

Ασκήσεις - 4. Αριθμητική Επίλυση ΜΔΕ

Ασκήσεις για προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών της μορφής:

- (1) $u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in [a, b] \times [0, T],$
(2) $u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [a, b]$
(3) $u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad t \in [0, T].$

1. Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση $u_{tt} + u_t = u_{xx}$, με τις συνοριακές και αρχικές συνθήκες (2) και (3). Βρείτε ένα άμεσο σχήμα για αυτό το πρόβλημα. Εξηγήστε πως προσεγγίζεται τις αρχικές συνθήκες. Το σφάλμα διακριτοποίησης πρέπει να είναι $O(k^2) + O(h^2)$.
2. Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση $u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}(E(x)u_x)$, με τις συνοριακές και αρχικές συνθήκες (2) και (3). Έστω ότι η E είναι μια ομαλή και θετική συνάρτηση. Βρείτε ένα άμεσο σχήμα για αυτό το πρόβλημα. Εξηγήστε πως προσεγγίζεται τις αρχικές συνθήκες. Το σφάλμα διακριτοποίησης πρέπει να είναι $O(k^2) + O(h^2)$.
3. Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση $c^2 u_{tt} = u_{xx} - bu$, με τις συνοριακές και αρχικές συνθήκες (2), (3) και $g(x) = 0$. Βρείτε ένα άμεσο σχήμα για αυτό το πρόβλημα. Εξηγήστε πως προσεγγίζεται τις αρχικές συνθήκες. Το σφάλμα διακριτοποίησης πρέπει να είναι $O(k^2) + O(h^2)$.