Ασκήσεις - 1
Θεωρια Προσεγγισεων και Εφαρμογες – ΜΑΘ 238

1. Αποδείξτε για τα πολυώνυμα Chebyshev πρώτου είδους $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$, ότι ισχύει
   (α′) $|T_n'(x)| \leq n^2$, $-1 \leq x \leq 1$ και ότι $|T_n'(\pm 1)| = n^2$.
   (β′) $T_m(x)T_n(x) = \dfrac{1}{2}[T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x)]$ για $m > n$.
   (γ′) $T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x)$.
2. Ολες οι νόρμες σε ένα πεπερασμένης διαστασης χώρο είναι ισοδύναμες
3. Έστω $\|f\| = |f(0)| + |f'(0)| + |f''(0)|$. Ποιές απο τις τρείς ιδιοτητες του ορισμού μιας νόρμας ισχύουν στο χώρο των πολυωνύμων;
4. Δείξτε αν $f \in C[a, b]$ και $\phi(x) = f(a + x(b - a))$, τότε $\phi \in C[0, 1]$. Χρησιμοποιήστε αυτό για να δείξτε ότι το Θεώρημα του Weierstrass ισχύει για κάθε διάστημα $[a, b]$.
5. Έστω $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$ και $X = \{(a_1, a_2, 0) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Βρείτε τη βέλτιστη προσέγγιση του $(1, 2, 3)$ από το X.
6. Έστω $p(x) = 4x^5 + 3x^4 - 2x^2 + x - 3$ Προσδιορίστε το πολυώνυμο $q \in \mathbb{P}_4$ για το οποίο η νόρμα $\|p - q\|_\infty$ στο $[-1, 1]$ είναι ελάχιστη.
7. Έστω $q_3(x) = x^3$ και $q_1(x) = x$. Αν $X = \mathrm{span}(q_1)$, βρείτε τη βέλτιστη προσέγγιση της q_3 από το X ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ στο $[1, 2]$.