**ΜΑΘ 237 – ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ**
**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 4**

**1.** Έστω ότι ο πίνακας $A$ είναι θετικά ορισμένος και $b$ ένα δοσμένο διάνυσμα. Για κάθε $x$ το υπόλοιπο ορίζεται ως $r = b - Ax$, και το σφάλμα ως $e = A^{-1}b - x$. Δείξτε ότι $(r, x)$ είναι γνήσια θετικό εκτός αν $Ax = b$.

**2.** Έστω $A$ συμμετρικός, $Ax = b$ και $y \in \mathbb{R}^n$. Αν $f(y) = \frac{1}{2}(Ay, y) - (b, y)$, τότε δείξτε ότι

$$(x - y, A(x - y)) = (b, A^{-1}b) + 2f(y).$$

**3.** Δείξτε ότι για τη μέθοδο απότομης καθόδου

$$f(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)}) - \frac{\|r^{(k)}\|^4}{(Ar^{(k)}, r^{(k)})},$$

όπου $f(y) = \frac{1}{2}(Ay, y) - (b, y)$ και $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$.

**4.** Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ με $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -10 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ και $b = (1, -12, 2)^T$. Χρησιμοποιώντας ως $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, βρείτε το $x^{(2)}$ για τις μεθόδους Jacobi, Gauss–Seidel και συζυγών κλίσεων.

**5.** Να θεωρηθεί το $2 \times 2$ γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου $A = \text{diag}(1, \lambda)$, $\lambda > 0$, $b = (0, 0)^T$ και $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \setminus (0, 0)^T$. Αν $x^{(k)} = [x_1^{(k)}, x_2^{(k)}]^T$, να δειχθεί ότι η μέθοδος απότομης καθόδου δίνει:

$$x^{(k+1)} = \frac{x_1^{(k)} x_2^{(k)} (\lambda - 1)}{(x_1^{(k)})^2 + \lambda^3 (x_2^{(k)})^2} [\lambda^2 x_2^{(k)}, -x_1^{(k)}]^T.$$