
**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 5**

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$u_t(x,t) + a u_x(x,t) = 0, x \in (a,b),\ t > 0,$$

με $u(a,t) = u_a(t),$ και $u(x,0) = u_0(x)$.

Θεωρούμε μια διαμέριση του $(a,b)$, $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} = b$. Επίσης για $k \in \mathbb{R}$ θέτουμε $t^j = jk$, $j = 0,1,2,\ldots$. Κατασκευάζουμε διανύσματα $U^j \in \mathbb{R}^{n+2}$, των οποίων η κάθε μια συνιστώσα $U_i^j$ αποτελεί προσέγγιση της $u(x_{i-1},t^j)$, $i = 1,\ldots,n+2$. Θεωρούμε ότι $U_1^j = A$ και $U_{n+2}^j = B$.

Διατυπώστε μια μέθοδο πεπερασμένων διαφορών που να ικανοποιείται η συνθήκη Courant Friedrichs και Levy, σε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό $x_i = ih$, $i = 0,\ldots,n+1$, με $h = 1/(n+1)$ και δοσμένο $k$, για κάθε ένα από τα παρακάτω προβλήματα και βρείτε τα ζητούμενα διανύσματα $U^j$.

**1.** $u_t + u_x = 0, x \in (0,2), t > 0,$ με $u(0,t) = -\sin(\pi t)$, και $u(x,0) = \sin(\pi x)$, βήμα διαμερισμού $h = 1/2$, και $k = 1/2$. Βρείτε το διάνυσμα προσέγγισης για $t = 2$, χρησιμοποιώντας την προτεινόμενη μεθόδο. Επαναλάβεται για $k = 1/8$. Συγκρίνεται με την ακριβή λύση $u(x,t) = \sin(\pi(x-t))$

**2.** $u_t + a(x)u_x = 0, x \in (0,2), t > 0,$ με α(ξ)=ξ-1/2, $u(0,t) = -\sin(\pi t/2)$, και $u(x,0) = \sin(\pi x)$, βήμα διαμερισμού $h = 1/2$, και $k = 1/2$. Βρείτε το διάνυσμα προσέγγισης για $t = 2$, χρησιμοποιώντας την προτεινόμενη μεθόδο. Επαναλάβεται για $k = 1/8$. Συγκρίνεται με την ακριβή λύση $u(x,t) = \sin(\pi(x - a(x)t))$