

Ασκήσεις - 7
ΜΑΘ 2515 – Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

1. Να βρεθεί το $\min_{x \in \mathbb{R}^3} \|b - Ax\|_2$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

α'. Με τη λύση του συστήματος των κανονικών εξισώσεων.

β'. Με την QR ανάλυση χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο ορθογωνιοποίησης των Gram-Schmidt και

γ'. Να βρεθεί η τιμή $\min_{x \in \mathbb{R}^3} \|b - Ax\|_2$.

2. Να λυθεί το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

με τη μέθοδο της QR ανάλυσης χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο ορθογωνιοποίησης των Gram-Schmidt.

3. Να λυθεί το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

με τη μέθοδο της QR ανάλυσης χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο ορθογωνιοποίησης των Gram-Schmidt.

4. Να αποδειχθεί ότι η λύση των κανονικών εξισώσεων για το πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων συμπίπτει με τη λύση που δίνει η μέθοδος QR παραγοντοποίησης, για τη περίπτωση που ο A είναι πλήρους βαθμού.
5. Να λυθεί το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

με τη μέθοδο της QR ανάλυσης χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο ορθογωνιοποίησης των Gram-Schmidt.

6. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

α'. Να σχηματιστεί το σύστημα των κανονικών εξισώσεων και να λυθεί με τη μέθοδο του Cholesky

β'. Να επαληθευτεί ότι το διάνυσμα $r = Ax^* - b$, όπου x^* η λύση που πήραμε στο προηγούμενο ερώτημα, είναι ορθογώνιο προς κάθε ένα από τα διανύσματα-στήλες του A .

7. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

α'. Να βρεθεί $x \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε η ποσότητα $\|b - Ax\|_2$ να γίνεται ελάχιστη, και

β'. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παραπάνω ποσότητας.