Ασκήσεις - 6
Θεωρία Προσεγγίσεων και Εφαρμογές – ΜΑΘ 238

1. Προσδιορίστε τα βάρη w_1 και w_2 έτσι ώστε ο τύπος Q, $Q(f) = w_1 f(1/2) + w_2 f(1)$, να ολοκληρώνει στο διάστημα $[-1, 1]$ πολυώνυμα μέχρι και πρώτου βαθμού ακριβώς.
2. Προσδιορίστε τα βάρη w_1 και w_2 και τους κόμβους x_1 και x_2 έτσι ώστε ο τύπος Q, $Q(f) = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$, να ολοκληρώνει στο διάστημα $[-1, 1]$ ακριβώς πολυώνυμα μέχρι και βαθμού n για τη μέγιστη δυνατή τιμή του n.
3. Έστω Q_n^T και Q_m^S ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου και του Simpson, αντίστοιχα, με n και m ομοιόμορφα κατανεμημένους κόμβους στο διάστημα $[-1, 1]$, αντίστοιχα. Δείξτε ότι για τη συνάρτηση f, $f(x) = (x^6/30) - x^2$, ισχύει
$$Q_n^T(f) \leq \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq Q_m^S(f).$$
4. Έστω Q_n ο τύπος ολοκλήρωσης των Newton-Cotes σένα διάστημα της μορφής $[-a, a]$ με n κόμβους. Αν $Q_n(f) = w_0 f(x_0) + \cdots + w_{n-1} f(x_{n-1})$ και x_i, x_j δύο κόμβοι τέτοιοι ώστε $x_i = -x_j$, δείξτε για τα αντίστοιχα βάρη ότι $w_i = w_j$.
5. Έστω Q_n ο τύπος ολοκλήρωσης των Newton-Cotes σένα διάστημα της μορφής $[-a, a]$ με n κόμβους. Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση για να δείξτε ότι ο Q_n ολοκληρώνει ακριβώς κάθε περιττή και ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[-a, a]$.
6. Θεωρούμε τον αριστερό τύπου του ορθογωνίου Q, $Q(f) = (b-a)f(a)$, $f \in C[a, b]$. Έστω R το σφάλμα του
$$R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q(f).$$
   (α΄) Δείξτε ότι ο Q ολοκληρώνει ακριβώς σταθερές συναρτήσεις
   (β΄) Δείξτε ότι
$$\forall f \in C^1[a, b],\ \exists \xi \in (a, b),\ R(f) = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi).$$
   (γ΄) Έστω $n \in \mathbb{N}$, $h = (b-a)/n$ και $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, n$. Δείξτε ότι για $f \in C[a, b]$ υπάρχει $\xi \in (a, b)$, τέτοιο ώστε
$$\int_a^b f(x)\,dx - h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{b-a}{2} h f'(\xi).$$

7. Θεωρούμε τον τύπο του μέσου Q, $Q(f)=(b-a)f((a+b)/2)$, $f\in C[a,b]$. Έστω R το σφάλμα του
$$R(f)=\int_a^b f(x)\,dx-Q(f).$$
   (α′) Δείξτε ότι ο Q ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και ένα.
   (β′) Δείξτε ότι
$$\forall f\in C^2[a,b],\ \exists\xi\in(a,b),\ R(f)=\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$
   (γ′) Έστω $n\in\mathbb{N}$, $h=(b-a)/n$ και $x_i=a+ih$, $i=0,\dots,n$. Δείξτε ότι για $f\in C[a,b]$ υπάρχει $\xi\in(a,b)$, τέτοιο ώστε
$$\int_a^b f(x)\,dx-h\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i+\frac{h}{2})=\frac{b-a}{24}h^2f'(\xi).$$
8. Θεωρούμε ένα διάστημα της μορφής $[-a,a]$ και μια άρτια συνάρτηση βάρους $w:[-a,a]\to\mathbb{R}$. Δείξτε ότι ο τύπος ολοκλήρωσης του Gauss Q_n με n κόμβους ως προς w είναι συμμετρικός, δηλαδή αν x_i κόμβος του, τότε και το $-x_i$ είναι κόμβος και τα αντίστοιχα βάρη είναι ίσα.
9. Έστω $x_1,\dots,x_n$ οι ρίζες του πολυνύμου Legendre βαθμού n. Αν L_i, $i=1,\dots,n$ είναι τα πολυώνυμα του Lagrange ως προς $x_1,\dots,x_n$,
$$L_i(x)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j},\quad i=1,\dots,n,$$
δείξτε ότι
$$\int_{-1}^{1}L_i(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(L_i(x))^2\,dx,\quad i=1,\dots,n.$$