

Ασκήσεις - 2. Αριθμητική Επίλυση ΜΔΕ

Ασκήσεις για προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών της μορφής:

- (1) $u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in [a, b] \times [0, T],$
 (2) $u(x, 0) = g(x), \quad x \in [a, b]$
 (3) $u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad t \in [0, T].$

1. Θεωρούμε τη μέθοδο $U_i^{j+1} = \lambda U_{i+1}^j + (1 - 2\lambda - \beta k)U_i^j + \lambda U_{i-1}^j$ για την επίλυση της εξίσωσης της θερμότητας.
 - (α') Είναι η μέθοδος άμεση ή πεπλεγμένη;
 - (β') Είναι η μέθοδος ευσταθής;
 - (γ') Για ποιές τιμές του β , αν υπάρχουν, είναι η μέθοδος συνεπής;
2. Θεωρούμε την εξίσωση της θερμότητας 1, με αρχική συνθήκη, 2 και συνοριακές συνθήκες $u_x(0, t) = \alpha$, και $u(1, t) = 0$.
 - (α') Γράψτε ένα πεπλεγμένο αριθμητικό σχήμα με σφάλμα διακριτοποίησης $O(k) + O(h^2)$. Εκφράστε τη μέθοδο και σε μορφή πίνακα.
 - (β') Γράψτε ένα πεπλεγμένο αριθμητικό σχήμα με σφάλμα διακριτοποίησης $O(k^2) + O(h^2)$. Εκφράστε τη μέθοδο και σε μορφή πίνακα.
3. Θεωρούμε ένα αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιεί τις τιμές U_{i-1}^{j+1} , U_i^{j+1} , U_{i+1}^j και U_{i+1}^j , για την προσέγγιση της λύσης της εξίσωσης της θερμότητας.
 - (α') Βρείτε το σχήμα ώστε η μέθοδος να είναι συνεπής.
 - (β') Ποιά είναι το σφάλμα διακριτοποίησης;
 - (γ') Είναι η μέθοδος άμεση ή πεπλεγμένη;
 - (δ') Είναι ευσταθής;
4. Θεωρούμε ένα αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιεί τις τιμές U_{i-1}^{j+1} , U_{i+1}^{j+1} , U_{i-1}^j , U_i^j , U_{i+1}^j , U_{i-1}^{j-1} και U_{i+1}^{j-1} , για την προσέγγιση της λύσης της εξίσωσης της θερμότητας.
 - (α') Βρείτε το σχήμα ώστε η μέθοδος να είναι συνεπής.
 - (β') Ποιά είναι το σφάλμα διακριτοποίησης;
 - (γ') Είναι η μέθοδος άμεση ή πεπλεγμένη;
 - (δ') Είναι ευσταθής;
5. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$u_t(x, t) = Du_{xx}(x, t) - \beta u(x, t), \quad (x, t) \in [a, b] \times [0, T],$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in [a, b]$$

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

όπου D, β είναι θετικές σταθερές.

- (α') Γράψτε ένα πεπλεγμένο αριθμητικό σχήμα με σφάλμα διακριτοποίησης $O(k) + O(h^2)$. Εκφράστε τη μέθοδο και σε μορφή πίνακα.
- (β') Είναι αυτή η μέθοδος ευσταθής; Αν είναι υπό συνθήκες ποιά είναι η συνθήκη;

6. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$u_t(x, t) = Du_{xx}(x, t) - \alpha u_x(x, t), \quad (x, t) \in [a, b] \times [0, T],$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in [a, b]$$

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

όπου D, α είναι σταθερές και D είναι θετική.

(α') Γράψτε ένα πεπλεγμένο αριθμητικό σχήμα με σφάλμα διακριτοποίησης $O(k) + O(h^2)$. Εκφράστε τη μέθοδο και σε μορφή πίνακα.

(β') Είναι αυτή η μέθοδος ευσταθής; Αν είναι υπό συνθήκες ποιά είναι η συνθήκη;

7. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$u_t(x, t) = Du_{xx}(x, t) + \mu(x)u_x(x, t), \quad (x, t) \in [a, b] \times [0, T],$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in [a, b]$$

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

όπου D, μ είναι θετικές σταθερές.

(α') Γράψτε ένα άμεσο αριθμητικό σχήμα με σφάλμα διακριτοποίησης $O(k) + O(h^2)$. Εκφράστε τη μέθοδο και σε μορφή πίνακα.

(β') Είναι αυτή η μέθοδος ευσταθής; Αν είναι υπό συνθήκες ποιά είναι η συνθήκη;

8. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$u_t(x, t) = Du_{xx}(x, t) - \beta u(x, t), \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, T],$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, 1]$$

$$u(0, t) = h(t), \quad u(1, t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

όπου D, β είναι θετικές σταθερές.

(α') Γράψτε ένα πεπλεγμένο αριθμητικό σχήμα με σφάλμα διακριτοποίησης $O(k^2) + O(h^2)$. Εκφράστε τη μέθοδο και σε μορφή πίνακα.

(β') Είναι αυτή η μέθοδος ευσταθής; Αν είναι υπό συνθήκες ποιά είναι η συνθήκη;