ΜΑΘ 237 – ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 6

1. (α΄) Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και S ένας αντιστρέψιμος πίνακας του $\mathbb{R}^{n\times n}$. Δείξτε ότι η $\|\cdot\|'$ η οποία ορίζεται ως $\|x\|' = \|Sx\|$ είναι μια νόρμα.

(β΄) Έστω $\|\cdot\|$ η φυσική νόρμα πινάκων η οποία επάγεται από την $\|\cdot\|$ νόρμα διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$, και S ένας αντιστρέψιμος πίνακας του $\mathbb{R}^{n\times n}$. Δείξτε ότι η $\|\cdot\|'$ η οποία ορίζεται ως $\|A\|' = \|SAS^{-1}\|$ είναι μια φυσική νόρμα πινάκων.

2. Έστω $A = D - L - U$ οι συνήθεις πίνακες στη μέθοδο Gauss–Seidel. Αποδείξτε ότι αν ο A είναι αυστηρά κυρίαρχος κατά γραμμές τότε $\|I - (D-L)^{-1}A\|_\infty < 1$.

3. Εξετάστε αν η φασματική ακτίνα ενός πίνακα ορίζει μια νόρμα πίνακα ή όχι.

4. Έστω $x^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$ η ακολουθία που προκύπτει από την επαναληπτική μέθοδο $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + M^{-1}b$, όπου $c \in \mathbb{R}^n$, $T = M^{-1}N$ και $A = M - N$. Αν $Ax = b$ και $\|T\| < 1$, δείξτε ότι

$$\|x^{(k)} - x\| \le \|T\|^k \|x^{(0)} - x\|, \quad k = 1, \dots,$$

και

$$\|x^{(k)} - x\| \le \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|, \quad k = 1, \dots$$

6. Να υποδειχθεί 'οικονομικός' τρόπος υπολογισμού, από την άποψη των πράξεων και της μνήμης του Η/Υ που απαιτείται, των διανυσμάτων $A^{-4}b$ και $A^{-1}BA^{-1}b$, όπου $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ δοσμένοι πίνακες, με A αντιστρέψιμο, και $b \in \mathbb{R}^n$ δοσμένο διάνυσμα.

5. Να αποδειχθεί ότι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}$$

είναι θετικά ορισμένος και να γίνει η ανάλυση Cholesky

6. Δίνεται ότι ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Να αποδειχθεί ότι τότε και ο πίνακας $\alpha A + \beta yy^T$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος για κάθε $\alpha > 0$, $\beta \ge 0$, και $y \in \mathbb{R}^n$. Στη συνέχεια, με βάση ότι εχεί αποδειχθεί το παραπάνω, να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \alpha+\beta & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \alpha+\beta & \dots & \beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta & \beta & \dots & \alpha+\beta \end{bmatrix}$$

είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τα παραπάνω να αποδειχθεί ότι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος και να γίνει η ανάλυση Cholesky.