

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ
ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
2η Εργαστηριακή Άσκηση

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$(1) \quad \begin{aligned} u_t - u_{xx} &= f, & \text{στο } [a, b] \times [0, T], \\ u_x(a, \cdot) &= u(b, \cdot) = 0, & \text{στο } [0, T], \\ u(\cdot, 0) &= u_0, & \text{στο } [a, b]. \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι $f \in C([a, b] \times [0, T])$.

Γράψτε ένα πρόγραμμα σε Matlab το οποίο να λύνει το πρόβλημα (1) με τη πεπλεγμένη μέθοδο του Euler. Θεωρούμε μια διαμέριση του $[a, b]$ με βήμα $h = (b - a)/(N + 1)$, $x_i = a + ih$, και μια διαμέριση του $[0, T]$ με βήμα $k = T/M$, $t_j = jk$. Για τη διακριτοποίηση της συνοριακής συνθήκης $u_x(a, t) = 0$, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα σημείο $x_{-1} = a - h$ και να υποθέσουμε ότι $U_{-1}^j = U_1^j$, οπότε η μέθοδος στο σημείο (x_0, t^j) , για $j \geq 1$, γράφεται

$$(2) \quad \frac{U_0^j - U_0^{j-1}}{k} - 2 \frac{U_1^j - U_0^j}{h^2} = f(x_0, t_j), \quad j = 1, \dots, M.$$

Μια διαφορετική προσέγγιση παίρνουμε αν θεωρήσουμε ότι

$$(3) \quad U_0^j = U_1^j, \quad j = 1, \dots, M.$$

Εφαρμογές:

- Θεωρούμε το πρόβλημα (1) με $a = 0$, $b = 1$, $f = 0$, $u_0(x) = \cos(\pi x/2)$, $T = 1$. Η ακριβής λύση είναι η $u(x, t) = e^{-(\pi/2)^2 t} \cos(\pi x/2)$. Για $N = 2^m - 1$, $M = 2^m$, $m = 2, \dots, 7$, υπολογίστε τις λύσεις U_i^j , $i = 0, \dots, N$, $j = 0, \dots, M$, με την μέθοδο (2) και τυπώστε τα βήματα $h_m = (b - a)/(N + 1)$ και τα σφάλματα $\epsilon_m = \max_{0 \leq j \leq M} \max_{0 \leq i \leq N} |U_i^j - u(x_i, t_j)|$, καθώς και τους λόγους

$$\log\left(\left|\frac{\epsilon_{m+1}}{\epsilon_m}\right|\right) / \log\left(\left|\frac{h_{m+1}}{h_m}\right|\right).$$

- Επαναλάβετε τα παραπάνω για τη μέθοδο (3).
- Επαναλάβετε τα παραπάνω για τις μεθόδους (2) και (3), με $N = 2^m - 1$, $M = 2^{2m+1}$, $m = 2, \dots, 7$.

Εξέταση

Μπορείτε να δουλέψετε σε ομάδες των δύο ατόμων αν θέλετε αλλά ο συνεργάτης σας πρέπει να είναι πάντα ο ίδιος και στις επόμενες εργαστηριακές ασκήσεις. Ονομάστε τα πρόγραμμα σας `bwdeuler1XXXXY.m` και `bwdeuler2XXXX.m`, όπου `XXXX` είναι ο αριθμός μητρώου σας (αν είστε σε ομάδα διαλέξτε το μικρότερο από τους δύο αριθμούς μητρώου). Μην ξεχάσετε να γράψετε τα ονόματά σας σε κάποιο σχόλιο στην αρχή του προγράμματος. Κατά την εξέταση θα πρέπει να είστε σε θέση να απαντήσετε σε τυχόν ερωτήσεις που θα σας τεθούν. Στείλτε με e-mail (ως attached) το πρόγραμμα σας στην περιοχή `math2513@math.uoc.gr`.

Ημερομηνία παράδοσης: 13/12/2011.