

ΜΑΘ 237 – ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 5

1. Δίνονται τα διανύσματα $x^{(1)} = [1, 0, 1]^T$, $x^{(2)} = [0, 1, 1]^T$ και $x^{(3)} = [1, 1, 0]^T$. Να βρεθεί μια βάση ορθογώνιων διανυσμάτων $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $q^{(3)}$ και να δοθούν τα $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ ως γραμμικοί συνδυασμοί των $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $q^{(3)}$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της ορθογωνιοποίησης των Gram-Schmidt.
2. Να λυθεί το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, με $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ και $b = (2, 0, 2)^T$, με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων και αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = 0$.
3. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $A^T = A$, και διανύσματα $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, που είναι Α-ορθογώνια ανά δύο και τέτοια ώστε $(Ax_i, x_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$. Να δείξετε ότι τα $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ότι ο A είναι θετικά ορισμένος.
4. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ όχι απαραίτητα συμμετρικός ή θετικά ορισμένος. Αν τα $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, είναι Α-ορθογώνια ανά δύο και τέτοια ώστε $(Ax_i, x_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$, δείξετε ότι ο A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.