ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
7/11/2011

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
1η Εργαστηριακή Άσκηση

Έστω $Ax = b$ με $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\det(A) \neq 0$ και $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Αν η κατάσταση του πίνακα A είναι κακή τότε η αριθμητική επίλυση των συστημάτων $Lu = b$ και $Ux = u$, (υποθέτουμε για ευκολία ότι δεν χρειάζονται εναλλαγές γραμμών) δίνει ως λύση ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $Ax \neq b$. Αυτό συμβαίνει λόγω σφαλμάτων στον υπολογιστή όπου οι πίνακες L, U της παραγοντοποίησης του A, δίνουν $LU \approx A$. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η όποια λύση παίρνεται από τον υπολογιστή μπορεί να τύχει παραπέρα βελτίωσης. Ο παρακάτω αλγόριθμος γνωστός ως 'Αλγόριθμος Επαναληπτικής Βελτίωσης Λύσης Γραμμικού Συστήματος ' προσπαθεί να επιτύχει βελτίωση της λύσης.

- Παραγοντοποίηση του A σε L, U (Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν αλλαγές γραμμών για ευκολία)
- Επίλυση των $Lu = b$ και $Ux = u$
- Για $k = 1$ εως k_{max} (Επιλέγουμε $k_{max} << n$)
  - $r = b - Ax$
  - Επίλυση των $Lu = r$ και $Uy = u$
  - Αν $\dfrac{\|y\|_\infty}{\|x\|_\infty} <$ TOL τότε ΤΕΛΟΣ
  - $x = x + y$

Γράψτε ένα πρόγραμμα σε γλώσσα MATLAB που να υλοποιεί τον παραπάνω αλγόριθμο. Ως μέθοδο παραγοντοποίησης του πίνακα A σε ανάλυση LU, μπορείτε να χρησιμοποιήσεται την έτοιμη ρουτίνα lu της MATLAB.

- Επιλύστε αριθμητικά τα παρακάτω γραμμικά συστήματα $Ax = b$. Στην περίπτωση που η αριθμητική λύση δεν είναι η ακριβής x, προσπαθήστε να βελτιώσετε την λύση χρησιμοποιώντας τον 'Αλγόριθμο Επαναληπτικής Βελτίωσης Λύσης Γραμμικού Συστήματος.'
- Γράψτε ένα πρόγραμμα για να βρείτε τον αντίστροφο του A^{-1}, όπου η $j-$στήλη προκύπτει από τη λύση του γραμμικού συστήματος $Ax^{(j)} = e^j$. Επαληθεύστε ότι συμβαίνει αυτό ελέγχοντας αν $A * \text{inv}(A) = I$. Αν το αποτέλεσμα δεν είναι το αναμενόμενο

προσπαθήστε να βρείτε ένα πίνακα B πιο 'κοντά' στον αντίστροφο του A.

Εφαρμογές

(1)

$$A = \begin{pmatrix} -17 & 262 & 128 \\ 10 & -159 & -21 \\ 1 & -16 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 373 \\ -170 \\ -16 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 26 & -77 & -234 & -177 \\ 2 & 8 & -11 & -298 \\ -2 & 1 & 19 & 118 \\ 1 & -3 & -9 & -6 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -462 \\ -299 \\ 136 \\ -17 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) Οι πίνακες Hilbert έχουν πολύ κακή κατάσταση $H_n \in \mathbb{R}^{n,n}$, $H_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$. Αν $b \in \mathbb{R}^n$, $b_i = \sum_{j=1}^n H_{ij}$, $i = 1, \ldots, n$ τότε η λύση του $Hx = b$ είναι $x = (1, \ldots, 1)^T$. Λύστε το γραμμικό σύστημα για $n = 5,\ 10,\ 15$.

Εξέταση

Μπορείτε να δουλέψετε σε ομάδες των δύο ατόμων αν θέλετε αλλά ο συνεργάτης σας πρέπει να είναι πάντα ο ίδιος και στις επόμενες εργαστηριακές ασκήσεις. Ονόμαστε το πρόγραμμα σας για τον 'Αλγόριθμο Επαναληπτικής Βελτίωσης Λύσης Γραμμικού Συστήματος refineXXXX όπου $XXXX$ είναι ο αριθμός μητρώου σας (αν είστε σε ομάδα διαλέξτε το μικρότερο από τους δύο αριθμούς μητρώου). Ονόμαστε το πρόγραμμα για τη 'βελτιώση' του αντιστρόφου improveXXXX. Μην ξεχάσετε να γράψετε τα ονόματα σας σε κάποιο σχόλιο στην αρχή του κάθε προγράμματος. Κατά την εξέταση θα πρέπει να παραδώσετε το πρόγραμμα σας τυπωμένο και να είστε σε θέση να απαντήσετε σε τυχόν ερωτήσεις που θα σας τεθούν. Στείτε με e-mail (ως attached) το πρόγραμμα σας και τις απαντήσεις σας στην περιοχή math2515@math.uoc.gr.

Ημερομηνία παράδοσης: 14/11/2011.