4. Ομοιόμορφες προσεγγίσεις συναρτήσεων: Χαρακτηρισμός και υπολογισμός βελτίστων ομοιόμορφων προσεγγίσεων - Πολυώνυμα Chebyshev

Προσεγγιστικότητα - Τάξη προσεγγίσεως

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την ομοιόμορφη προσέγγιση συνεχών συναρτήσεων σ' ένα διάστημα [a,b] με πολυώνυμα. Θα εργαστούμε δηλαδή στον σταθμητό χώρο $(C[a,b],\|\cdot\|_\infty)$ και θα προσεγγίζουμε με στοιχεία του $\mathbb{P}_n$, $n\in\mathbb{N}_0$. Η ύπαρξη βελτίστων προσεγγίσεων εξασφαλίζεται από το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας προσεγγίσεων. Η μοναδικότητα όμως δεν έπεται από τις μέχρι τώρα γενικές γνώσεις μας, αφού ο $(C[a,b],\|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι αυστηρά κυρτός. Θα δούμε ότι παρά το γεγονός αυτό, στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε και μοναδικότητα. Φυσικά μας ενδιαφέρει και ο υπολογισμός βέλτιστων ομοιόμορφων προσεγγίσεων. Εδώ τα πράγματα είναι ασυγκρίτως δυσκολότερα εκείνων του προηγούμενου κεφαλαίου, θα γνωρίσουμε όμως και γι' αυτή την περίπτωση κατάλληλες μεθόδους.
Θα μας απασχολήσει ακόμα η συμπεριφορά της αποστάσεως μιας συνεχούς συναρτήσεως από τον $\mathbb{P}_n$,όταν $n\longrightarrow\infty$, αν και με ποια ταχύτητα η απόσταση αυτή τείνει προς το μηδέν κ.λ.π.

Για να υπογραμμίσουμε τη σημασία της ομοιόμορφης προσέγγισης σημειώνουμε ότι εκτός της προφανούς σχέσεως $\forall x\in[a,b]\ \ |f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$, όταν $\|f-\varphi\|_\infty<\varepsilon$, έχουμε ακόμα για κάθε στάθμη $\|\cdot\|_p$ με $p\geq 1$

$$\forall g\in C[a,b]\quad \|g\|_p=\Big(\int_a^b|g(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}\leq \|g\|_\infty(b-a)^{1/p},$$

συνεπώς από $\|f-\varphi\|_\infty<\varepsilon$ έπεται $\|f-\varphi\|_p<(b-a)^{1/p}\varepsilon$. Καλές ομοιόμορφες προσεγγίσεις είναι λοιπόν και καλές προσεγγίσεις σε οποιαδήποτε στάθμη $\|\cdot\|_p$, $p\geq 1$.

Συμβολισμός

Έστω $f\in C[a,b]$ και p_n^* μια βέλτιστη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}_n$. Έχει επικρατήσει την απόσταση της f από τον $\mathbb{P}_n$, δηλαδή το μέγεθος $\|f-p_n^*\|_\infty$, να το συμβολίζουμε με $E_n(f;[a,b])$, δηλαδή

$$(4.1)\qquad \forall f\in C[a,b]\quad E_n(f;[a,b]):=\min_{p\in\mathbb{P}_n}\|f-p\|_\infty.$$

Επιπλέον όταν το διάστημα [a,b] εννοείται από τα συμφραζόμενα γράφουμε χάριν απλότητος $E_n(f)$ αντί για $E_n(f;[a,b])$.

Χαρακτηρισμός βελτίστων ομοιόμορφων πολυωνυμικών προσεγγίσεων.

Θα δούμε τώρα έναν χαρακτηρισμό βελτίστων ομοιόμορφων πολυωνυμικών προσεγγίσεων. Από αυτόν θα πάρουμε μετά εύκολα τη μοναδικότητα της βέλτιστης προσεγγίσεως. Αυτός ο χαρακτηρισμός αποτελεί επίσης το θεμέλιο των μεθόδων υπολογισμού της βέλτιστης προσέγγισης.

4.2 Ορισμός Έστω $e\in C[a,b]$. Λέμε ότι τα σημεία $x_0,\dots,x_m$ είναι σημεία εναλλαγής προσήμου του e αν $a\leq x_0<x_1<\dots<x_m\leq b$ και

$$e(x_k)e(x_{k+1})<0\quad,\quad k=0,\dots,m-1.$$

4.3 Θεώρημα (Χαρακτηρισμός βελτίστων ομοιόμορφων πολυωνυμικών προσεγγίσεων)
Έστω $f\in C[a,b]\setminus\mathbb{P}_n$. $p_n^*\in\mathbb{P}_n$ είναι μια βέλτιστη ομοιόμορφη

προσέγγιση της f (στο διάστημα [a,b]) από τον $\mathbb{P}_n$ τότε και μόνο τότε αν υπάρχουν n+2 σημεία εναλλαγής προσήμου της $e:=f-p_n^*$, $x_0,\dots,x_{n+1}$ για τα οποία ισχύει

$$|e(x_k)| = \|e\|_\infty \quad ,k=0,\dots,n+1.$$

Απόδειξη

i. Έστω κατ' αρχήν $x_0,\dots,x_{n+1}$ σημεία εναλλαγής προσήμου της e για τα οποία ισχύει $|e(x_k)| = \|e\|_\infty$. Θα δείξουμε τότε ότι p_n^* είναι μια βέλτιστη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}_n$.

Έστω ότι υπάρχει $p\in\mathbb{P}_n$ τέτοιο ώστε $\|f-p\|_\infty < \|f-p_n^*\|_\infty$. Τότε θα ισχύει προφανώς και

$$(*) \quad \forall\, k\in\{0,\dots,n+1\} \quad |f(x_k)-p(x_k)| < \|f-p_n^*\|_\infty = |f(x_k)-p_n^*(x_k)|.$$

Τα σημεία $x_0,\dots,x_{n+1}$ είναι σημεία εναλλαγής προσήμου της διαφοράς $p-p_n^*$. Πραγματικά αυτό έπεται από τη σχέση

$$p(x_k)-p_n^*(x_k) = [f(x_k)-p_n^*(x_k)]-[f(x_k)-p(x_k)]$$

αν λάβουμε υπ' όψιν μας την (*) και το γεγονός ότι $x_0,\dots,x_{n+1}$ είναι σημεί. εναλλαγής προσήμου της $f-p_n^*$. Το πολυώνυμο $p-p_n^*$ έχει συνεπώς μεταξύ x_k και x_{k+1} για $k=0,\dots,n$ τουλάχιστον μια ρίζα, συνολικά δηλαδή τουλάχιστον n+1 ρίζες, αφού όμως $p-p_n^*\in\mathbb{P}_n$ θα ισχύει $p=p_n^*$ που είναι άτοπο λόγω της υποθέσεως

$$\|f-p\|_\infty < \|f-p_n^*\|_\infty.$$

ii. Έστω τώρα ότι p_n^* είναι μια βέλτιστη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}_n$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν n+2 σημεία εναλλαγής προσήμου της $e:=f-p_n^*$, $x_0,\dots,x_{n+1}$ τέτοια ώστε $|e(x_k)| = \|e\|_\infty$, $k=0,\dots,n+1$.
Θα δείξουμε κατ' αρχήν ότι υπάρχουν δύο σημεία y_0, y_1 $[\alpha,b]$ τέτοια ώστε $|e(y_0)|=|e(y_1)|=\|e\|_\infty(=E_n(f))$ και $e(y_0)=-e(y_1)$.

Λόγω της συμπάγειας του [a,b] και της συνέχειας της e υπάρχει προφανώς ένα σημείο y_0 τέτοιο ώστε $|e(y_0)|=E_n(f)$. Έστω χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $e(y_0)=E_n(f)$. Αν υπάρχει $y_1\in[a,b]$ με $e(y_1)=-E_n(f)$ τελειώσαμε. Διαφορετικά $m:=\min\limits_{a\le x\le b} e(x) > -E_n(f)$, οπότε $c:=(E_n(f)+m)/2 > 0$.
Τώρα $p:=p_n^*+c\in\mathbb{P}_n$ και $f(x)-p(x)=e(x)-c$, οπότε

$$-(E_n(f)-c)=m-c \le e(x)-c \le E_n(f)-c \text{ δηλαδή}$$

$$\|f-p\|_\infty = E_n(f)-c \text{ , άτοπο.}$$

Έστω τώρα ότι υπάρχουν το πολύ N+1 σημεία εναλλαγής προσήμου για την συνάρτηση e τέτοια ώστε να ισχύει $|e(x_k)|=E_n(f)$, $k=0,\dots,N$. Κατά τα προηγούμενα ισχύει προφανώς $N\ge 1$. Θα δείξουμε ότι $N \ge n+1$.
Έστω $N\le n$. Λόγω της ομοιόμορφης συνέχειας της e στο [a,b] υπάρχουν σημεία $a=t_0<t_1<\dots<t_s=b$ τέτοια ώστε

$$(**) \quad \forall\, k\in\{0,\dots,s-1\} \ \forall\, \xi,\eta\in[t_k,t_{k+1}] \ |e(\xi)-e(\eta)| < (1/2)E_n(f).$$

Αν ένα διάστημα $[t_k,t_{k+1}]$ περιέχει ένα σημείο t τέτοιο ώστε $e(t)=E_n(f)$ το καλούμε (+) διάστημα, αν περιέχει ένα σημείο t τέτοιο ώστε $e(t)=-E_n(f)$ το καλούμε (−) διάστημα. Λόγω της (**) σε ένα (+) διάστημα ισχύει για κάθε σημείο του x $e(x) > 0$, σε ένα (−) διάστημα $e(x) < 0$. (Φυσικά υπάρχουν και διαστήματα $[t_k,t_{k+1}]$ τα οποία δεν είναι ούτε (+) ούτε (−) διαστήματα). Γράφουμε τα διαστήματα $[t_k,t_{k+1}]$ τα οποία είναι (+) ή (−) διαστήματα κατά σειρά (από αριστερά προς τα δεξιά) σαν $I_1,I_2,\dots,I_r$, και έστω χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι το I_1 είναι ένα (+) διάστημα. Τώρα ταξινομούμε τα ανωτέρω διαστήματα ως εξής:

$\{ I_1, I_2, \ldots, I_{k_1} \}$ είναι (+) διαστήματα

$\{ I_{k_1+1}, I_{k_1+2}, \ldots, I_{k_2} \}$ είναι (-) διαστήματα

$\{ I_{k_2+1}, I_{k_2+2}, \ldots, I_{k_3} \}$ είναι (+) διαστήματα

.
.
.

$\{ I_{k_\ell+1}, I_{k_\ell+2}, \ldots, I_{k_{\ell+1}} \}$ είναι $(-1)^\ell$ διαστήματα.

Κάθε ένα από τα ανωτέρω σύνολα περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο, και προφανώς ισχύει $2 \leq l+1 \leq n+1$. Προφανώς ισχύει $I_{k_j} \cap I_{k_j+1} = \emptyset, j=1,\ldots,l$. Υπάρχουν λοιπόν σημεία $z_1,\ldots,z_\ell$ τέτοια ώστε

$$\forall x \in I_{k_j} \quad x < z_j \ , \quad \forall x \in I_{k_j+1} \quad x > z_j .$$

Θέτουμε $q(x) := (z_1-x)(z_2-x)\ldots(z_\ell-x)$. Προφανώς $q \in \mathbb{P}_n$ και

$$(***) \qquad \forall x \in I_k \quad e(x)q(x) > 0 \quad ,k=1,\ldots,r.$$

Έστω $R := [a,b] - \bigcup_{k=1}^{r} I_k$. Τότε $C := \max_{x \in R} |e(x)| < E_n(f)$.

Θέτουμε $M := \|q\|_\infty$ και έστω $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $\lambda M < \min(E_n(f)-C, C/2)$. Θα δείξουμε ότι $p := \lambda q + p_n^* \in \mathbb{P}_n$ είναι καλύτερη ομοιόμορφη προσέγγιση της f απ' ότι η βέλτιστη προσέγγιση p_n^*.

Για $x \in I_k$ ισχύει προφανώς $|e(x)| > E_n(f)/2 > |\lambda q(x)|$ και $\forall k \in \{1,\ldots,r\}$

$$\forall x \in I_k \quad |f(x)-p(x)| = |e(x)-\lambda q(x)| = |e(\overline{x})| - |\lambda q(x)| \leq E_n(f) - \lambda|q(x)| < E_n(f)$$

και

$$\forall x \in R \quad |f(x)-p(x)| = |e(x)-\lambda q(x)| \leq |e(x)| + \lambda|q(x)| \leq C+\lambda M < E\ (f),$$

συνεπώς $\|f-p\|_\infty < E_n(f) = \|f-p_n^*\|_\infty$, άτοπο!.

Θα δείξουμε τώρα την μοναδικότητα της βέλτιστης ομοιόμορφης πολυωνυμικής προσεγγίσεως.

4.4 Θεώρημα Έστω $f \in C[a,b]$, και p_n^* μια βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}_n$.
Τότε το p_n^* είναι η μοναδική βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}_n$, δηλαδή

$$\forall p \in \mathbb{P}_n - \{p_n^*\} \qquad \|f-p\|_\infty > \|f-p_n^*\|_\infty .$$

Απόδειξη

Έστω $p \in \mathbb{P}_n$ με $\|f-p\|_\infty = \|f-p_n^*\|_\infty = E_n(f)$. Κατά την πρόταση 2.5 και $q := (p+p_n^*)/2$ είναι βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f. Αλλά τότε υπάρχουν κατά το θεώρημα 4.3 σημεία $a \leq x_0 < x_1 \ldots < x_{n+1} \leq b$ και $\varepsilon \in \{-1,1\}$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$(f(x_k)-p(x_k))/2 + (f(x_k)-p_n^*(x_k))/2 = \varepsilon(-1)^k E_n(f) \quad , k=0,\ldots,n+1.$$

Λόγω $|f(x_k)-p(x_k)| \leq E_n(f)$ και $|f(x_k)-p_n^*(x_k)| \leq E_n(f)$ η ανωτέρω σχέση ισχύει μόνο αν

$$f(x_k)-p(x_k) = f(x_k)-p_n^*(x_k) = \varepsilon(-1)^k E_n(f) \quad , k=0,\ldots,n+1$$

δηλαδή $p(x_k) = p_n^*(x_k)$, $k=0,\ldots,n+1$ οπότε λόγω $p-p_n^* \in \mathbb{P}_n$ έχουμε $p=p_n^*$.

Έστω $f\in C[a,b]$, $p\in \mathbb{P}_n$ και έστω ότι υπάρχουν n+2 σημεία εναλλαγής προσήμου της $e:=f-p$, $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$. Αν επιπλέον ισχύει $|e(x_k)|=||e||_\infty$, $k=0,\ldots,n+1$, τότε p είναι κατά τα θεωρήματα 4.3 και 4.4 η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}_n$ και συνεπώς $E_n(f)=||f-p||_\infty$.

Θα δούμε τώρα ότι απλώς και μόνο η ύπαρξη n+2 σημείων εναλλαγής προσήμου της διαφοράς f-p μας επιτρέπει να δώσουμε φράγματα για το μέγεθος $E_n(f)$ τα οποία είναι χρήσιμα γιατί μπορούμε να δούμε πόσο ακόμα μπορεί να βελτιωθεί η προσέγγιση.

4.5 Θεώρημα Έστω $f\in C[a,b]$, $q\in \mathbb{P}_n$ και $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ σημεία εναλλαγής προσήμου της διαφοράς $e:=f-q$. Αν $c:=\min_{0\le k\le n+1}|e(x_k)|$ και $C:=||e||_\infty$, τότε ισχύει

$$c \leq E_n(f) \leq C.$$

Απόδειξη

Η σχέση $E_n(f) \leq C$ είναι αυτονόητη. Εστω $p\in \mathbb{P}_n$ η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f, $E_n(f) = ||f-p||_\infty$. Για να δείξουμε τη σχέση $c \leq E_n(f)$ υποθέτουμε $E_n(f) < c$, οπότε

$$\max_{0\le k\le n+1}|f(x_k)-p(x_k)| \leq ||f-p||_\infty = E_n(f) < \min_{0\le k\le n+1}|f(x_k)-q(x_k)|.$$

Λόγω $p-q=(f-q)-(f-p)$ από την ανωτέρω σχέση έπεται ότι

$$(p-q)(x_k)\ (f-q)(x_k) > 0,\ k=0,\ldots,n+1.$$

Συνεπώς σε κάθε διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ το πολυώνυμο $p-q\in \mathbb{P}_n$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα, δηλαδή στο [a,b] τουλάχιστον n+1 ρίζες, οπότε p=q, άτοπο.

Στα μέχρι τώρα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου εξετάσαμε την ομοιόμορφη προσέγγιση με πολυώνυμα. Αν δει κανείς προσεκτικά τις αποδείξεις θα διαπιστώσει ότι το μόνο πράγμα που χρησιμοποιήσαμε για τον $\mathbb{P}_n$ είναι ότι αν ένα στοιχείο του μηδενίζεται σε n+1 σημεία ($n+1=\dim \mathbb{P}_n$) τότε μηδενίζεται ταυτοτικά στο [a,b]. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να γενικεύσουμε τα αποτελέσματά μας (οι αποδείξεις παραμένουν σχεδόν λέξη προς λέξη ίδιες) και για άλλους υπόχωρους του C[a,b] που έχουν αυτή την ιδιότητα, πληρούν όπως λέμε την συνθήκη του Haar.

4.6 Ορισμός Λέμε ότι ένας υπόχωρος X του C[a,b] με $\dim X = n$ πληροί την συνθήκη του Haar, αν κάθε μη μηδενικό στοιχείο του X έχει (στο [a,b]) το πολύ n-1 ρίζες. Επίσης μερικές φορές λέμε ότι οι γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C[a,b]$ πληρούν (στο [a,b]) τη συνθήκη του Haar αν ο αντίστοιχος χώρος $\mathrm{span}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ πληροί τη συνθήκη του Haar.

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ (και για κάθε [a,b]!) ο $\mathbb{P}_n$ πληροί την συνθήκη του Haar. Γενικεύοντας έχουμε

4.7 Ορισμός Έστω $\varphi_1, \ldots \in C[a,b]$. Λέμε ότι $\{\varphi_1, \ldots\}$ είναι ένα σύστημα Chebyshev (στο [a,b]), αν για κάθε n οι συναρτήσεις $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ πληρούν τη συνθήκη του Haar.

Παρατήρηση: Μπορεί να δειχθεί ότι αν X υπόχωρος του C[a,b], $\dim X = n$, και για κάθε $f\in C[a,b]$ η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f από τον X ορίζεται μονοσήμαντα, τότε ο X πληροί τη συνθήκη του Haar.

4.8 Λήμμα Έστω $\varphi_1,\dots,\varphi_n \in C[a,b]$. Οι συναρτήσεις αυτές πληρούν στο $[a,b]$ ακριβώς τότε την συνθήκη του Haar, αν για κάθε n-άδα ανά δύο διαφορετικών μεταξύ των σημείων $(x_1,\dots,x_n)$ του $[a,b]$ ισχύει $\det((\varphi_k(x_\nu))_{k,\nu=1}^{n}) \neq 0$.

Απόδειξη: Άσκηση 4.1.

Παρατήρηση : Η προσέγγιση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών είναι γενικά πολύ πιο δύσκολη από την προσέγγιση συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Τα περισσότερα από τα αποτελέσματα του τρίτου κεφαλαίου μπορούν να γενικευθούν και για τέτοιες περιπτώσεις. Δεν ισχύει όμως το ίδιο και για τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου. Πραγματικά αν $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, συμπαγές με εσωτερικό σημείο, τότε δεν υπάρχουν υπόχωροι του $C(\Omega)$ διαστάσεως μεγαλύτερης του ένα οι οποίοι πληρούν την συνθήκη του Haar. Πραγματικά έστω $\varphi_1,\dots,\varphi_n \in C(\Omega)$ και $x_1,\dots,x_n \in \Omega$. Τότε αν $\det(\varphi_k(x_\nu)_{k,\nu=1}^{n})=0$ κατά το λήμμα 4.8 οι $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ δεν πληρούν την συνθήκη του Haar. Έστω $\det(\varphi_k(x_\nu)_{k,\nu=1}^{n}) \neq 0$. Κρατούμε τα $x_3,\dots,x_n$ σταθερά και μετατοπίζουμε τα x_1, x_2 συνεχώς έτσι ώστε να μη συμπέσουν μεταξύ των και με κανένα από τα $x_3,\dots,x_n$ και να ανταλλάξουν τελικά θέσεις. Τότε η ορίζουσα θα αλλάξει προφανώς πρόσημο οπότε λόγω της συνέχειας για κάποια θέση των x_1, x_2 θα μηδενισθεί, άρα η συνθήκη του Haar δεν πληρούται.

Πολυώνυμα Chebyshev.

Υπάρχουν ελάχιστες συναρτήσεις f για τις οποίες η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση $p_{n-1}^* \in \mathbb{P}_{n-1}$ μπορεί να προσδιορισθεί αναλυτικά. Μια σημαντική περίπτωση για την οποία αυτό μπορεί να γίνει είναι η συνάρτηση $q_n(x):=x^n$. Γι' αυτόν τον σκοπό θα χρησιμοποιήσουμε τα λεγόμενα πολυώνυμα Chebyshev (πρώτου είδους).

4.9 Πρόταση Για τις συναρτήσεις $T_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$T_n(x):=\cos(n \arccos x), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ισχύει ο αναδρομικός τύπος

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n \geq 2.$$

Για $n \geq 1$ T_n είναι ένα πολυώνυμο βαθμού ακριβώς n με μεγιστοβάθμιο συντελεστή 2^{n-1}.

Απόδειξη

$$T_n(x)=2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \iff T_n(x)+T_{n-2}(x)= 2xT_{n-1}(x) \iff$$

$$\iff \cos(n \arccos x) + \cos[(n-2) \arccos x] =$$

$$= 2x \cos[(n-1) \arccos x] \qquad (\text{θέτω } \vartheta:=\arccos x)$$

$$\iff \cos(n\vartheta) + \cos[(n-2)\vartheta] = 2\cos\vartheta \cos[(n-1)\vartheta] \iff$$

$$\iff \cos(n\vartheta)+\cos[(n-2)\vartheta]= 2\cos[n\vartheta-(n-2)\vartheta/2] \cos[n\vartheta+(n-2)\vartheta/2]$$

που ισχύει.

Τώρα $T_0(x)=1$, $T_1(x)=\cos(\arccos x)=x$.

Για n=1 λοιπόν ο ισχυρισμός ισχύει. Υποθέτουμε τώρα ότι $T_k \in \mathbb{P}_k$, $T_k(x) = 2^{k-1}x^k + \ldots$ για $k=1,\ldots,n-1$, και δείχνουμε τον ισχυρισμό για k=n.

Λόγω $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ ισχύει προφανώς $T_n \in \mathbb{P}_n$, και επιπλέον

$$T_n(x) = 2x(2^{n-2}x^{n-1} + p_{n-2}(x)) - r_{n-2}(x)\ , \text{ όπου } p_{n-2}, r_{n-2} \in \mathbb{P}_{n-2}, \text{ συνεπώς}$$

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + r(x) \quad \text{με } r \in \mathbb{P}_{n-1}\ .$$

4.10 Ορισμός Τα πολυώνυμα T_n, $n \in \mathbb{N}$, που δίνονται δια

$$(4.11)\qquad \begin{cases} T_0(x) := 1, \quad T_1(x) := x \\ T_n(x) := 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n \geq 2 \end{cases}$$

λέγονται πολυώνυμα Chebyshev (πρώτου είδους). Για $x \in [-1,1]$ ισχύει

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

4.12 Θεώρημα Έστω $q_n(x) := x^n$, και $p_{n-1} := q_n - (1/2^{n-1})T_n$. Τότε p_{n-1} είναι η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση του q_n από τον $\mathbb{P}_{n-1}$ στο διάστημα $[-1,1]$. Επιπλέον ισχύει

$$E_{n-1}(q_n;[-1,1]) = 1/2^{n-1}.$$

Απόδειξη

Για τα σημεία x_k, $x_k := \cos((n-k)/n\ \pi)$, $k=0,\ldots,n$, ισχύει

$$-1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$$

και

$$(q_n - p_{n-1})(x_k) = (1/2^{n-1})T_n(x_k) = (1/2^{n-1})\cos[n \arccos(\cos((n-k)/n)\pi)] =$$

$$= (1/2^{n-1})\cos(n\ ((n-k)/n)\ \pi) = 1/2^{n-1}(-1)^n(-1)^k$$

και

$$\|q_n - p_{n-1}\|_\infty = (1/2^{n-1})\|T_n\|_\infty = 1/2^{n-1}.$$

p_{n-1} είναι συνεπώς κατά το θεώρημα 4.2 η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση q_n από τον $\mathbb{P}_{n-1}$ στο διάστημα $[-1,1]$.

Από το ανωτέρω θεώρημα έπεται αμέσως το εξής πόρισμα.

4.13 Πόρισμα Το πολυώνυμο $(1/2^{n-1})T_n$ είναι η βέλτιστη προσέγγιση της μηδενικής συναρτήσεως από τον $\hat{\mathbb{P}}_n$ στο διάστημα $[-1,1]$, δηλαδή

$$(1/2^{n-1})T_n \in \hat{\mathbb{P}}_n \quad \text{και}$$

$$(4.14)\qquad \forall\ p \in \hat{\mathbb{P}}_n - \{(1/2^{n-1})T_n\} \qquad \|(1/2^{n-1})T_n\|_\infty < \|p\|_\infty.$$

Παρατήρηση: Αντίστοιχα αποτελέσματα του θεωρήματος 4.12 και του πορίσματος 4.13 λαμβάνουμε για κάθε διάστημα $[a,b]$ με το μετασχηματισμό

$$[-1,1] \longrightarrow [a,b]\ , \quad x \longmapsto ((b-a)/2)x + (b+a)/2\ .$$

Υπολογισμός βέλτιστων ομοιόμορφων προσεγγίσεων με τις μεθόδους του Remez.

Έστω X ένας υπόχωρος του $C[a,b]$, $\dim X = n$, ο οποίος πληροί τη συνθήκη του

Haar, π.χ $X=\mathbb{P}_{n-1}$, $f\in C[a,b]$, και $a\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_{n+1}\leqslant b$.
Θα δούμε κατ' αρχήν πώς υπολογίζεται η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f στα σημεία $x_1,\ldots,x_{n+1}$ από τον X, δηλαδή εκείνη η συνάρτηση $\varphi\in X$ για την οποία ισχύει

$$\forall\, g\in X-\{\varphi\}\quad \max_{1\leqslant k\leqslant n+1}|f(x_k)-\varphi(x_k)| < \max_{1\leqslant k\leqslant n+1}|f(x_k)-g(x_k)|.$$

Σ' αυτή την περίπτωση η φ λέγεται βέλτιστη διακριτή ομοιόμορφη προσέγγιση της f στα σημεία $x_1,\ldots,x_{n+1}$ από τον X.

Αν δίνονται m σημεία $x_1,\ldots,x_m$ με $m\leqslant n$, τότε όπως ξέρουμε από την Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση υπάρχει $\varphi\in X$ τέτοιο ώστε

$$\varphi(x_k)=f(x_k)\ ,\quad k=1,\ldots,m\quad (\text{πρόβλημα παρεμβολής}).$$

4.15 Λήμμα Έστω X ένας υπόχωρος του C[a,b] που πληροί την συνθήκη του Haar, $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ μια βάση του, $f\in C[a,b]$, και $a\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_{n+1}\leqslant b$.
Τότε:

i. το γραμμικό σύστημα

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x_\nu)c_k+(-1)^\nu c_{n+1}=f(x_\nu),\ \nu=1,\ldots,n+1, \tag{4.16}$$

λύνεται μονοσήμαντα.

ii. Αν $c_1,\ldots,c_{n+1}$ η λύση του γραμμικού συστήματος (4.16), τότε

$$\varphi:=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k$$

είναι η βέλτιστη διακριτή ομοιόμορφη προσέγγιση της f στα σημεία $x_1,\ldots,x_{n+1}$ από τον X, και ισχύει

$$|f(x_k)-\varphi(x_k)| = |c_{n+1}|,\ k=1,\ldots,n+1.$$

Απόδειξη

i. Έστω $(c_1,\ldots,c_{n+1})$ μια λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x_\nu)c_k+(-1)^\nu c_{n+1}=0,\quad 1\leqslant\nu\leqslant n+1.$$

Τώρα, αν $c_{n+1}=0$, τότε $\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x_\nu)c_k=0$, $1\leqslant\nu\leqslant n$, οπότε και $c_1=c_2=\ldots=c_n=0$, αφού σύμφωνα με το λήμμα 4.8 $\det(\varphi_k(x_\nu))_{k,\nu=1,\ldots,n}\neq 0$.
Αν $c_{n+1}\neq 0$ τότε προφανώς $(c_1,\ldots,c_n)\neq 0$. Σ' αυτή την περίπτωση όμως η συνάρτηση $\varphi:=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k$ είναι ένα μη μηδενικό στοιχείο του X με τουλάχιστον n ρίζες στο [a,b], αφού τα σημεία $x_1,\ldots,x_{n+1}$ είναι σημεία εναλλαγής του προσήμου της, άτοπο.

ii. (Πρόκειται για επανάληψη των επιχειρημάτων που χρησιμοποιήθηκαν στην απόδειξη i του θεωρήματος 4.3). Αν $g\in X$ τέτοιο ώστε

$$|f(x_k)-g(x_k)| < |c_{n+1}| = |f(x_k)-\varphi(x_k)|,\ k=1,\ldots,n+1$$

τότε γράφοντας

$$g(x_k)-\varphi(x_k)=[f(x_k)-\varphi(x_k)]-[f(x_k)-g(x_k)]$$

διαπιστώνουμε ότι τα $x_1,\ldots,x_{n+1}$ είναι σημεία εναλλαγής προσήμου της $g-\varphi$, οπότε η $g-\varphi$ έχει στο διάστημα [a,b] τουλάχιστον n ρίζες, οπότε $g-\varphi=0$, αφού dim X=n, που είναι άτοπο.

Επιχειρηματολογώντας όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 4.4 δείχνουμε ότι η βέλτιστη διακριτή ομοιόμορφη προσέγγιση ορίζεται μονοσήμαντα.

Θα γνωρίσουμε τώρα μεθόδους υπολογισμού (προσεγγίσεως) της βέλτιστης ομοιομόρφου προσεγγίσεως μιας συναρτήσεως $f \in C[a,b]$ από τον X στο διάστημα $[a,b]$. Θα περιγράψουμε το βήμα κάθε μεθόδου. Το πρώτο μέρος αναφέρεται και στις δύο για να αποφύγουμε τις επαναλήψεις.

Για σημεία $a \leq x_1^{(i)} < x_2^{(i)} < \dots < x_{n+1}^{(i)} \leq b$ υπολογίζουμε την βέλτιστη διακριτή προσέγγιση της f από τον X στα $x_k^{(i)}$, $k=1,\dots,n+1$, έστω $\varphi^{(i)}$ αυτή η συνάρτηση. Αν

$$|f(x_k^{(i)})-\varphi^{(i)}(x_k^{(i)})| = \|f-\varphi^{(i)}\|_\infty \ , \ k=1,\dots,n+1,$$

τότε η $\varphi^{(i)}$ είναι και βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f από τον X στο $[a,b]$, οπότε σταματάμε. Μπορούμε τώρα να υποθέσουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $f(x_k^{(i)}) - \varphi^{(i)}(x_k^{(i)}) \neq 0$, $k=1,\dots,n+1$ (δες την παρατήρηση στην επόμενη σελίδα). Η πρώτη μέθοδος του Remez (ή μέθοδος της απλής εναλλαγής) προχωρεί ως εξής:

Έστω $x^* \in [a,b]$ ένα σημείο για το οποίο ισχύει

$$|f(x_k^{(i)})-\varphi^{(i)}(x_k^{(i)})| < |f(x^*)-\varphi^{(i)}(x^*)| = \|f-\varphi^{(i)}\|_\infty \ , \ k=1,\dots n+1.$$

Αντικαθιστούμε τώρα ένα των σημείων $x_1^{(i)},\dots,x_{n+1}^{(i)}$ με το x^* κατά τέτοιο τρόπο ώστε τα προκύπτοντα σημεία $x_1^{(i+1)},\dots,x_{n+1}^{(i+1)}$ να είναι σημεία εναλλαγής προσήμου της $f-\varphi^{(i)}$. Είναι πολύ εύκολο να δει κανείς κατά ποιον τρόπο πρέπει να γ[ίνει] αυτή η αντικατάσταση. Αν π.χ. $x^* \in (x_{n+1}^{(i)},b]$ τότε στην περίπτωση που $(f(x_{n+1}^{(i)})-\varphi^{(i)}(x_{n+1}^{(i)}))\ (f(x^*)-\varphi^{(i)}(x^*))$ είναι θετικό αντικαθιστούμε το $x_{n+1}^{(i)}$ με το x^*, αν είναι αρνητικό αντικαθιστούμε το $x_1^{(i)}$ με το x^*. Όταν $x^* \in [a,x_1^{(i)})$ δουλεύουμε ανάλογα. Τέλος αν $x^* \in (x_k^{(i)},x_{k+1}^{(i)})$ τότε στην περίπτωση που $(f(x_k^{(i)})-\varphi^{(i)}(x_k^{(i)}))\ (f(x^*)-\varphi^{(i)}(x^*)) > 0$ αντικαθιστούμε το $x_k^{(i)}$ με το x^*, διαφορετικά αντικαθιστούμε το $x_{k+1}^{(i)}$ με το x^*. Άλλες περιπτώσεις δεν είναι δυνατές. Προσδιορίζουμε τώρα τη βέλτιστη διακριτή προσέγγιση της f στα σημεία $x_1^{(i+1)},\dots,x_{n+1}^{(i+1)}$, έστω την $\varphi^{(i+1)}$ κ.ο.κ.

Πριν προχωρήσουμε στην περιγραφή της δεύτερης μεθόδου ας δούμε μερικές ιδιότητες της πρώτης. Δείχνουμε κατ' αρχήν ότι, αν η μέθοδος δεν σταματήσει επειδή βρέθηκε η βέλτιστη προσέγγιση που ζητάμε, σε κάθε βήμα έχουμε

$$(4.17) \qquad |c_{n+1}^{(i+1)}| > |c_{n+1}^{(i)}|$$

όπου $c_{n+1}^{(i)}$ τέτοιο ώστε

$$f(x_k^{(i)})-\varphi^{(i)}(x_k^{(i)})=(-1)^k\ c_{n+1}^{(i)}$$

και αντίστοιχα

$$f(x_k^{(i+1)})-\varphi^{(i+1)}(x_k^{(i+1)})=(-1)^k\ c_{n+1}^{(i+1)}, \ k=1,\dots,n+1 \qquad \text{(δες την (4.16)).}$$

Πραγματικά έχουμε για $k=1,\dots,n+1$

$$(4.18) \qquad (\varphi^{(i+1)}-\varphi^{(i)})(x_k^{(i+1)}) = (f-\varphi^{(i)})(x_k^{(i+1)})-(f-\varphi^{(i+1)})(x_k^{(i+1)})$$

οπότε αν $x_\nu^{(i+1)} = x^*$ τότε προφανώς λόγω του θεωρήματος 4.5 για $k=\nu$ ισχύει

$$(4.19) \qquad \operatorname{sgn}\{(\varphi^{(i+1)}-\varphi^{(i)})(x_k^{(i+1)})\} = \operatorname{sgn}\{(f-\varphi^{(i)})(x_k^{(i+1)})\}.$$

(4.19) θα ισχύει και για $k \in \{1,\dots,n+1\}\setminus\{\nu\}$, οπότε η

Αν τώρα $|c_{n+1}^{(i)}| > |c_{n+1}^{(i+1)}|$ τότε η $\varphi^{(i+1)}-\varphi^{(i)}$ θα είχε στο $[a,b]$ $n+1$ σημεία εναλλαγής προσήμου, συνεπώς n ρίζες, άτοπο. Δεν μπορεί επίσης να ισχύει $|c_{n+1}^{(i)}| = |c_{n+1}^{(i+1)}|$. Γιατί n σημεία εκ των $x_k^{(i)}$ συμπίπτουν με n σημεία εκ των $x_k^{(i+1)}$, $k=1,\dots,n+1$, αυτά είναι μάλιστα τα σημεία $x_k^{(i+1)}$, $k \in \{1,\dots,n\}-\{\nu\}$. Από την (4.18) παίρνουμε τώρα για $k \neq \nu$ στην περίπτωση που

$$\operatorname{sgn}(f-\varphi^{(i)})(x_k^{(i+1)}) = \operatorname{sgn}(f-\varphi^{(i+1)})(x_k^{(i+1)})$$

ότι $(\varphi^{(i+1)}-\varphi^{(i)})(x_k^{(i+1)})=0$, οπότε $\varphi^{(i+1)}=\varphi^{(i)}$, άτοπο, και στην περίπτωση που

$$\operatorname{sgn}(f-\varphi^{(i)})(x_k^{(i+1)}) = -\operatorname{sgn}(f-\varphi^{(i+1)})(x_k^{(i+1)})$$

ότι η (4.19) ισχύει για $k=1,\ldots,n+1$, οπότε τελικά επίσης $\varphi^{(i+1)}=\varphi^{(i)}$, άτοπο.

Παρατήρηση: Κατά την (4.17) είναι προφανές ότι μόνο στο πρώτο βήμα μπορεί να συμβεί ότι $c_{n+1}^{(1)}=0$. Εναλλάσσουμε τότε ένα οποιοδήποτε των αρχικών σημείων με το x^* και έχουμε τότε $c_{n+1}^{(1)}\neq 0$.

Η (4.17) σημαίνει ότι δεν υπάρχει ανακύκλωση στη μέθοδο, δηλαδή αν σε κάποιο βήμα έχουμε τα σημεία $x_k^{(i)}$, $k=1,\ldots,n+1$, αποκλείεται να ξαναγυρίσουμε σε αυτά. Στην περίπτωση επομένως που ζητείται η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση μιας συναρτήσεως f σε έναν πεπερασμένο αριθμό σημείων $x_1,\ldots x_m$, $m>n+1$, η ανωτέρω μέθοδος μας δίνει αυτή την προσέγγιση σε το πολύ $\binom{m}{n+1}$ βήματα. Ακόμα μπορεί να δειχθεί ότι και όταν ζητείται η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f στο $[a,b]$ από τον X η κατά τον ανωτέρω τρόπο κατασκευαζόμενη ακολουθία $\varphi^{(i)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα προς την βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f από τον X, και ότι υπάρχει σταθερά $q<1$ (που εξαρτάται από την f) τέτοια ώστε

$$\forall\, i\in\mathbb{N} \quad d(f,X) - |c_{n+1}^{(i+1)}| \leq q\,\{d(f,X) - |c_{n+1}^{(i)}|\}, \text{ όπου}$$

$$d(f,X) := \inf_{\varphi\in X} \|f-\varphi\|_\infty .$$

Παρόμοια αποτελέσματα ισχύουν και για την μέθοδο της ολικής εναλλαγής (ή γενική μέθοδο του Remez) της οποίας το βήμα είναι:

Έστω $s_k^{(i)}\in[x_k^{(i)},x_{k+1}^{(i)}]$ τέτοιο ώστε $(f-\varphi^{(i)})(s_k^{(i)})=0$, $k=1,\ldots,n$, και $x_1^*\in[a,s_1]$, $x_k^*\in[s_{k-1},s_k]$, $k=2,\ldots,n+1$, $x_{n+2}^*\in[s_n,b]$ τοπικά ακρότατα της $f-\varphi^{(i)}$. Αντικαθιστούμε τώρα κάθε $x_k^{(i)}$, $k=1,\ldots,n+1$, με ένα εκ των στοιχείων $x_1^*,\ldots,x_{n+2}^*$ της ανωτέρω μορφής, έστω $x_k^{(i+1)}$, $k=1,\ldots,n+1$, τα προκύπτοντα σημεία κατά τρόπον ώστε

$$(4.20)\qquad \begin{cases} \max\limits_{1\leq k\leq n+1} |(f-\varphi^{(i)})(x_k^{(i)})| \leq \min\limits_{1\leq k\leq n+1} |(f-\varphi^{(i)})(x_k^{(i+1)}))|, \\[2ex] \max\limits_{1<k<n+1} |(f-\varphi^{(i)})(x_k^{(i+1)})| = \|f-\varphi^{(i)}\|_\infty . \end{cases}$$

Σημειώνεται ότι τα $x_1^*,\ldots,x_{n+2}^*$, δεν ορίζονται μονοσήμαντα, αλλά υπάρχουν πάντα τέτοια σημεία ώστε να πληρούται η (4.20). Οι αποδείξεις που παραλήφθησαν εδώ μπορούν να βρεθούν στο βιβλίο του G.Meinardus (βλέπε βιβλιογραφία) στις σελίδες 105-111.

Προσεγγιστικότητα.

Θα δούμε τώρα δύο σημαντικά θεωρήματα του Korovkin, άμεση συνέπεια των οποίων είναι τα θεωρήματα προσεγγίσεως του Weierstrass για συνεχείς συναρτήσεις με πολυώνυμα και για περιοδικές συναρτήσεις με τριγωνομετρικά πολυώνυμα.

4.21 Ορισμός Έστω $L : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$ ένας γραμμικός τελεστής (μια γραμμική απεικόνιση), δηλαδή έτσι ώστε να ισχύει

$$\forall\, \lambda\in\mathbb{R} \quad \forall f,\varphi\in C[a,b] \qquad L(\lambda f+\varphi)=\lambda L(f)+L(\varphi).$$

Λέμε ότι ο L είναι μονότονος (ή θετικός) αν ισχύει

$$f \geq \varphi \implies Lf \geq L\varphi \quad (\text{ή ισοδύναμα } f\geq 0 \implies Lf\geq 0).$$

Ο συμβολισμός $f \geqslant \varphi$ σημαίνει $\forall x \in [a,b] \quad f(x) \geqslant \varphi(x)$.

Παραδείγματα

i. Έστω $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C[a,b]$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \geqslant 0$, και $x_1, \dots, x_n \in [a,b]$. Τότε ο τελεστής $L : C[a,b] \longrightarrow [a,b]$, $L\varphi := \varphi(x_1)\varphi_1 + \dots + \varphi(x_n)\varphi_n$, είναι προφανώς μονότονος.

ii. Έστω $k \in C([a,b] \times [a,b])$, $k(x,y) \geqslant 0$, για $x,y \in [a,b]$. Τότε ο τελεστής $L : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$, $(L\varphi)(x) := \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy$, είναι επίσης μονότονος.

Για μονότονους τελεστές ισχύει το εξής αξιοπερίεργο θεώρημα.

4.22 Θεώρημα (Korovkin) Έστω $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία μονότονων τελεστών στον $C[a,b]$. Τότε με $q_k(x) := x^k$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} ||q_k - L_n q_k||_\infty = 0 \quad , \ k=0,1,2 \implies \tag{4.23}$$
$$\implies \forall f \in C[a,b] \quad \lim_{n\to\infty} ||f - L_n f||_\infty = 0.$$

Απόδειξη

Έστω $f \in C[a,b]$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $||f - L_n f||_\infty \longrightarrow 0$. Λόγω

$$|| (f/||f||_\infty) - L_n(f/||f||_\infty) ||_\infty \longrightarrow 0 \quad \implies \quad ||f - L_n f||_\infty \longrightarrow 0$$

υποθέτουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $||f||_\infty \leqslant 1$. Επειδή

$$||f - L_n f||_\infty \leqslant ||f - fL_n q_0||_\infty + ||fL_n q_0 - L_n f||_\infty \quad \text{και}$$

$$||f - fL_n q_0||_\infty = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - f(x)(L_n q_0)(x)| \leqslant ||f||_\infty ||q_0 - L_n q_0||_\infty \longrightarrow 0,$$

αρκεί να δείξουμε ότι $||fL_n q_0 - L_n f||_\infty \longrightarrow 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω της ομοιόμορφης συνέχειας της f στο $[a,b]$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\forall \ x_1, x_2 \in [a,b] \quad |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Έστω τώρα $x \in [a,b]$ σταθερό. Τότε λόγω $||f||_\infty \leqslant 1$ ισχύει προφανώς

$$\forall \ y \in [a,b] \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon + 2(x-y)^2/\delta^2.$$

Τώρα με $\gamma := 2/\delta^2$ αυτό γράφεται

$$\forall \ y \in [a,b] \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon + \gamma(x^2 - 2xy + y^2)$$

ή

$$|f(x)q_0 - f| \leqslant \varepsilon q_0 + \gamma(x^2 q_0 - 2xq_1 + q_2)$$

οπότε

$$|f(x)L_n q_0 - L_n f| \leqslant \varepsilon L_n q_0 + \gamma(x^2 L_n q_0 - 2xL_n q_1 + L_n q_2).$$

Συνεπώς έχουμε

$$|f(x)(L_n q_0)(x) - (L_n f)(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon(L_n q_0)(x) + \gamma[x^2(L_n q_0)(x) - 2x(L_n q_1)(x) + (L_n q_2)(x)] =$$
$$= \varepsilon(L_n q_0)(x) + \gamma \{ x^2[(L_n q_0)(x) - q_0(x)] - 2x[(L_n q_1)(x) - q_1(x)] +$$
$$+ [(L_n q_2)(x) - q_2(x)]\} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \underbrace{||L_n q_0||_\infty}_{\downarrow \atop 1} + \gamma [\sigma^2 \underbrace{||L_n q_0 - q_0||_\infty}_{\downarrow \atop 0} + 2\sigma \underbrace{||L_n q_1 - q_1||_\infty}_{\downarrow \atop 0} + \underbrace{||L_n q_2 - q_2||_\infty}_{\downarrow \atop 0}]$$

όπου $\sigma := \max(|a|,|b|)$. Συνεπώς ισχύει $\|fL_n q_o - L_n f\|_\infty \longrightarrow 0$ ο.ε.δ.

Με την βοήθεια αυτού του θεωρήματος μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε το γνωστό θεώρημα προσεγγίσεως του Weierstrass.

4.24 Πόρισμα (Θεώρημα προσεγγίσεως του Weierstrass)
Έστω $f \in C[a,b]$. Τότε για $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $\|f-p\|_\infty < \varepsilon$.

Απόδειξη

Δίνουμε την απόδειξη για $[a,b]=[0,1]$. Αυτό πραγματικά αρκεί, γιατί με τον μετασχηματισμό $x \longmapsto a+(b-a)x$ παίρνουμε μετά το αποτέλεσμα για τυχόν διάστημα $[a,b]$. Ορίζουμε τώρα τους τελεστές $B_n : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$,

$$(B_n f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Προφανώς ισχύει $B_n f \in \mathbb{P}_n$, και οι τελεστές B_n είναι μονότονοι. Για να δείξουμε λοιπόν ότι $\|f-B_n f\|_\infty \longrightarrow 0$ (που αποδεικνύει προφανώς το πόρισμά μας και μάλιστα κατασκευαστικά) αρκεί κατά το θεώρημα 4.22 να δείξουμε με $q_k(x) := x^k$ ότι ισχύει

$$(4.25) \qquad \lim_{n\to\infty} \|q_k - B_n q_k\|_\infty = 0, \quad k=0,1,2.$$

Τώρα για $k=0$ η (4.25) ισχύει γιατί

$$(B_n q_o)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [\,x+(1-x)]^n = 1 = q_o(x).$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει επίσης $B_n q_1 = q_1$. Πραγματικά, παραγωγίζοντας ως προς x και τα δύο μέλη της ταυτότητας $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$ έχουμε

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [\,k x^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k) x^k (1-x)^{n-k-1}\,] = 0, \quad \text{ή}$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k}}_{=(B_n q_1)(x)} = x \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{=1},$$

οπότε $B_n q_1 = q_1$.

Τώρα η σχέση $B_n q_1 = q_1$ γράφεται $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^k (1-x)^{n-k} = nx$ και παραγωγίζοντας ως προς x δίνει

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k [\,k x^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k) x^k (1-x)^{n-k-1}\,] = 1, \quad \text{ή}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} [(1-x)+x] = n + n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^k (1-x)^{n-k-1}, \quad \text{ή}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n} x(1-x) + x \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k}}_{=(B_n q_1)(x)}, \quad \text{δηλαδή}$$

$$(4.26) \qquad (B_n q_2)(x) = \frac{1}{n} x + \frac{n-1}{n} x^2,$$

απ' όπου έπεται αμέσως $\|B_n q_2 - q_2\|_\infty \to 0$.

4.27 Ορισμός Οι τελεστές B_n: $C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$,

$$(B_nf)(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k/n)x^k(1-x)^{n-k} ,$$

οι οποίοι χρησιμοποιήθηκαν στην προηγούμενη απόδειξη λέγονται τελεστές Bernstein. Τα πολυώνυμα B_nf αναφέρονται σαν πολυώνυμα Bernstein (κακώς βέβαια, κανονικά θα έπρεπε να λέγονται πολυώνυμα Bernstein που αντιστοιχούν στην f, αφού εξαρτώνται από την f).

Παρατήρηση: Η απόδειξη του θεωρήματος του Weierstrass που δώσαμε είναι κατασκευαστική. Οι τελεστές Bernstein χρησιμοποιούνται πολύ συχνά για την απόδειξη θεωρητικών αποτελεσμάτων, αλλά ποτέ στην πράξη για τον προσδιορισμό πολυωνυμικών προσεγγίσεων. Ο λόγος είναι η πολύ αργή τους σύγκλιση (η οποία άλλωστε είναι κοινό χαρακτηριστικό όλων των μονότονων τελεστών). Πραγματικά ακόμα και για τη συνάρτηση q_2 έχουμε κατά την (4.26)

$$||q_2-B_nq_2||_\infty = \max_{0\le x\le 1} |1/n\ (x^2-x)| = 1/(4n) .$$

Ας δούμε τώρα τα αντίστοιχα αποτελέσματα για περιοδικές συναρτήσεις. Έστω $C_n[0,2\pi] := \{ f\in C[0,2\pi] : f(0)=f(2\pi) \}$, $\tau_0(x):=1$, $\tau_1(x):=\cos x$, $\tau_2(x):=\sin x$.

4.28 Θεώρημα (Korovkin) Έστω $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία μονότονων τελεστών στον $C_n[0,2\pi]$. Τότε ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} ||\tau_k - L_n\tau_k||_\infty = 0 \ , \ k=0,1,2 \tag{4.29}$$
$$\Longrightarrow \ \forall f\in C_n[0,2\pi] \ \lim_{n\to\infty} ||f-L_nf||_\infty = 0 .$$

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι για $f\in C_n[0,2\pi]$, $||f||_\infty \le 1$, ισχύει $||fL_n\tau_0 - L_nf||_\infty \longrightarrow 0$ (δες τις παρατηρήσεις στην απόδειξη του θεωρήματος 4.22). Έστω $\varepsilon>0$. Τότε λόγω της ομοιόμορφου συνέχειας της f στο $[0,2\pi]$ και του γεγονότος ότι $f(0)=f(2\pi)$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε

$$\forall x_1, x_2 \in [0,2\pi] \quad |x_1-x_2|<\delta \text{ ή } |x_1-x_2|>2\pi-\delta \implies |f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon .$$

Έστω $m := \min\limits_{\substack{t,s\in[0,2\pi]\\ |t-s|\ge\delta \\ |t-s|\le 2\pi-\delta}} [1-\cos(t-s)]$. Προφανώς ισχύει $m>0$.

Για $x\in[0,2\pi]$ σταθερό έχουμε

$$\forall y\in[0,2\pi] \quad |f(x)-f(y)| \le \varepsilon + (2/m)[1-\cos(x-y)] =$$
$$= \varepsilon + (2/m)[1-\cos x \cos y - \sin x \sin y],$$

οπότε

$$|f(x)\tau_0 - f| \le \varepsilon\,\tau_0 + (2/m)[\tau_0 - \cos x\ \tau_1 - \sin x\ \tau_2],$$

δηλαδή

$$|f(x)(L_n\tau_0)(x) - (L_nf)(x)| \le$$

$$\le \varepsilon(L_n\tau_0)(x) + (2/m)\ \{(L_n\tau_0)(x) - \cos x(L_n\tau_1)(x) - \sin x(L_n\tau_2)(x)\} =$$

$$= \varepsilon\ (L_n\tau_0)(x)+(2/m)\ \{\ [(L_n\tau_0)(x)-\tau_0(x)]\ -\ \cos x[(L_n\tau_1)(x)-\tau_1(x)]\ -$$
$$\sin x[(L_n\tau_2)(x)-\tau_2(x)]\ \}$$
$$\leqslant \varepsilon\ ||L_n\tau_0||_\infty\ +(2/m)\{\ ||L_n\tau_0-\tau_0||_\infty\ +||L_n\tau_1-\tau_1||_\infty +\ ||L_n\tau_2-\tau_2||_\infty\}$$

συνεπώς

$$||fL_n\tau_0-L_nf||_\infty \longrightarrow 0.$$

4.30 Ορισμός Κάθε συνάρτηση τ της μορφής

$$\tau(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

λέγεται τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ n.

Θα δούμε τώρα μερικές έννοιες τις οποίες και θα χρησιμοποιήσουμε μετά για να αποδείξουμε ότι κάθε στοιχείο του $C_n[0,2\pi]$ μπορούμε να το προσεγγίσουμε ομοιόμορφα με οποιαδήποτε ακρίβεια με τριγωνομετρικά πολυώνυμα.

Το μερικό άθροισμα της σειράς Fourier μιας συναρτήσεως f, δηλαδή το τριγωνομετρικό πολυώνυμο S_nf,

$$(S_nf)(x)\ := (1/2\pi)\int_0^{2\pi} f(y)dy\ +\ (1/\pi)\sum_{k=1}^{n} \{[\int_0^{2\pi} f(y)\cos ky\,dy]\cos kx + [\int_0^{2\pi} f(y)\sin ky\,dy]\cdot \sin kx\}$$

είναι μια προσέγγιση της f από τον χώρο των τριγωνομετρικών πολυωνύμων βαθμού το πολύ n ως προς την στάθμη $||\cdot||_2$,

$$||\varphi||_2\ =\ (\ \int_0^{2\pi}|\varphi(x)|^2 dx)^{1/2} \qquad \text{(δες σελίδα 28).}$$

Το S_nf γράφεται και στην μορφή

$$(S_nf)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\,[1+2\sum_{k=1}^{n}(\sin ky \sin kx + \cos ky \cos kx)]\,dy$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\,[1+2\sum_{k=1}^{n}\cos k(y-x)]\,dy.$$

Τώρα λόγω

$$(*) \qquad 1\ +\ 2(\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx)\ =\ \sin((2n+1)x/2)\ /\ \sin(x/2)$$

ισχύει

$$(4.31) \qquad \boxed{(S_nf)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-y)}{\sin\frac{x-y}{2}}\,dy.}$$

$S_n: C_n \longrightarrow T_n$

Δίνουμε τώρα την απόδειξη της (*), μια άλλη πιο κομψή θα δοθεί στις ασκήσεις. Λόγω της

$$\sin(k+1/2)x\ -\ \sin(k-1/2)x\ =\ 2\ \sin(x/2)\ \cos kx$$

έχουμε

$$2\cos kx\ =\ 1/\sin(x/2)\ [\ \sin(k+1/2)x\ -\ \sin(k-1/2)x\ ]$$

οπότε

$$1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx\ =\ 1/\sin(x/2)\ \sin((2n+1)/2)x.$$

Τώρα ισχύει

$$(4.32) \qquad \begin{cases} S_n\tau_0 = \tau_0 \\ S_n\tau_k = \begin{matrix} 0\ , & n=0 \\ \tau_k\ , & n\geqslant 1 \end{matrix} \qquad k=1,2 \end{cases}$$

παρά ταύτα μπορεί να δειχθεί ότι δεν ισχύει για κάθε $f\in C_{\pi}[0,2\pi]$ $\lim_{n\to\infty} \|f-S_n f\|_{\infty}=0$. Η εξήγηση γι' αυτό είναι βέβαια ότι οι τελεστές S_n δεν είναι μονότονοι.

'Ενας άλλος τρόπος προσεγγίσεως μιας περιοδικής συναρτήσεως f με τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι δια $F_n f$ όπου

(4.33) $$F_n := (1/n)(S_0+S_1+\ldots+S_{n-1}).$$

Προφανώς ισχύει

$$(F_n f)(x) = 1/(2\pi n)\int_0^{2\pi} f(y)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\frac{2k+1}{2}(x-y)}{\sin\frac{x-y}{2}}\,dy,$$

οπότε λόγω

(**) $$\sin(1/2)x+\sin(3/2)x+\ldots+\sin(n-1/2)x = \frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

έχουμε

(4.34) $$(F_n f)(x) = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} f(y)\,\frac{\sin^2\frac{n(x-y)}{2}}{\sin^2\frac{x-y}{2}}\,dy.$$

Πριν δούμε μερικές ιδιότητες των τελεστών F_n δείχνουμε την (**). Λόγω

$$\sin(k-1/2)x\,\sin(x/2) = 1/2\,[\cos(k-1)x - \cos kx]$$

έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(k-1/2)x\,\sin(x/2) = 1/2\sum_{k=1}^{n}[\cos(k-1)x - \cos kx] =$$
$$= 1/2\,(1-\cos nx) = \sin^2(nx/2).$$

Οι τελεστές F_n είναι προφανώς μονότονοι. Επιπλέον λόγω (4.32) και (4.33) ισχύει

$$F_n\tau_0=\tau_0,\quad F_n\tau_k=(n-1)/n\ \tau_k,\quad k=1,2\ ,\ n\in\mathbb{N},$$

συνεπώς

$$\lim_{n\to\infty}\|\tau_k-F_n\tau_k\|_{\infty}=0\ ,\ k=0,1,2.$$

Σύμφωνα επομένως με το θεώρημα 4.28 έχουμε

(4.35) $$\forall f\in C_{\pi}[0,2\pi]\quad \lim_{n\to\infty}\|f-F_n f\|_{\infty}=0.$$

Αυτή η τελευταία σχέση αποδεικνύει και το θεώρημα προσεγγίσεως του Weierstrass για περιοδικές συναρτήσεις.

4.36 Πόρισμα (Δεύτερο θεώρημα προσεγγίσεως του Weierstrass)
'Εστω $f\in C_{\pi}[0,2\pi]$. Τότε για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο τ τέτοιο ώστε $\|f-\tau\|_{\infty}<\varepsilon$.

Τάξη προσεγγίσεως.

Μεταξύ της τάξης συγκλίσεως του μεγέθους $E_n(f;[a,b])$ προς το μηδέν όταν $n\longrightarrow\infty$ και της ομαλότητος μιας συναρτήσεως f στο [a,b] υπάρχει άμεση σχέση. ('Οτι $E_n(f;[a,b])\longrightarrow 0$ για $f\in C[a,b]$ έπεται βέβαια απο το θεώρημα προσεγγίσεως του Weierstrass). Τα αποτελέσματα αυτά παραθέτουμε κλείνοντας το κεφάλαιο για την ομοιόμορφη πολυωνυμική προσέγγιση. Οι αποδείξεις είναι μακροσκελείς και ξεφεύγουν από το σκοπό του μαθήματος γι' αυτό παραλείπονται. Για περισσότερες λεπτομέρειες και για τις παραλειπόμενες αποδείξεις ο ενδιαφερόμενος μπορεί να ανατρέξει σε βιβλία θεωρίας προσεγγίσεων, π.χ. Natanson.

4.37 Ορισμός Έστω $\alpha \in (0,1]$. Λέμε ότι μια συνάρτηση $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ πληροί στο $[a,b]$ την συνθήκη του Hölder με δείκτη α, αν υπάρχει σταθερά L (εξαρτώμενη από την f) τέτοια ώστε

$$\forall\, x,y \in [a,b] \quad |f(x)-f(y)| \leqslant L|x-y|^{\alpha}$$

Συμβολίζουμε με $C^{0,\alpha}[a,b]$, $\alpha \in (0,1]$, το σύνολο των συναρτήσεων συνεχών που πληρούν στο $[a,b]$ τη συνθήκη του Hölder με δείκτη α, και για $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$C^{k,\alpha}[a,b] := \{\, f \in C^{k}[a,b] \;:\; f^{(k)} \in C^{0,\alpha}[a,b] \,\}.$$

4.38 Θεώρημα (Jackson) Έστω $\alpha \in (0,1]$. Τότε ισχύουν:

$$\forall f \in C^{k}[a,b] \;\; \exists\, c>0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; E_n(f;[a,b]) \leqslant C\, n^{-k}$$

$$\forall f \in C^{k,\alpha}[a,b] \;\; \exists\, c>0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; E_n(f;[a,b]) \leqslant C\, n^{-(k+\alpha)}$$

Ισχύει επίσης το " αντίστροφο " του ανωτέρω θεωρήματος.

4.39 Θεώρημα (Bernstein) Έστω $\alpha \in (0,1)$. Τότε ισχύουν:

i. $\exists\, C \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad E_n(f;[a,b]) \leqslant C\, n^{-k} \implies f \in C^{k}[a,b]$

ii. $\exists\, C \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad E_n(f;[a,b]) \leqslant C\, n^{-(k+\alpha)} \implies f \in C^{k}[a,b]$

και

$$\forall\, [a',b'] \subset (a,b) \quad f^{(k)} \in C^{0,\alpha}[a',b'].$$

Παρατηρήσεις

i. Από τα προηγούμενα δύο θεωρήματα είναι προφανές ότι η περίπτωση $\alpha=1$ χρειάζεται ειδική μεταχείρηση. Και αυτή η περίπτωση έχει πάντως διαλευκανθεί όσον αφορά το θέμα μας.

ii. Αντίστοιχα των θεωρημάτων 4.38 και 4.39 ισχύουν και για την περίπτωση προσεγγίσεως περιοδικών συναρτήσεων με τριγωνομετρικά πολυώνυμα.

iii. Σε βιβλία θεωρίας προσεγγίσεων π.χ. Natanson, Cheney, Rivlin μπορεί κανείς να βρεί και τιμές για τις σταθερές C του θεωρήματος 4.38 που εξαρτώνται βέβαια από την f.

Ασκήσεις

4.1 Δείξτε ότι οι γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις $\varphi_1,\dots,\varphi_n \in C[a,b]$ πληρούν στα $[a,b]$ ακριβώς τότε την συνθήκη του Haar αν για κάθε n-άδα ανά δύο διαφορετικών μεταξύ των σημείων $(x_1,\dots,x_n)$ του $[a,b]$ ισχύει

$$\det\left((\varphi_k(x_\nu))_{k,\nu=1,\dots,n}\right) \neq 0.$$

4.2 Έστω $q_k\colon [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $q_k(x):=x^k$, $k=1,3$. Είναι η βέλτιστη προσέγγιση του q_3 από τον $X:=\operatorname{span}(q_1)$ ως προς τη στάθμη $\|\cdot\|_\infty$ του $C[a,b]$ μοναδική; Προσδιορίστε την.

4.3 Δείξτε ότι τα πολυώνυμα Chebyshev πρώτου είδους έχουν τις εξ. ιδιότητες:

i. $(1-x^2)\,T_n''(x) - x\,T_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0$

ii. $$\int_{-1}^{1} 1/\sqrt{1-x^2}\; T_k(x)\,T_\nu(x)\,dx = \begin{cases} 0, & k \neq \nu \\ \pi, & k=\nu=0 \\ \pi/2, & k=\nu > 0. \end{cases}$$

iii. $T_m \circ T_n = T_{mn}$

iv. $T_n(x) = 1/2\,\{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\}$.

4.4 Έστω $f\in C[a,b]$ μια κυρτή (ή κοίλη) συνάρτηση, και $\xi\in(a,b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = (f(b)-f(a))/(b-a)$. Δείξτε ότι p,

$$p(x) := (f(b)-f(a))/(b-a)\,(x-(a+\xi)/2) + 1/2\,[f(a)+f(\xi)],$$

είναι η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}_1$ (στο $[a,b]$).

4.5 i. Έστω $\varphi_1,\dots,\varphi_n \in C[a,b]$, $x_1,\dots,x_n\in[a,b]$ και $L : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$

$$L\varphi := \varphi(x_1)\varphi_1 + \dots + \varphi(x_n)\varphi_n.$$

Δείξτε ότι αν για κάποιο $k\in\{1,\dots,n\}$ και για κάποιο $x^*\in[a,b]$ ισχύει $\varphi_k(x^*)<0$, τότε ο L δεν είναι μονότονος τελεστής.

ii. Έστω $k\in C([a,b]\times[a,b])$, και $L : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$,

$$(L\varphi)(x) := \int_a^b k(x,y)\varphi(y)\,dy.$$

Δείξτε ότι αν υπάρχουν $x^*, y^*\in[a,b]$ τέτοια ώστε $k(x^*,y^*) < 0$, ο L δεν είναι μονότονος. (Δες τα παραδείγματα στη σελίδα 40).

4.6 Προσδιορίστε την βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της συναρτήσεως p, $p(x):= 5x^7+6x^6+3x^4+2x-1$, στο διάστημα $[-1,1]$ από τον $\mathbb{P}_6$.

4.7 Έστω $f\in C[a,b]$ και $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο p τέτοιο ώστε

$$\forall\, x\in[a,b] \quad 0 \leqslant f(x) - p(x) \leqslant \varepsilon .$$

4.8 Έστω $f\in C[0,1]$, και $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ οι τελεστές Bernstein. Δείξτε ότι

$$\forall\, x\in[0,1] \quad m \leqslant f(x) \leqslant M \implies \forall\, x\in[0,1] \quad m \leqslant (B_n f)(x) \leqslant M.$$

4.9 Έστω $q_k(x):=x^k$ και $X:=\text{span}(q_0,q_2)$. Δείξτε ότι ο X πληροί την συνθήκη του Haar στο διάστημα [0,1], αλλά όχι στο διάστημα [-1,1].

4.10 Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι για $x\in\mathbb{R}$ $\cos kx = \text{Re}(e^{ikx})$ για να δείξετε ότι

$$1 + 2(\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx) = \sin(n+1/2)x \;/\; \sin(x/2)$$

4.11 Έστω $f\in C[-a,a]$ και $p\in\mathbb{P}_n$ η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}_n$ στο διάστημα [-a,a]. Δείξτε ότι:

f άρτια $\implies$ p άρτια

f περιττή $\implies$ p περιττή.