

Ασκήσεις - 2
Θεωρία Προσεγγίσεων και Εφαρμογές – ΜΑΘ 238

1. Έστω $(X, (\cdot, \cdot))$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, $x, y \in X$ και $\lim \|x_n - x\| = 0$, $\lim \|y_n - y\| = 0$, δείξτε ότι

$$\lim(x_n, y_n) = (x, y).$$

2. Προσδιορίστε τη βέλτιστη προσέγγιση της συνάρτησης f , $f(x) = e^x$, από τον \mathbb{P}_3 ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$,

$$\|\phi\|_2 = \left(\int_{-1}^1 |\phi(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \phi \in C[-1, 1].$$

3. Προσδιορίστε τη βέλτιστη προσέγγιση της συνάρτησης f , $f(x) = 5x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5x + 1$, από τον \mathbb{P}_3 ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$,

$$\|\phi\|_2 = \left(\int_{-1}^1 |\phi(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \phi \in C[-1, 1].$$

4. Έστω $\{e_1, \dots, e_n\}$, $e_i \in C[a, b]$, $i = 1, \dots, n$, ένα ορθοκανονικό σύστημα ως προς το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot, \cdot)_w$,

$$(f, g)_w = \int_a^b w(x)f(x)g(x) dx, \quad f, g \in C[a, b],$$

όπου $w \in C[a, b]$ μια συνάρτηση βάρους. Προσδιορίστε ένα ορθοκανονικό σύστημα $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \subset C[a, b]$ ως προς το εσωτερικό γινόμενο

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx, \quad f, g \in C[a, b],$$

5. Έστω $(X, (\cdot, \cdot))$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο, με $x_1, \dots, x_k \in X$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και $X_\ell = \langle x_1, \dots, x_\ell \rangle$, $\ell = 1, \dots, n$. Αν $x \in X$ και y_m, y_n οι βέλτιστες προσεγγίσεις του x από τους X_m και X_n , αντίστοιχα, δείξτε ότι αν $1 \leq m \leq n \leq k$, τότε ισχύει και $\|y_m\| \leq \|y_n\|$.

6. Θεωρούμε το χώρο με εσωτερικό γινόμενο $(C[-a, a], (\cdot, \cdot))$, με $a > 0$ και

$$(f, g) = \int_{-a}^a f(x)g(x) dx, \quad f, g \in C[a, b].$$

Αν $f \in C[-a, a]$ και $p \in \mathbb{P}_n$, $n > 0$, η βέλτιστη προσέγγιση της f από τον \mathbb{P}_n δείξτε ότι: Αν η f είναι άρτια, τότε και η p είναι άρτια και αν η f είναι περιττή, τότε και η p είναι περιττή.