ΜΑΘ 237 – ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2

1. Έστω ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(α΄) Αποδείξτε ότι ο A είναι θετικά ορισμένος.

(β΄) Αποδείξτε ότι για τη μέθοδο του Jacobi γι΄ αυτόν τον πίνακα ισχύει ότι $\rho(T_J) > 1$, δηλαδή ότι η μέθοδος του Jacobi αποκλίνει.

(γ΄) Αποδείξτε όμως ότι η μέθοδος του Jacobi συγκλίνει για κάθε 2×2 συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα.

2. Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ με πίνακα συντελεστών,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 1 & 1 & \frac{7}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Αποδείξτε ότι η μέθοδος του Jacobi συγκλίνει για οποιαδήποτε αρχική προσέγγιση $x^0 \in \mathbb{R}^3$, ενώ η μέθοδος των Gauss–Seidel γενικά αποκλίνει.

3. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\det(A) \neq 0$, $b \in \mathbb{R}^n$. Για τη λύση του συστήματος θεωρείται η διάσπαση $A = M - N$, και προτείνεται ο αλγόριθμος $Mx^{k+1} = Nx^k + b,$, $k = 0, 1, 2, \ldots, x^0 \in \mathbb{R}^n$ οποιοδήποτε. Να δειχθεί ότι αν $\|A^{-1}N\| < \frac{1}{2}$ για κάποια φυσική νόρμα, ο αλγόριθμος που προτείνεται συγκλίνει στη λύση του δοθέντος συστήματος.

4. Δίνεται ότι $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Να δειχθεί ότι:

(α΄) $\rho(A) < 1$ ανν ο $I - A$ είναι αντιστρέψιμος και η σειρά $\sum_{i=0}^{k} A^i$ συγκλινεί καθώς $k \to \infty$. (Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η ταυτότητα $(I - A)(I + A + A^2 \cdots + A^{k-1}) \equiv I - A^k$.)

(β΄) Επιπλέον αν $\rho(A) < 1$ τοτε $(I - A)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i$.

5. Να εξεταστεί αν συγκλίνουν οι μέθοδοι Jacobi και Gauss–Seidel που συνδέοναυι με το γραμμικό σύστημα

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix},$$

και να εκτελεστούν δύο επαναλήψεις κάθε μιας με αρχικό διάνυσμα $x^0 = (1, 1, 1)^T$ και διατηρώντας κλάσματα στους υπολογισμούς.