Σημειώσεις μαθήματος ΕΥ119

Γραμμική Άλγεβρα

Βασισμένες στο βιβλίο του **G.Strang**

Χρήστος Κουρουνιώτης

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

2010

Εισαγωγή

Αυτές οι σημειώσεις καλύπτουν την ύλη του μαθήματος ΕΨ119 Γραμμική Άλγεβρα, του Προγράμματος Σπουδών του Τμήματος Επιστήμης Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Κρήτης, στο οποίο μελετώνται διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης, με έμφαση στη μελέτη των χώρων $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{C}^n$. Το πρώτο μέρος του μαθήματος αφιερώνεται στη συστηματική μελέτη της απαλοιφής Gauss, με στόχο να αναδειχθεί η χρησιμότητά της σε υπολογιστικά προβλήματα και παράλληλα να αξιοποιηθεί για τη βαθύτερη θεωρητική μελέτη των χώρων $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{C}^n$ και των υποχώρων τους. Στη συνέχεια εισάγεται η έννοια της γραμμικής απεικόνισης, η ορθογωνιότητα και γίνεται μελέτη των ορθογώνιων προβολών. Στα τελευταία δύο κεφάλαια εισάγεται η ορίζουσα και ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

Οι σημειώσεις είναι βασισμένες στο βιβλίο 'Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές' του G.Strang, έκδοση Πανεπιστημιακών Εκδόσεων Κρήτης, ενώ πολλές από τις ασκήσεις προέρχονται από τη νεότερη αγγλική έκδοση του 2006 (Linear Algebra and its Applications, Fourth Edition, Thomson, 2006).

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Πίνακες και Απαλοιφή Gauss

Η Γραμμική Αλγεβρα ξεκινάει με τη μελέτη συστημάτων γραμμικών εξισώσεων, δηλαδή εξισώσεων πρώτου βαθμού με πολλούς αγνώστους.

Δύο γεωμετρικές ερμηνείες

Θα εξετάσουμε το σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 5 \end{array}$$

από δύο διαφορετικές απόψεις.

Πρώτα θεωρούμε κάθε γραμμή (εξίσωση) χωριστά. Η πρώτη γραμμή

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 1 \end{array}$$

παριστάνει μια ευθεία στο επίπεδο: την ευθεία που τέμνει τον x-άξονα στο $1/2$ και τον y-άξονα στο -1. Η δεύτερη γραμμή

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 5 \end{array}$$

παριστάνει την ευθεία που τέμνει τον x-άξονα στο 5 και τον y-άξονα στο 5. Εάν οι δύο ευθείες τέμνονται, όπως στο παράδειγμα, το σύστημα εξισώσεων έχει μοναδική λύση, τις συντεταγμένες (x, y) του σημείου στο οποίο τέμνονται οι δύο ευθείες. Σε αυτό το παράδειγμα, το σημείο $(2, 3)$.

Τι άλλο μπορεί να συμβεί; Δύο διαφορετικές ευθείες σε ένα επίπεδο, είτε τέμνονται είτε είναι παράλληλες. Εάν οι ευθείες είναι παράλληλες, όπως στο παράδειγμα

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 1 \\ -4x & + & 2y & = & 0 \end{array}$$

το σύστημα δεν έχει καμία λύση. Εάν οι ευθείες συμπίπτουν, όπως στο παράδειγμα

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 1 \\ -4x & + & 2y & = & -2 \end{array}$$

το σύστημα έχει πολλές λύσεις: οι συντεταγμένες (x, y) όλων των σημείων της ευθείας αποτελούν λύσεις του συστήματος.

Μία διαφορετική προσέγγιση είναι να επικεντρώσουμε την προσοχή μας στις κατακόρυφες στήλες και να θεωρήσουμε το σύστημα εξισώσεων ως μία διανυσματική εξίσωση:

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Σε αυτή την προσέγγιση αναζητούμε ένα συνδυασμό των διανυσμάτων στηλών στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης, με κατάλληλους συντελεστές x και y, που να δίνει τη δεξιά πλευρά. Γεωμετρικά αυτό δίδεται από τον κανόνα του παραλληλογράμμου, και η λύση είναι μοναδική εάν τα διανύσματα στήλες αποτελούν πλευρές παραλληλογράμμου, δηλαδή εάν δεν είναι συγγραμμικά.

Τί άλλο μπορεί να συμβεί; Εάν τα διανύσματα στήλες είναι συγγραμμικά, τότε δεν σχηματίζουν παραλληλόγραμμο. Εάν το διάνυσμα στη δεξιά πλευρά είναι επίσης συγγραμμικό, τότε υπάρχουν άπειρες λύσεις. Εάν το διάνυσμα στα δεξιά δεν είναι συγγραμμικό με τα άλλα δύο, τότε δεν υπάρχει καμία λύση.

Ας δούμε τι συμβαίνει στις 3 διαστάσεις. Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ 4u & - & 6v & & & = & -2 \\ -2u & + & 7v & + & 2w & = & 9 \end{array} \tag{1.1}$$

Εξετάζουμε πρώτα κάθε γραμμή (εξίσωση). Η πρώτη γραμμή παριστάνει το επίπεδο που τέμνει τους άξονες στα σημεία $(\frac{5}{2}, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$, $(0, 0, 5)$. Η δεύτερη γραμμή παριστάνει το επίπεδο που τέμνει τους u- και v-άξονες στα σημεία $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$ και $(0, \frac{1}{3}, 0)$. Οταν βάλουμε $u = 0$ και $v = 0$ τότε παίρνουμε $0w = -2$, που δεν έχει λύση. Συνεπώς το επίπεδο που αντιστοιχεί στη δεύτερη γραμμή είναι παράλληλο προς τον w-άξονα. Πάντως τα δύο επίπεδα τέμνονται σε μια ευθεία. Η τρίτη γραμμή παριστάνει πάλι ένα επίπεδο, που τέμνει αυτήν την ευθεία σε ένα σημείο. Οι συντεταγμένες αυτού του σημείου δίδουν τη λύση του συστήματος. Στο παράδειγμα, είναι το σημείο $(1, 1, 2)$.

Τι άλλο μπορεί να συμβεί; Να μην τέμνονται τα τρία επίπεδα σε ένα μοναδικό σημείο. Στις τρεις διαστάσεις αυτό μπορεί να συμβεί με περισσότερους τρόπους:

- τα τρία επιπεδα να είναι παράλληλα,
- δύο επίπεδα να είναι παράλληλα και να τα τέμνει το τρίτο, σε δύο παράλληλες ευθείες,
- τα τρία επίπεδα να τέμνονται ανα δύο, σε τρεις παράλληλες ευθείες.
- τα τρία επίπεδα να τέμνονται σε μια κοινή ευθεία,
- δύο από τα επίπεδα να συμπίπτουν, και το τρίτο να τα τέμνει σε μια ευθεία,
- και τα τρία επίπεδα να συμπίπτουν.

Στις τρεις πρώτες περιπτώσεις το σύστημα δεν έχει λύση, στις άλλες τρεις έχει άπειρες λύσεις.

Μπορούμε να κοιτάξουμε και πάλι το σύστημα (1.1) ως μια διανυσματική εξίσωση,

$$u\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Θέλουμε να βρούμε τους συντελεστές u, v και w ώστε ο συνδυασμός στα αριστερά να είναι ίσος με το διάνυσμα στα δεξιά. Γεωμετρικά, το άθροισμα τριών διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^3$ είναι η διαγώνιος του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα τρία διανύσματα. Ετσι, εάν τα τρία διανύσματα αποτελούν ακμές ενός παραλληλεπιπέδου, τότε υπάρχει μοναδική λύση, σε αυτήν την περίπτωση $(u, v, w) = (1, 1, 2)$.

Τί άλλο μπορεί να συμβεί; Εάν τα τρία διανύσματα δεν αποτελούν ακμές ενός παραλληλεπιπέδου, αλλά βρίσκονται και τα τρία σε ένα επίπεδο, τότε το σύστημα έχει λύση μόνον εάν και το διάνυσμα στα δεξιά βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο. Διαφορετικά δεν έχει λύση. Εξετάζουμε το παράδειγμα

$$u\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+v\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+w\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}=b\,.$$

Εάν

$$b=\begin{bmatrix}2\\5\\7\end{bmatrix}$$

τότε η εξίσωση έχει λύση. Εάν

$$b=\begin{bmatrix}2\\5\\6\end{bmatrix}$$

τότε η εξίσωση δεν έχει λύση.

Βλέπουμε οτι υπάρχουν δύο διαφορετικές γεωμετρικές ερμηνείες των συστημάτων γραμμικών εξισώσεων με δύο και τρεις αγνώστους. Η προσεκτική ανάλυση θα αποκαλύψει τη σχέση ανάμεσα στις δύο προσεγγίσεις, που ενώ τη διαισθανόμαστε δεν είναι εύκολο να την προσδιορίσουμε ακριβώς. Το πιο σημαντικό είναι οτι θα μας ελευθερώσει από τους περιορισμούς της γεωμετρικής διαίσθησης, και θα μας επιτρέψει να μελετήσουμε συστήματα πολλών εξισώσεων με πολλούς αγνώστους.

Άσκηση 1.1 Σχεδιάστε στο καρτεσιανό επίπεδο τις ευθείες

$$\begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 2 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}$$

α′. Βρείτε από το σχήμα τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών.

β′. Υπολογίστε αλγεβρικά τη λύση του συστήματος.

γ′. Αλλάξτε τους συντελεστές του x και του y στη δεύτερη εξίσωση, έτσι ώστε οι δύο ευθείες να είναι παράλληλες.

δ′. Αλλάξτε το σταθερό όρο (στα δεξιά) της νέας εξίσωσης, έτσι ώστε οι δύο ευθείες να συμπίπτουν.

Άσκηση 1.2 Θεωρήστε το παραπάνω σύστημα ως διανυσματική εξίσωση:

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

Σχεδιάστε τα τρία διανύσματα, και επαληθεύσατε οτι οι τιμές του x και y που υπολογίσατε στην 1.1, ικανοποιούν τον κανόνα του παραλληλογράμμου για το άθροισμα διανυσμάτων.

Άσκηση 1.3 Βρείτε ποιές είναι οι σχετικές θέσεις των τριών επιπέδων σε κάθε ένα από τα ακόλουθα συστήματα.

α′.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ 4u & + & 2v & + & 2w & = & 6 \\ -2u & + & 7v & + & 2w & = & 9 \end{array}$$

β′.

$$\begin{array}{rcrcrcl} u & + & v & + & w & = & 2 \\ 2u & + & & + & 3w & = & 5 \\ 3u & + & v & + & 4w & = & 6 \end{array}$$

γ′.

$$\begin{array}{rcrcrcl} u & + & v & + & w & = & 2 \\ 2u & + & & + & 3w & = & 5 \\ 3u & + & v & + & 4w & = & 7 \end{array}$$

Διανύσματα

Ορισμός. Θα εργαστούμε αποκλειστικά σε σύνολα $\mathbb{R}^n$, για $n \geq 0$,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ θα τα ονομάζουμε **διανύσματα**, και το σύνολο $\mathbb{R}^n$ θα το αποκαλούμε **χώρο** (γραμμικό χώρο ή διανυσματικό χώρο). Οι πραγματικοί αριθμοί $x_1, \ldots, x_n$ ονομάζονται **συνιστώσες** του διανύσματος $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Τα διανύσματα μπορούμε να τα φανταζόμαστε ως σημεία ενός χώρου, όπως ο καρτεσιανός τριδιάστατος χώρος, ταυτίζοντας το διάνυσμα (x_1, x_2, x_3) με το σημείο με τις ίδιες καρτεσιανές συντεταγμένες. Μπορούμε επίσης να τα φανταζόμαστε ως βέλη, με αρχή στην αρχή των αξόνων $(0, 0, 0)$ και τέλος στο σημείο (x_1, x_2, x_3). Ανάλογα με την περίσταση, μπορεί η μία ή η άλλη ερμηνεία να είναι πιο χρήσιμη. Σε κάθε περίπτωση, ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$ είναι μία διατεταγμένη n-άδα πραγματικών αριθμών, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Σε αυτό το μάθημα, συνήθως, θα παριστάνουμε τα διανύσματα ως στήλες,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

αν και για λόγους τυπογραφικής οικονομίας, καμιά φορά θα γράφουμε τις συνιστώσες του διανύσματος χωρισμένες με κόμα, οριζόντια, σε παρενθέσεις, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Στο σύνολο $\mathbb{R}^n$ των διανυσμάτων με n συνιστώσες, ορίζουμε δύο πράξεις, την **πρόσθεση διανυσμάτων** και τον **πολλαπλασιασμό διανύσματος με πραγματικό αριθμό**.

Η πρόσθεση γίνεται συνιστώσα προς συνιστώσα, όπως στο παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Γενικά,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}.$$

Ο πολλαπλασιασμός διανύσματος με πραγματικό αριθμό, γίνεται επίσης κατά συνιστώσα, όπως στο παράδειγμα:

$$\sqrt{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Γενικά,

$$\alpha\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}.$$

Ενας **γραμμικός συνδυασμός** διανυσμάτων είναι ένα άθροισμα των διανυσμάτων, πολλαπλασιασμένων με πραγματικούς αριθμούς (συντελεστές), για παράδειγμα

$$\alpha\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta y_n + \gamma z_n \end{bmatrix}.$$

Από την Αναλυτική Γεωμετρία γνωρίζουμε άλλη μια πράξη, την οποία μπορούμε να ορίσουμε μεταξύ διανυσμάτων με οποιοδήποτε αριθμό συνιστωσών, το **εσωτερικό γινόμενο**. (Προσέξτε οτι το *εξωτερικό* γινόμενο ορίζεται μόνον στο $\mathbb{R}^3$.) Εάν $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ τότε

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n .$$

Ενα σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους, μπορούμε επίσης να το θεωρήσουμε με δύο τρόπους:

- Η κάθε γραμμή-εξίσωση, παριστάνει ένα ‘επίπεδο’[1] μέσα στο $\mathbb{R}^n$, και το σύστημα έχει μοναδική λύση εάν τα n ‘επίπεδα’ τέμνονται σε ένα μόνον σημείο.
- Η κάθε στήλη παριστάνει ένα διάνυσμα, και αναζητούμε τους συντελεστές ενός γραμμικού συνδυασμού των διανυσμάτων στην αριστερή πλευρά ώστε να είναι ίσος με το διάνυσμα στη δεξιά πλευρά.

Άσκηση 1.4 Ποιά συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα y_1, y_2, y_3 ώστε να βρίσκονται τα σημεία $(0, y_1)$, $(1, y_2)$ και $(2, y_3)$ στην ίδια ευθεία;

Άσκηση 1.5 Βρείτε γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

[1] Διάστασης $n-1$!

τέτοιους ώστε

α΄. Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2.

β΄. Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2 και η δεύτερη συνιστώσα να είναι -2.

γ΄. Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2 και η δεύτερη συνιστώσα να είναι 2.

δ΄. Η τρίτη συνιστώσα να είναι 1.

Είναι αυτά τα αποτελέσματα μοναδικά;

Άσκηση 1.6 Περιγράψτε την τομή των τριών ‘επιπέδων’ στον τετραδιάστατο χώρο:

$$\begin{array}{ccccccccc} u & + & v & + & w & + & z & = & 6 \\ u & & & + & w & + & z & = & 4 \\ u & & & + & w & & & = & 2\,. \end{array}$$

Αποτελείται από μία ευθεία, ένα σημείο ή το κενό σύνολο; Ποιά είναι η τομή εάν συμπεριλάβουμε και το τέταρτο ‘επίπεδο’ $u = -1$; Βρείτε μία τέταρτη εξίσωση ώστε να μην υπάρχει λύση.

Άσκηση 1.7 Κανονικά, 4 ‘επίπεδα’ στον τετραδιάστατο χώρο τέμνονται σε .... Κανονικά, 4 διανύσματα στον τεταδιάστατο χώρο μπορούν να συνδυαστούν για να παραγάγουν οποιοδήποτε b. Ποιός γραμμικός συνδυασμός των $(1,\,0,\,0,\,0)$, $(1,\,1,\,0,\,0)$, $(1,\,1,\,1,\,0)$ και $(1,\,1,\,1,\,1)$ παράγει το $b = (3,\,3,\,3,\,2)$; Ποιές είναι οι τέσσερεις εξισώσεις, με αγνώστους x, y, z, t που πρέπει να λυθούν;

Απαλοιφή Gauss

Υπάρχουν πολλές μέθοδοι για την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Θα μελετήσουμε τη μέθοδο της **απαλοιφής Gauss** (Gauss elimination), η οποία είναι κατάλληλη για την επίλυση μεγάλων συστημάτων, με πολλές εξισώσεις και πολλούς αγνώστους. Αν και θα εξετάσουμε την απαλοιφή Gauss στο απλό παράδειγμα τριών εξισώσεων με τρείς αγνώστους του συστήματος (1.1), θέλουμε να δούμε συστηματικά τα βήματα της μεθόδου, ώστε να μπορούμε να τα εφαρμόσουμε και σε πολύ μεγαλύτερα συστήματα, με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ 4u & - & 6v & & & = & -2 \\ -2u & + & 7v & + & 2w & = & 9 \end{array}$$

Παρατηρούμε οτι ο συντελεστής του u στην πρώτη εξίσωση δεν είναι 0. Αρα, εάν αφαιρέσουμε κατάλληλα πολλαπλάσια της πρώτης εξίσωσης από όλες τις άλλες, μπορούμε να κάνουμε τους συντελεστές του u σε όλες τις εξισώσεις, εκτός από την πρώτη, ίσους με 0, δηλαδή να *απαλείψουμε* το u από αυτές τις εξισώσεις. Συγκεκριμένα

- Αφαιρούμε 2 φορές την πρώτη εξίσωση από τη δεύτερη.
- Αφαιρούμε -1 φορά την πρώτη εξίσωση από την τρίτη (δηλαδή προσθέτουμε την πρώτη εξίσωση στην τρίτη).

Ο μη μηδενικός συντελεστής του u στην πρώτη εξίσωση ονομάζεται **πρώτος οδηγός**. Βρήκαμε τους **πολλαπλασιαστές** 2 και -1 διαιρώντας τους συντελεστές του u στη δεύτερη και την τρίτη εξίσωση με τον πρώτο οδηγό. Προκύπτει το νέο σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ & & -8v & - & 2w & = & -12 \\ & & 8v & + & 3w & = & 14 \end{array}$$

στο οποίο ο u έχει μηδενικό συντελεστή σε όλες τις εξισώσεις εκτός από την πρώτη. Παρατηρούμε οτι ο συντελεστής του v στη δεύτερη εξίσωση δεν είναι 0. Αυτός είναι ο **δεύτερος οδηγός**, τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για να απαλείψουμε το v από την τρίτη εξίσωση.

- Αφαιρούμε -1 φορά τη δεύτερη εξίσωση από την τρίτη.

Αυτό το βήμα ολοκληρώνει την απαλοιφή Gauss. Προκύπτει το νέο σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ & & -8v & - & 2w & = & -12 \\ & & & & w & = & 2 \end{array}$$

στο οποίο ο v έχει μηδενικό συντελεστή 'σε όλες τις εξισώσεις εκτός από την πρώτη και τη δεύτερη'. Ο συντελεστής του w στην τρίτη εξίσωση δεν είναι 0 και είναι ο **τρίτος οδηγός**.

Είναι εύκολο να λύσουμε αυτό το σύστημα. Από την τρίτη εξίσωση έχουμε

$$w = 2\,.$$

Αντικαθιστούμε το w στη δεύτερη εξίσωση, $-8v - 4 = -12$, άρα

$$v = 1\,.$$

Αντικαθιστούμε τα v και w στην πρώτη εξίσωση, $2u + 1 + 2 = 5$, άρα

$$u = 1\,.$$

Αυτή η διαδικασία ονομάζεται **ανάδρομη αντικατάσταση** (back substitution).

Η απαλοιφή Gauss βασίζεται στην παρατήρηση οτι εάν κάποιες τιμές των u, v και w ικανοποιούν ένα σύστημα εξισώσεων, τότε ακριβώς οι ίδιες τιμές ικανοποιούν και κάθε σύστημα που προκύπτει από το αρχικό με έναν από τους ακόλουθους δύο τρόπους:

- Εάν αλλάξουμε τη σειρά με την οποία γράφουμε τις εξισώσεις
- Εάν πολλαπλασιάσουμε μία εξίσωση με έναν αριθμό, και αφαιρέσουμε αυτό το πολλαπλάσιο από μία από τις άλλες εξισώσεις.

Κατά την απαλοιφή Gauss επαναλαμβάνουμε συστηματικά αυτά τα δύο βήματα, ώστε να καταλήξουμε σε ένα απλούστερο σύστημα, για το οποίο μπορούμε εύκολα να βρούμε το σύνολο λύσεων.

Καταγράφουμε πιο οικονομικά τη διαδικασία της απαλοιφής χρησιμοποιώντας έναν πίνακα με τους συντελεστές της εξίσωσης και τη δεξιά πλευρά:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 & 5 \\ 0 & \mathbf{-8} & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 & 5 \\ 0 & \mathbf{-8} & -2 & -12 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{bmatrix}$$

Οι οδηγοί, που εμφανίζονται με παχιά στοιχεία στον πίνακα, πρέπει να μη μηδενίζονται, εφόσον θέλουμε να διαιρέσουμε με αυτούς. Εαν λοιπόν στη διαδικασία της απαλοιφής σε ένα σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους, εμφανίζονται n (μη μηδενικοί) οδηγοί, τότε υπάρχει μια και μοναδική λύση του συστήματος, την οποία βρίσκουμε με ανάδρομη αντικατάσταση.

Εάν σε κάποιο βήμα της διαδικασίας απαλοιφής εμφανίζεται μηδέν στη θέση ενός οδηγού, τότε υπάρχουν δύο ενδεχόμενα.

1. Εάν υπάρχει μη μηδενικός συντελεστής σε κάποια πιό κάτω θέση στη στήλη που εξετάζουμε, τότε αλλάζουμε τη σειρά των εξισώσεων, δηλαδή εναλλάσσουμε τις γραμμές του πίνακα, ώστε να φέρουμε το μη μηδενικό συντελεστή στη θέση του οδηγού. Για το σύστημα εξισώσεων
$$\begin{array}{rcrcrcl} u & + & v & + & w & = & a \\ 2u & + & 2v & + & 5w & = & b \\ 4u & + & 6v & + & 8w & = & c \end{array} \tag{1.3}$$
έχουμε
$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 5 & b \\ 4 & 6 & 8 & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 3 & -2a+b \\ 0 & 2 & 4 & -4a+c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & \mathbf{2} & 4 & -4a+c \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & -2a+b \end{bmatrix}$$
Ετσι έχουμε πλήρες σύνολο οδηγών, και το σύστημα έχει μοναδική λύση.

2. Εάν όλοι οι συντελεστές στις πιο κάτω θέσεις στη στήλη που εξετάζουμε είναι μηδέν, τότε δεν μπορούμε να βρούμε πλήρες σύνολο οδηγών. Το σύστημα ονομάζεται **ιδιόμορφο**. Για παράδειγμα, στο σύστημα
$$\begin{array}{rcrcrcl} u & + & v & + & w & = & a \\ 2u & + & 2v & + & 5w & = & b \\ 4u & + & 4v & + & 8w & = & c \end{array}$$
μετά την απαλοιφή των συντελεστών του u, έχουμε
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 5 & b \\ 4 & 4 & 8 & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 3 & -2a+b \\ 0 & 0 & 4 & -4a+c \end{bmatrix}$$
και δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανάδρομη αντικατάσταση για να βρούμε μία μοναδική λύση. Ενα ιδιόμορφο σύστημα μπορεί να μην έχει καμία λύση, ή να έχει άπειρες λύσεις. Αυτό εξαρτάται από τη δεξιά πλευρά.

   - Εάν $-2a+b=6$ και $-4a+c=7$, τότε έχουμε
   $$\begin{array}{rcl} 3w & = & 6 \\ 4w & = & 7 \end{array}$$
   και δεν υπάρχει λύση. Το σύστημα είναι **ασύμβατο**.
   - Εάν όμως $-2a+b=6$ και $-4a+c=8$, τότε έχουμε
   $$\begin{array}{rcl} 3w & = & 6 \\ 4w & = & 8 \end{array}$$
   και $w=2$. Αλλά η πρώτη εξίσωση δεν μπορεί να προσδιορίσει και το u και το v. Για κάθε τιμή του u υπάρχει και μία τιμή του v που δίνει λύση. Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και είναι **απροσδιόριστο**.

Άσκηση 1.8 Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & - & 3v & & & = & 3 \\ 4u & - & 5v & + & w & = & 7 \\ 2u & - & v & - & 3w & = & 5 \end{array}$$

α'. Κάθε εξίσωση παριστάνει ένα επίπεδο στο τριδιάστατο χώρο με σύστημα συντεταγμένων u, v, w. Βρείτε τα σημεία τομής κάθε επιπέδου με τους άξονες, και προσπαθήστε να σχεδιάσετε μέρος των τριών επιπέδων στο σχήμα σας.

β'. Εφαρμόστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss για να βρείτε τη λύση του συστήματος: αφαιρέστε ένα πολλαπλάσιο της πρώτης εξίσωσης από τη δεύτερη, έτσι ώστε να μηδενιστεί ο συντελεστής του u στη δεύτερη εξίσωση. Κάνετε το ίδιο για την τρίτη εξίσωση. Κατόπιν αφαιρέστε ένα πολλαπλάσιο της (νέας) δεύτερης εξίσωσης από την (νέα) τρίτη εξίσωση, έτσι ώστε να μηδενιστεί ο συντελεστής του v στην τρίτη εξίσωση. Βρείτε το w και εφαρμόστε ανάδρομη αντικατάσταση για να βρείτε το v και το u.

Άσκηση 1.9 Για ποιά τιμή του b χρειάζεται αργότερα να κάνουμε εναλλαγή γραμμών; Για ποιά τιμή του b δεν υπάρχει κάποιος οδηγός; Σε αυτή την ιδιόμορφη περίπτωση, βρείτε μία μη μηδενική λύση για τα x, y, z.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & by & - & z & = & 0 \\ x & - & 2y & - & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

Άσκηση 1.10 Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{array}{rcrcrcr} u & + & v & + & w & = & -2 \\ 3u & + & 3v & - & w & = & 6 \\ u & - & v & + & w & = & -1 \end{array}$$

α'. Εφαρμόστε απαλοιφή Gauss στο παραπάνω σύστημα (μπορεί να χρειαστεί να αλλάξετε τη σειρά των εξισώσεων σε κάποιο βήμα).

β'. Αλλάξτε το συντελεστή του v στην τρίτη εξίσωση, ώστε να πάρετε ένα σύστημα που δεν έχει λύση.

Άσκηση 1.11 Ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων δεν είναι δυνατόν να έχει ακριβώς δύο λύσεις. Εξηγήστε γιατί.

α'. Εάν (x, y, z) και (X, Y, Z) είναι δύο λύσεις, μπορείτε να βρείτε ακόμη μία;

β'. Εάν 25 επίπεδα τέμνονται σε δύο σημεία, ποιά είναι τα άλλα σημεία της τομής τους;

Άσκηση 1.12 Βρείτε τους οδηγούς και τη λύση των τεσσάρων εξισώσεων:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & & & & & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & + & 2z & + & t & = & 0 \\ & & & & z & + & 2t & = & 5. \end{array}$$

Άσκηση 1.13 Είναι σωστές ή λανθασμένες οι ακόλουθες παρατηρήσεις για τη διαδικασία απαλοιφής Gauss;

α'. Εάν η τρίτη εξίσωση ξεκινά με μηδενικό συντελεστή, τότε δεν αφαιρείται πολλαπλάσιο της εξίσωσης 1 από την εξίσωση 3.

β'. Εάν η τρίτη εξίσωση έχει μηδενικό δεύτερο συντελεστή τότε δεν αφαιρείται πολλαπλάσιο της εξίσωσης 2 από την εξίσωση 3.

γ'. Εάν η τρίτη εξίσωση έχει μηδενικούς τους δύο πρώτους συντελεστές, τότε δεν αφαιρείται πολλαπλάσιο της εξίσωσης 1 ή της εξίσωσης 2 από την εξίσωση 3.

Πίνακες

Για μεγαλύτερα συστήματα δεν είναι πρακτικό να γράφουμε αναλυτικά κάθε εξίσωση και να καταγράφουμε την απαλοιφή. Ο συμβολισμός πινάκων είναι πολύ χρήσιμος.

Στη δεξιά πλευρά μιας εξίσωσης έχουμε ένα διάνυσμα-στήλη, b. Στο παράδειγμα (1.2),

$$b = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Στην αριστερή πλευρά, έχουμε τους αγνώστους, τους οποίους επίσης γράφουμε ως ένα διάνυσμα-στήλη,

$$x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

Τέλος έχουμε τους 9 συντελεστές, τους οποίους γράφουμε ως ένα πίνακα, με τρεις γραμμές και τρεις στήλες,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

Αυτός είναι ένας τετραγωνικός πίνακας 3 επί 3.

Ορισμός. Ενας **m** επί **n πίνακας**, ή πίνακας με **m γραμμές** και **n στήλες** είναι μια διάταξη mn πραγματικών αριθμών σε m γραμμές και n στήλες, κλεισμένη σε ορθογώνιες παρενθέσεις [,]. Εάν $m = n$ λέμε οτι ο πίνακας είναι **τετραγωνικός**. Εάν $m \neq n$ λέμε οτι ο πίνακας είναι **παραλληλόγραμμος**.

Οι πίνακες **προστίθενται** κατά συνιστώσα, και **πολλαπλασιάζονται με αριθμούς**, ακριβώς όπως τα διανύσματα. Συχνά θα θεωρούμε ένα n-διάνυσμα ώς ένα $n \times 1$ πίνακα. Μπορούμε να προσθέσουμε δύο πίνακες *μόνον εάν έχουν τις ίδιες διαστάσεις*, δηλαδή τον ίδιο αριθμό γραμμών και τον ίδιο αριθμό στηλών. Για παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{6} & -5 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1+\sqrt{6} & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$3\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 12 & -18 & 0 \end{bmatrix}.$$

Χρειαζόμαστε συμβολισμό για να αναφερόμαστε σε κάθε συνιστώσα ενός πίνακα. Η συνιστώσα στη *γραμμή* i και στη *στήλη* j συμβολίζεται a_{ij}. Ετσι ο $m \times n$ πίνακας A συμβολίζεται

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Μια συντόμευση αυτού του συμβολισμού είναι να γράφουμε $A = [a_{ij}]$. Ετσι, εάν $A = [a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}]$ είναι $m \times n$ πίνακες έχουμε $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$. Επίσης συμβολίζουμε $(A+B)_{ij}$ τη συνιστώσα στη θέση ij του αθροίσματος $A + B$, και έχουμε

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \, ,$$

ενώ

$$(\alpha B)_{ij} = \alpha b_{ij} \, .$$

Είδαμε οτι η αριστερή πλευρά της εξίσωσης (1.2) μπορεί να θεωρηθεί ως ο γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα A, 1.5, με συντελεστές τις συνιστώσες του διανύσματος x, 1.4. Τέτοιοι συνδυασμοί εμφανίζονται συχνά, και μας οδηγούν να ορίσουμε μια πράξη μεταξύ πινάκων και διανυσμάτων.

Ορισμός. Το **γινόμενο** του $m \times n$ πίνακα A με το n-διάνυσμα x είναι ένα m-διάνυσμα Ax, του οποίου η συνιστώσα στη θέση i είναι το εσωτερικό γινόμενο της i-γραμμής του A με το x, $Ax = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, όπου

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n, \text{ για } i = 1, \dots, m.$$

Προσέξτε τη σχέση ανάμεσα στις διαστάσεις του $m \times n$ πίνακα A, του n-διανύσματος x και του m-διανύσματος Ax.

Παράδειγμα 1.1 Το γινόμενο ενός 3×3 πίνακα με ένα 3-διάνυσμα είναι ένα 3-διάνυσμα,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+10+0 \\ 6+0+0 \\ 2+5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix},$$

αλλά το γινόμενο ενός 2×3 πίνακα με ένα 3-διάνυσμα είναι ένα 2-διάνυσμα,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+10+0 \\ 6+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Ελέγχουμε οτι το διάνυσμα Ax είναι πράγματι ο γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα A με συντελεστές τις συνιστώσες του διανύσματος x:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Για να αναφερθούμε στις συνιστώσες τέτοιων γινομένων, συχνά χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\sum$ για αθροίσματα:

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \,.$$

Θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε τη διαδικασία της απαλοιφής μέσω πινάκων. Ένα διαφορετικό είδος γινομένου διανύσματος με πίνακα, όπου τώρα γράφουμε το διάνυσμα ως γραμμή και στα αριστερά του πίνακα, είναι η ακόλουθη:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -8 & -2 \end{bmatrix} .$$

Η κάθε συνιστώσα της γραμμής στα δεξιά είναι το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος-γραμμή με την αντίστοιχη στήλη του πίνακα. Παρατηρούμε οτι ολόκληρη η γραμμή στα δεξιά είναι το αποτέλεσμα του να αφαιρέσουμε 2 φορές την πρώτη γραμμή του πίνακα από τη δεύτερη, δηλαδή ακριβώς αυτό που κάναμε στην απαλοιφή στο σύστημα (1.1). Εφαρμόζουμε τον ίδιο κανόνα με τη γραμμή $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} .$$

Το αποτέλεσμα είναι η τρίτη γραμμή του πίνακα. Από αυτές τις παρατηρήσεις οδηγούμαστε στη δυνατότητα να εκφράσουμε το πρώτο βήμα της απαλοιφής μέσω 'πολλαπλασιασμού' του πίνακα A με έναν πίνακα E:

$$E\,A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Ορισμός. Θεωρούμε τον $m \times n$ πίνακα A και τον $n \times p$ πίνακα B. Το **γινόμενο** AB είναι ο $m \times p$ πίνακας, ο οποίος έχει στοιχείο στη θέση ij το εσωτερικό γινόμενο της i-γραμμής του A και της j-στήλης του B,

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \text{ για } i = 1, \ldots, m \text{ και } j = 1, \ldots, p.$$

Για να ορίζεται το γινόμενο πρέπει ο αριθμός των στηλών του A να είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του B.

Παράδειγμα 1.2 Πολλαπλασιασμός με τον 2×2 πίνακα I αφήνει αμετάβλητο τον 2×3 πίνακα B:

$$I\,B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix} .$$

Παράδειγμα 1.3 Ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι μεταθετικός, ακόμη και όταν ορίζονται και οι δύο πίνακες AB και BA:

$$A\,B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix} ,$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 1.4 Πολλαπλασιασμός από τα αριστερά με τον πίνακα P εναλλάσσει τις γραμμές του B, πολλαπλασιασμός με τον P από τα δεξιά εναλλάσσει τις στήλες του B:

$$PB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$BP = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Εκτός από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού πινάκων που δώσαμε, οι ακόλουθες δύο θεωρήσεις είναι συχνά πολύ χρήσιμες.

Πρόταση 1.1 *1. Η i-γραμμή του πίνακα AB είναι ίση με το γραμμικό συνδυασμό των γραμμών του B με συντελεστές τις συνιστώσες της i-γραμμής του A.*

2. Η j-στήλη του πίνακα AB είναι ίση με το γραμμικό συνδυασμό των στηλών του A με συντελεστές τις συνιστώσες της j-στήλης του B.

Απόδειξη. Η i-γραμμή του AB είναι

$$\begin{bmatrix} (AB)_{i1} & \dots & (AB)_{ip} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kp} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \begin{bmatrix} b_{k1} & \dots & b_{kp} \end{bmatrix}.$$

Γράψτε τον ανάλογο υπολογισμό για τις στήλες.

□

Πρόταση 1.2 *Ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι προσεταιριστικός, και επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση. Συγκεκριμένα, εάν A, B είναι $m \times n$ πίνακες, C, D είναι $n \times p$ πίνακες και E είναι $p \times q$ πίνακας, τότε*

1.
$$A(CE) = (AC)E,$$

2.
$$A(C+D) = AC + AD \quad , \quad (A+B)C = AC + BC.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη της προσεταιριστικής ιδιότητας αποτελεί άσκηση στη χρήση του συμβολισμού $\sum$ για τα αθροίσματα. Για $i = 1, \dots, m$ και $j = 1, \dots, q$, έχουμε:

$$\begin{aligned} (A(CE))_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(CE)_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{t=1}^{p} c_{kt}e_{tj} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{t=1}^{p} a_{ik}c_{kt}e_{tj} \end{aligned}$$

αλλά μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά με την οποία παίρνουμε τα αθροίσματα,

$$\begin{aligned}(A(CE))_{ij} &= \sum_{t=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kt}e_{tj}\\ &= \sum_{t=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kt}\right)e_{tj}\\ &= \sum_{t=1}^{p}(AC)_{it}e_{tj}\\ &= ((AC)E)_{ij}\,.\end{aligned}$$

Η επαλήθευση της επιμεριστικής ιδιότητας είναι απλούστερη και αφήνεται ως άσκηση. □

Άσκηση 1.14 Υπολογίστε τα δύο εσωτερικά γινόμενα και το γινόμενο πινάκων:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\\ -2\\ 7 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3\\ 5\\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1\\ -2\\ 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 1.15 Υπολογίστε τα γινόμενα πινάκων

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix} 0,5\\ \pi/2\\ \sqrt{2}/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix} -1 & 6\cos(\pi/6) & 7\\ 3 & 2 & 2\\ \pi/3 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 1.16 Υπολογίστε το γινόμενο Ax για να βρείτε μία λύση του συστήματος $Ax =$ μηδενικό διάνυσμα. Μπορείτε να βρείτε άλλες λύσεις του $Ax = 0$;

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\\ 1\\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1.17 Γράψτε τους 3 επί 3 πίνακες A και B με στοιχεία

$$a_{ij} = i - j \quad \text{και} \quad b_{ij} = \frac{1}{j}\,.$$

και υπολογίστε τα γινόμενα AB, BA και A^2.

Άσκηση 1.18 Εάν τα στοιχεία του πίνακα A είναι a_{ij}, χρησιμοποιήστε το συμβολισμό των δεικτών για να γράψετε α′. τον πρώτο οδηγό

β′. τον πολλαπλασιαστή λ_{i1} της πρώτης γραμμής όταν την αφαιρούμε από την γραμμή i

γ′. Το νέο στοιχείο που αντικαθιστά το a_{ij} μετά αυτή την αφαίρεση.

δ′. τον δεύτερο οδηγό.

Άσκηση 1.19 Περιγράψτε τις γραμμές του γινομένου EA, και τις στήλες του AE, όταν

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1.20 Θεωρούμε οτι οι στήλες του $n \times n$ πίνακα A είναι τα διανύσματα c_1, c_2, $\ldots$, c_n, και οι γραμμές του $n \times n$ πίνακα B είναι τα διανύσματα-γραμμές r_1, r_2, $\ldots$, r_n. Το γινόμενο $c_i r_i$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας (δείτε το Παράδειγμα 1.3). Εκφράστε το γινόμενο AB ως άθροισμα τέτοιων πινάκων.

Άσκηση 1.21 Αποδείξτε την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού πινάκων, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό αθροίσματος $\sum$.

Άσκηση 1.22 Βρείτε πόσους πολλαπλασιασμούς αριθμών χρειάζεται να κάνετε για να πολλαπλασιάσετε ένα 2×3 πίνακα με ένα 3×5 πίνακα.

Άσκηση 1.23 Αληθές ή ψευδές; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

α′. Εάν η πρώτη και η τρίτη στήλη του πίνακα A είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη και την τρίτη στήλη του πίνακα AB.

β′. Εάν η πρώτη και η τρίτη στήλη του πίνακα B είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη και την τρίτη στήλη του πίνακα AB.

γ′. Εάν η πρώτη και η τρίτη γραμμή του πίνακα A είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη και την τρίτη γραμμή του πίνακα AB.

δ′. Εάν η πρώτη και η τρίτη γραμμή του πίνακα B είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη και την τρίτη γραμμή του πίνακα AB.

Άσκηση 1.24 Ο πολλαπλασιασμός σε μπλόκ χωρίζει τους πίνακες σε υποπίνακες. Εάν το σχήμα των υποπινάκων επιτρέπει τον πολλαπλασιασμό τους, τότε αυτός δίδει το σωστό αποτέλεσμα.

α′. Αντικαταστείστε 2×2 πίνακες για τα A και C, 2×1 πίνακα για το B και 1×2 πίνακα για το D και επαληθεύστε οτι

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AC + BD \end{bmatrix}.$$

β′. Αντικαταστείστε τα x με αριθμούς, και επαληθεύστε τον πολλαπλασιασμό σε μπλόκ

$$\left[\begin{array}{cc:c} x & x & x \\ x & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc:c} x & x & x \\ x & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x \end{array}\right]$$

Άσκηση 1.25 Απαλοιφή σε μπλόκ. Εάν το άνω αριστερά μπλόκ είναι αντιστρέψιμος πίνακας, πολλαπλασιάστε την πρώτη γραμμή του μπλόκ με CA^{-1} και αφαιρέστε από τη δεύτερη, για να βρείτε τον πίνακα S.

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & S \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1.26 Εάν A είναι πίνακας $m \times n$ και B είναι πίνακας $n \times r$, δείξτε οτι για τον υπολογισμό του γινομένου AB απαιτούνται mnr πολλαπλασιασμοί αριθμών. (Σε αυτό το πρόβλημα δεν μας απασχολεί ο αριθμός των προσθέσεων). Εάν C είναι πίνακας $r \times p$, βρείτε πόσοι πολλαπλασιασμοί αριθμών απαιτούνται για τον υπολογισμό των γινομένων $(AB)C$ και $A(BC)$.

Άσκηση 1.27 Δίδονται πίνακες A, B, C, D με τα ακόλουθα μεγέθη: $A : 5 \times 14$, $B : 14 \times 87$, $C : 87 \times 3$ και $D : 3 \times 42$. Βρείτε πόσοι πολλαπλασιασμοί απαιτούνται για να υπολογίσετε το γινόμενο $ABCD$ με τους ακόλουθους τρόπους

α′. $(A(BC))D$

β′. $A(B(CD))$

Εκφραση της απαλοιφής μέσω πινάκων

Οπως είδαμε στο (1.6), το πρώτο βήμα της απαλοιφής στο σύστημα (1.1) περιγράφεται μέσω πολλαπλασιασμού από αριστερά, του πίνακα συντελεστών με κατάλληλο πίνακα.

Ορισμός. Ο πίνακας που έχει 1 στη διαγώνιο και 0 σε όλες τις άλλες θέσεις, ονομάζεται **ταυτοτικός πίνακας**. Ο πίνακας που έχει 1 στη διαγώνιο και $\lambda \neq 0$ σε κάποια θέση ij για $i \neq j$, ενώ έχει 0 στις υπόλοιπες θέσεις, ονομάζεται **στοιχειώδης πίνακας**, και συμβολίζεται $E_{ij}(\lambda)$.
Οταν πολλαπλασιάζουμε ένα πίνακα A από τα *αριστερά* με τον $E_{ij}(-\lambda)$, το αποτέλεσμα είναι να αφαιρούμε λ φορές τη γραμμή j από τη γραμμή i του A.
Οταν πολλαπλασιάζουμε ένα πίνακα A από τα *δεξιά* με τον $E_{ij}(-\lambda)$, το αποτέλεσμα είναι να αφαιρούμε λ φορές τη στήλη i από τη στήλη j του A. Προσέξτε τη διαφορά στη διάταξη των δεικτών

Ας εφαρμόσουμε αυτή τη διαδικασία στο σύστημα 1.1, βάζοντας και το διάνυσμα b της δεξιάς πλευράς στον *επαυξημένο* πίνακα.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

1. Αφαιρούμε 2 φορές την πρώτη γραμμή από τη δεύτερη

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\mathbf{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

2. Αφαιρούμε -1 φορά την πρώτη γραμμή από την τρίτη

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -(-\mathbf{1}) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

3. Αφαιρούμε -1 φορά τη δεύτερη γραμμή από την τρίτη

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -(-\mathbf{1}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Βλέπουμε οτι ο πολλαπλασιασμός του πίνακα A από τα αριστερά, πρώτα με τον $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, κατόπιν με τον $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -(-1) & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και τέλος με τον $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -(-1) & 1 \end{bmatrix}$ έχει το ίδιο αποτέλεσμα με την απαλοιφή Gauss. Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και με το διάνυσμα b. Η απαλοιφή Gauss γίνεται

$$[A \vdots b] \to E[A \vdots b] \to FE[A \vdots b] \to GFE[A \vdots b]\,.$$

Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστική ιδιότητα, καταλήγουμε οτι μπορούμε να εκφράσουμε την απαλοιφή ως πολλαπλασιασμό του πίνακα A και του διανύσματος b με το γινόμενο GFE. Το αρχικό σύστημα

$$AX = b$$

γίνεται

$$GFEAx = GFEb\,.$$

Ορισμός. Ενας πίνακας $A = [a_{ij}]$ ονομάζεται **άνω τριγωνικός** εάν όλα τα στοιχεία κάτω από τη διαγώνιο είναι ίσα με 0, δηλαδή εάν $a_{ij} = 0$ όταν $i > j$.
Ενας πίνακας $A = [a_{ij}]$ ονομάζεται **κάτω τριγωνικός** εάν όλα τα στοιχεία πάνω από τη διαγώνιο είναι ίσα με 0, δηλαδή εάν $a_{ij} = 0$ όταν $i < j$.

Εάν γράφουμε $U = GFEA$ και $c = GFEb$, U είναι άνω τριγωνικός πίνακας, και έχουμε να λύσουμε το σύστημα

$$Ux = c$$

το οποίο λύνεται με ανάδρομη αντικατάσταση, και έχει ακριβώς το ίδιο σύνολο λύσεων με το αρχικό σύστημα.

Μπορούμε να αναιρέσουμε τα βήματα της απαλοιφής, για να πάμε από τον πίνακα U στον A: πρέπει να αναιρέσουμε ένα–ένα βήμα, με την αντίστροφη σειρά. Είναι φανερό οτι για να αναιρέσουμε το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού με τον G αρκεί να πολλαπλασιάσουμε με τον πίνακα που **προσθέτει** (-1) φορές τη δεύτερη γραμμή στην τρίτη, τον οποίο συμβολίζουμε G^{-1},

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Ανάλογα ορίζουμε τον πίνακα $F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathbf{1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ που προσθέτει (-1) φορά την πρώτη γραμμή στην τρίτη, και τον πίνακα $E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ που προσθέτει 2 φορές την πρώτη γραμμή στη δεύτερη, και έχουμε

$$E^{-1}F^{-1}G^{-1}U = A\,.$$

Το γινόμενο $E^{-1}F^{-1}G^{-1}$ το συμβολίζουμε L. Εχουμε γράψει τον πίνακα A σαν γινόμενο

$$A = LU\,.$$

Μπορούμε να εκτελέσουμε αυτή τη διαδικασία σε οποιοδήποτε τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα, αρκεί τα στοιχεία που εμφανίζονται στη διαγώνιο κατά την απαλοιφή να μην είναι μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση λέμε οτι η διαδικασία απαλοιφής βρίσκει ένα πλήρες σύνολο οδηγών.

Άσκηση 1.28 Υπολογίστε το γινόμενο $L = E^{-1}F^{-1}G^{-1}$.

Βλέπουμε οτι ο L στο παράδειγμα είναι κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο και τους πολλαπλασιαστές κάτω από τη διαγώνιο. Θα δείξουμε οτι αυτό δεν είναι τυχαίο. Ο L είναι το γινόμενο $E^{-1}F^{-1}G^{-1}$ των πινάκων που αναιρούν τα βήματα της απαλοιφής. Ο G^{-1} είναι ο στοιχειώδης πίνακας $E_{32}(-1)$, με τον αντίστοιχο πολλαπλασιαστή $\lambda_{32} = -1$ στη θέση 32. Ο F^{-1} είναι ο στοιχειώδης πίνακας $E_{31}(-1)$, με τον αντίστοιχο πολλαπλασιαστή $\lambda_{31} = -1$ στη θέση 31. Πολλαπλασιασμός του $E_{32}(-1)$ με τον $E_{31}(-1)$ από τα αριστερά, προσθέτει λ_{31} φορές την πρώτη γραμμή του E_{32} στην τρίτη γραμμή. Αλλά η πρώτη γραμμή είναι [1 0 0], οπότε το αποτέλεσμα είναι απλώς να εμφανιστεί ο πολλαπλασιαστής λ_{31} στη θέση 31 του γινομένου:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρόμοια, πολλαπλασιασμός με τον πίνακα E^{-1}, τοποθετεί τον πολλαπλασιαστή λ_{21} στη θέση 21, χωρίς να αλλάξει τα άλλα στοιχεία του πίνακα.

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} L = E^{-1}F^{-1}G^{-1} &= E_{21}(\lambda_{21})E_{31}(\lambda_{31})E_{32}(\lambda_{32}) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{32} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ορισμός. Λέμε οτι η διαδικασία απαλοιφής σε ένα $n \times n$ πίνακα A βρίσκει ένα **πλήρες σύστημα οδηγών**, όταν το πλήθος των οδηγών είναι n. (Υπενθυμίζουμε οτι, εξ ορισμού, οδηγός είναι μη μηδενικό στοιχείο). Αυτό σημαίνει οτι ο άνω τριγωνικός πίνακας στον οποίο καταλήγει η διαδικασία απαλοιφής έχει όλα τα διαγώνια στοιχεία διαφορετικά από το 0.

Πρόταση 1.3 *Εάν στο $n \times n$ σύστημα $Ax = b$ η διαδικασία απαλοιφής βρίσκει ένα πλήρες σύνολο οδηγών χωρίς να χρειαστεί να κάνουμε εναλλαγές γραμμών, τότε ο πίνακας A γράφεται ως γινόμενο $A = LU$, όπου*

- *L είναι κάτω τριγωνικός, με 1 στη διαγώνιο, και τους πολλαπλασιαστές λ_{ij} κάτω από τη διαγώνιο.*
- *U είναι άνω τριγωνικός, με τους οδηγούς στη διαγώνιο.*

Η παραγοντοποίηση $A = LU$ έχει μεγάλη πρακτική σημασία. Δεν είναι απλά ένας τρόπος να παραστήσουμε την απαλοιφή. Η εξίσωση $Ax = b$ γίνεται

$$LUx = b.$$

Αλλά εάν γράψουμε $c = Ux$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την αρχική εξίσωση με τις δύο εξισώσεις

$$Lc = b, \quad Ux = c.$$

Έτσι για να λύσουμε την αρχική εξίσωση αρκεί να βρούμε το c που ικανοποιεί την εξίσωση $Lc = b$ και κατόπιν το x που ικανοποιεί την εξίσωση $Ux = c$. Το σημαντικό είναι οτι αυτά τα δύο συστήματα είναι τριγωνικά, και συνεπώς είναι εύκολο να τα λύσουμε. Στο παράδειγμα 1.1 η εξίσωση $Lc = b$ γίνεται

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

δηλαδή

$$\begin{array}{rcrcrcr} c_1 & & & & & = & 5 \\ 2c_1 & + & c_2 & & & = & -2 \\ -c_1 & - & c_2 & + & c_3 & = & 9 \end{array}$$

απ΄ όπου έχουμε, με ευθεία αντικατάσταση, $c_1 = 5$, $c_2 = -12$, $c_3 = 2$.

Η εξίσωση $Ux = c$ τώρα γίνεται

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

την οποία λύνουμε με αναδρομή αντικατάσταση.

Η ευθεία και η ανάδρομη αντικατάσταση εξασφαλίζουν οτι αυτά τα συστήματα έχουν μοναδική λύση:

Πρόταση 1.4 *Εάν U είναι $n \times n$ άνω τριγωνικός πίνακας, του οποίου τα στοιχεία στη διαγώνιο είναι όλα διαφορετικά από το μηδέν, τότε κάθε σύστημα*

$$Ux = b$$

έχει μοναδική λύση. Το ίδιο ισχύει για κάτω τριγωνικό πίνακα του οποίου όλα τα διαγώνια στοιχεία είναι μη μηδενικά.

Εκτός από την παραγοντοποίηση $A = LU$, καμιά φορά χρησιμοποιούμε μια πιό συμμετρική παραγοντοποίηση: γράφουμε τον U ως γινόμενο ενός διαγώνιου πίνακα D με τους οδηγούς στη διαγώνιο, και ενός άνω τριγωνικού πίνακα U', με 1 στη διαγώνιο,

$$A = LDU' .$$

Ο U' αποτελείται από τις γραμμές του U διαιρεμένες με τον αντίστοιχο οδηγό:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Παρ' όλο που η σειρά με την οποία κάνουμε τα βήματα της απαλοιφής (χωρίς εναλλαγές) μπορεί να αλλάξει, το τελικό αποτέλεσμα είναι μοναδικό, όπως θα δείξετε στην Άσκηση 1.32.

Άσκηση 1.29 Το γινόμενο δύο κάτω τριγωνικών πινάκων είναι πάλι κάτω τριγωνικός πίνακας (όλα τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν). Εξακριβώστε οτι ισχύει με ένα παράδειγμα πινάκων 3×3, και κατόπιν εξηγήστε αυτό το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τους κανόνες του πολλαπλασιασμού πινάκων.

Άσκηση 1.30 Εφαρμόστε απαλοιφή για να βρείτε τους παράγοντες L και U των πινάκων

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 1.31 Λύστε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

αναλύοντάς την σε δύο τριγωνικές εξισώσεις, $Lc = b$ και $Ux = c$.

Άσκηση 1.32 Δείξτε οτι η παραγοντοποίηση $A = LDU'$ ενός πίνακα είναι μοναδική.

Άσκηση 1.33 Υπολογίστε τα γινόμενα FGH και HGF (έχουμε παραλείψει τα μηδενικά πάνω από τη διαγώνιο):

$$F = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

Άσκηση 1.34 Παραγοντοποιήστε τον πίνακα A σε γινόμενο LU, και γράψτε το άνω τριγωνικό σύστημα $Ux = c$ που προκύπτει μετά την απαλοιφή, για το σύστημα:

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} .$$

Άσκηση 1.35 Βρείτε τους πίνακες E^2, E^8 και E^{-1} εάν

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 1.36 Θεωρούμε τον άνω τριγωνικό πίνακα

$$U = \begin{bmatrix} d_1 & a & b \\ 0 & d_2 & c \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

και υποθέτουμε οτι υπάρχει πίνακας V τέτοιος ώστε $VU = I$. Δείξτε οτι $d_1 d_2 d_3 \neq 0$ και οτι V είναι επίσης άνω τριγωνικός.

Εναλλαγές γραμμών

Στο σύστημα εξισώσεων (1.3) χρειάστηκε να αλλάξουμε τη σειρά των εξισώσεων, για να βρούμε ένα πλήρες σύνολο οδηγών. Πώς μπορούμε να παραστήσουμε μέσω πινάκων τις εναλλαγές γραμμών;

Παράδειγμα 1.5

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P_{23}\, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

Ο πίνακας P_{23} εναλλάσσει τη δεύτερη και την τρίτη γραμμή του πίνακα A όταν πολλαπλασιάζουμε τον A με τον P_{23} από τα αριστερά.

Ορισμός. Ονομάζουμε **πίνακα εναλλαγής** P_{ij} τον πίνακα που εναλλάσει την i γραμμή και τη j γραμμή του πίνακα A όταν πολλαπλασιάζουμε τον A με τον P_{ij} από τα αριστερά. Ο πίνακας P_{ij} έχει 1 στις θέσεις ij και ji, και στη διαγώνιο εκτός από τις θέσεις ii και jj, ενώ έχει 0 στις υπόλοιπες θέσεις. Όταν πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα A από τα δεξιά με τον πίνακα εναλλαγής P_{ij}, το αποτέλεσμα είναι η εναλλαγή των στηλών i και j του A.

Το γινόμενο πινάκων εναλλαγής ονομάζεται **πίνακας μετάθεσης**. Όταν πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα A από τα *αριστερά* με ένα πίνακα μεταθέσεως, το αποτέλεσμα είναι μία μετάθεση των *γραμμών* του πίνακα A. Όταν πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα A από τα *δεξιά* με έναν πίνακα μεταθέσεως, το αποτέλεσμα είναι μία μετάθεση των *στηλών* του A.

Για έναν $n \times n$ πίνακα A υποθέτουμε οτι στη διαδικασία της απαλοιφής Gauss του A, χρειάζεται να κάνουμε διαδοχικά τις εναλλαγές γραμμών, που παριστάνονται από τους πίνακες $P_{i_1 j_1}$, $P_{i_2 j_2}$, …, $P_{i_k j_k}$. Θεωρητικά θα μπορούσαμε να κάνουμε όλες τις εναλλαγές γραμμών στην αρχή, χρησιμοποιώντας το γινόμενο των πινάκων εναλλαγής $P = P_{i_k j_k} \dots P_{i_1 j_1}$, και κατόπιν να ξεκινήσουμε τη διαδικασία της απαλοιφής στον πίνακα PA. Θα αποδείξομε αυτό τον ισχυρισμό στο Θεώρημα 2.1, αλλά δείτε και την Άσκηση 1.38. Στον PA η διαδικασία απαλοιφής βρίσκει ένα πλήρες σύνολο οδηγών χωρίς να χρειαστεί να κάνουμε εναλλαγές γραμμών, και συνεπώς έχουμε παραγοντοποίηση

$$PA = LU\,.$$

Τώρα μπορούμε να δώσουμε έναν ορισμό του ιδιόμορφου πίνακα, και να ανακεφαλαιώσουμε τα μέχρι τώρα αποτελέσματα σε ένα Θεώρημα.

Ορισμός. Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A είναι **ιδιόμορφος** εάν η διαδικασία της απαλοιφής (με εναλλαγές γραμμών) καταλήγει σε ένα άνω τριγωνικό πίνακα με ένα ή περισσότερα μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο. Αντιθέτως, ο πίνακας A λέγεται **μη ιδιόμορφος** εάν η διαδικασία της απαλοιφής βρίσκει ένα πλήρες σύνολο οδηγών, δηλαδή εάν ο άνω τριγωνικός πίνακας U στον οποίο καταλήγει έχει όλα τα στοιχεία στη διαγώνιο διαφορετικά από το 0.

Θεώρημα 1.5 *Εστω ένα σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους*

$$Ax = b\,.$$

Τότε ισχύει ένα από τα ακόλουθα

1. *Εάν ο πίνακας A είναι ιδιόμορφος, τότε καμία αναδιάταξη των γραμμών δεν μπορεί να παραγάγει ένα πλήρες σύνολο οδηγών.*
2. *Εάν ο πίνακας A δεν είναι ιδιόμορφος, τότε υπάρχει ένας πίνακας μεταθέσεως P τέτοιος ώστε στη διαδικασία απαλοιφής του PA δεν εμφανίζονται μηδενικά στη θέση των οδηγών. Σε αυτή την περίπτωση*

   (α΄) *Το σύστημα έχει μοναδική λύση, η οποία υπολογίζεται με τη διαδικασία απαλοιφής και ανάδρομης αντικατάστασης.*

   (β΄) *Ο πίνακας PA παραγοντοποιείται ως γινόμενο*

   $$PA = LDU'$$

   όπου L είναι κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο, D είναι διαγώνιος πίνακας με τους οδηγούς στη διαγώνιο, και U' είναι άνω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο. Η παραγοντοποίηση σε πίνακες με αυτές τις ιδιότητες είναι μοναδική.

Άσκηση 1.37 Λύστε τα ακόλουθα συστήματα με απαλοιφή, κάνοντας εναλλαγή γραμμών όπου αυτό είναι απαραίτητο:

$$\begin{array}{rcrcrcr} u & + & 4v & + & 2w & = & -2 \\ -2u & - & 8v & + & 3w & = & 32 \\ & & v & + & w & = & 1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rcrcrcr} & & v & + & w & = & 0 \\ u & + & v & & & = & 0 \\ u & + & v & + & w & = & 1 \end{array}$$

Βρείτε τους πίνακες μεταθέσεων που χρειάζονται.

Άσκηση 1.38 E είναι ο 3×3 πίνακας που αφαιρεί την πρώτη από την τρίτη γραμμή, και P ο πίνακας εναλλαγής που εναλλάσσει τη δεύτερη με την τρίτη γραμμή.

α΄. Βρείτε τους πίνακες E και P, και υπολογίστε τον πίνακα E' για τον οποίο $PE' = EP$.

β΄. Περιγράψτε τη δράση του πίνακα E'.

Άσκηση 1.39 Καταγράψετε τους 6 πίνακες μεταθέσεων 3×3, συμπεριλαμβανομένου του ταυτοτικού πίνακα I. Βρείτε τα αντίστροφα τους, τα οποία είναι επίσης πίνακες μεταθέσεως.

Άσκηση 1.40 Βρείτε τη λύση του ακόλουθου συστήματος, επιλύοντας τα δύο τριγωνικά συστήματα, χωρίς να υπολογίσετε το γινόμενο LU.

$$LUx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1.41 Βρείτε τις παραγοντοποιήσεις $PA = LDU'$ για τους πίνακες

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1.42 Ποιοι είναι οι στοιχειώδεις πίνακες E_{21} και E_{32} οι οποία φέρνουν τον πίνακα A σε άνω τριγωνική μορφή $E_{32}E_{21}A = U$; Πολλαπλασιάστε με τους πίνακες E_{32}^{-1} και E_{21}^{-1} για να παραγοντοποιήσετε το A σε $LU = E_{21}^{-1}E_{32}^{-1}U$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1.43 Υπολογίστε τους παράγοντες L και U για το συμμετρικό πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τέσσερεις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα a, b, c, d για να έχει ο $A = LU$ τέσσερεις οδηγούς.

Άσκηση 1.44 Εάν ο πίνακας A έχει οδηγούς 2, 7 και 6, χωρίς εναλλαγές γραμμών, ποιοί είναι οι οδηγοί του 2×2 υποπίνακα B στην άνω αριστερή πλευρά; Εξηγήστε το συμπέρασμά σας.

Άσκηση 1.45 Ποιός πίνακας μεταθέσεως P κάνει τον PA άνω τριγωνικό; Ποιοί πίνακες μεταθέσεων κάνουν τον P_1AP_2 κάτω τριγωνικό; Πολλαπλασιασμός με τον P_2 στα δεξιά μεταθέτει τις .... του A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1.46 Εάν P_1 και P_2 είναι πίνακες μεταθέσεως, το ίδιο ισχύει για τον P_1P_2: δείξτε οτι αυτός περιέχει τις γραμμές του I σε κάποια διάταξη. Βρείτε παραδείγματα στα οποία $P_1P_2 \neq P_2P_1$ και $P_3P_4 = P_4P_3$.

Αντίστροφοι πίνακες

Σε αυτήν τη παράγραφο περιοριζόμαστε σε τετραγωνικούς πίνακες.

Ορισμός. Ενας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται **αντιστρέψιμος** εάν υπάρχει ένας πίνακας B τέτοιος ώστε

$$BA = I \quad \text{και} \quad AB = I\,.$$

Ενας τέτοιος πίνακας B ονομάζεται **αντίστροφος** του A, και συμβολίζεται A^{-1}.

Θα δούμε αργότερα οτι αρκεί η μία από τις δύο συνθήκες. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε, (στο Κεφάλαιο 3, Πρόταση 3.5), την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.6 *Εάν A είναι τετραγωνικός πίνακας, τότε υπάρχει πίνακας B τέτοιος ώστε $AB = I$ εάν και μόνον εάν υπάρχει πίνακας C τέτοιος ώστε $CA = I$.*

Πρόταση 1.7 *Εάν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο αντίστροφος πίνακας είναι μοναδικός.*

Απόδειξη. Εάν B και C είναι αντίστροφοι του A, τότε $AB = I = CA$. Αρα

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C\,.$$

□

Παράδειγμα 1.6 Ενας 1×1 πίνακας $A = [a]$ είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν $a \neq 0$, και ο αντίστροφος είναι $A^{-1} = [1/a]$.

Πρόταση 1.8 *Εάν A είναι αντιστρέψιμος πίνακας, τότε η μοναδική λύση της εξίσωσης $Ax = b$ είναι η $x = A^{-1}b$.*

Η παραπάνω πρόταση μας λέει οτι εάν ο A είναι αντιστρέψιμος, υπάρχει πάντα μοναδική λύση της $Ax = b$, για κάθε b. Όμως δεν χρειάζεται να βρούμε τον αντίστροφο για να υπολογίσουμε τη λύση. Ο συντομότερος τρόπος να βρούμε τη λύση είναι η απαλοιφή Gauss και η ανάδρομη αντικατάσταση, για την οποία απαιτούνται περίπου το ένα τρίτο των πράξεων που απαιτούνται για τον υπολογισμό του αντιστρόφου.

Πρόταση 1.9 *Το γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων A και B είναι αντιστρέψιμος πίνακας, και*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\,.$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε οτι $B^{-1}A^{-1}$ ικανοποιεί τις σχέσεις που ορίζουν τον αντίστροφο.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I\,,$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I\,.$$

□

Παράδειγμα 1.7 Εάν A, F, G είναι αντιστρέψιμοι και $GFEA = U$, τότε $F^{-1}G^{-1}UA^{-1} = F^{-1}G^{-1}(GFEA)A^{-1} = E$.

Λήμμα 1.10 *Εάν B και C είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν ο BAC είναι αντιστρέψιμος.*

Απόδειξη. Προφανώς, εάν υπάρχει ο A^{-1}, τότε $(BAC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}B^{-1}$. Αντιστρόφως, εάν υπάρχει ο $(BAC)^{-1}$, ελέγχουμε οτι $C(BAC)^{-1}B$ είναι αντίστροφο του A:

$$A(C(BAC)^{-1}B) = (B^{-1}B)A(C(BAC)^{-1}B) = B^{-1}(BAC)(BAC)^{-1}B) = I\,.$$

□

Λήμμα 1.11 *Ενας πίνακας με μια στήλη μηδενικών δεν είναι αντιστρέψιμος.*

Απόδειξη. Για οποιοδήποτε B, εάν A έχει στην j-στήλη μηδενικά, τότε από τον ορισμό του γινομένου, BA έχει επίσης μηδενικά στην j-στήλη. Αρα $BA \neq I$.

□

Άσκηση 1.47 Δείξτε οτι ένας 2×2 πίνακας $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν $ad - bc \neq 0$, και ο αντίστροφος είναι $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Άσκηση 1.48 Βρείτε τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων, εάν υπάρχουν

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1.49 Δείξτε οτι ένας διαγώνιος πίνακας είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν όλα τα στοιχεία στη διαγώνιο είναι διαφορετικά από το μηδέν. Ποιός είναι ο αντίστροφος;

Άσκηση 1.50 Εάν ο αντίστροφος του A^2 είναι B, δείξτε οτι ο αντίστροφος του A είναι AB. (Αυτό σημαίνει οτι ο A είναι αντιστρέψιμος όταν ο A^2 είναι αντιστρέψιμος).

Άσκηση 1.51 Βρείτε τρείς 2×2 πίνακες, διαφορετικούς από τους I και $-I$, οι οποίοι είναι ίσοι με τους αντιστρόφους τους, $A^2 = I$.

Η διαδικασία Gauss - Jordan για την εύρεση του αντιστρόφου

Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο του πίνακα A θεωρούμε την εξίσωση $AA^{-1} = I$ στήλη προς στήλη: εάν x_j είναι η j στήλη του A^{-1}, και e_j η j στήλη του I, έχουμε

$$Ax_j = e_j \quad , \quad j = 1, \ldots, n.$$

Δηλαδή, για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο A^{-1} πρέπει να λύσουμε n συστήματα n εξισώσεων με n αγνώστους. Ομως ο πίνακας συντελεστών A είναι ο ίδιος και για τα n συστήματα. Αρα η απαλοιφή Gauss μπορεί να γίνει μία φορά, για όλα τα συστήματα. Για να καταγράψουμε αυτή τη διαδικασία φτιάχνουμε τον *επαυξημένο* πίνακα με τις στήλες του A και τις στήλες του I.

$$\begin{aligned} [A\, I] &= [A\, e_1\, e_2\, e_3] \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \left[U\,L^{-1}\right]
\end{aligned}$$

Αντί να προχωρήσουμε στην ανάδρομη αντικατάσταση με το συνήθη τρόπο, συνεχίζουμε την απαλοιφή των στοιχείων πάνω από τη διαγώνιο, ξεκινώντας από την τελευταία στήλη. Προσθέτουμε δύο φορές την τρίτη γραμμή στη δεύτερη γραμμή, και αφαιρούμε μία φορά την τρίτη γραμμή από την πρώτη γραμμή:

$$\left[U\,L^{-1}\right] \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Προσθέτουμε 1/8 φορές τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη γραμμή:

$$\to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \frac{12}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{6}{8} \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τώρα στις τρείς στήλες στα αριστερά έχουμε ένα διαγώνιο πίνακα. Διαιρούμε με τους οδηγούς, για να πάρουμε I στις τρεις στήλες στα αριστερά:

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{12}{16} & -\frac{5}{16} & -\frac{6}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [I\,B]\,.$$

Οι στήλες του B είναι ακριβώς οι λύσεις των εξισώσεων $Ax_j = e_j$, δηλαδή $AB = I$. Κοιτώντας το διαφορετικά, κάθε βήμα της διαδικασίας που ακολουθήσαμε αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό από τα αριστερά με ένα πίνακα $F_1, \ldots, F_k$. Από το αριστερό μέρος του επαυξημένου πίνακα έχουμε $F_k \ldots F_1\, A = I$, ενώ από το δεξί μέρος έχουμε $F_k \ldots F_1\, I = B$. Συνεπώς $A^{-1} = F_k \ldots F_1 = B$.

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε ονομάζεται **απαλοιφή Gauss–Jordan**, και μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε μη ιδιόμορφο πίνακα. Η δυνατότητα εφαρμογής της διαδικασίας δείχνει οτι *κάθε μη ιδιόμορφος πίνακας είναι αντιστρέψιμος*. Θα δείξουμε και το αντίστροφο, *ένας ιδιόμορφος πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος*.

Αρχικά θεωρούμε έναν άνω τριγωνικό πίνακα.

Λήμμα 1.12 *Εάν ο άνω τριγωνικός πίνακας U έχει ένα μηδενικό στοιχείο στη διαγώνιο, τότε δεν είναι αντιστρέψιμος.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι ο πίνακας U είναι άνω τριγωνικός και έχει ένα μηδενικό στοιχείο στη διαγώνιο, έστω το $u_{kk} = 0$. Αφαιρώντας πολλαπλάσιο της *στήλης* $k-1$ από τη στήλη k του U μπορούμε να μηδενίσουμε το στοιχείο $u_{(k-1)\,k}$. Στη συνέχεια, αφαιρώντας κατάλληλα πολλαπλάσια των στηλών $k-2,\ k-3,\ \ldots, 1$ μπορούμε να μηδενίσουμε όλα τα στοιχεία $u_{(k-2)\,k},\ u_{(k-3)\,k},\ \ldots,\ u_{1\,k}$, καταλήγοντας σε ένα πίνακα W στον οποίο όλα τα στοιχεία της στήλης k είναι μηδέν.

Υπενθυμίζουμε οτι η αφαίρεση ενός πολλαπλασίου της στήλης j ενός πίνακα από τη στήλη k, ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό από τα δεξιά με το στοιχειώδη πίνακα $E_{jk}(-\lambda)$. Εάν M είναι το γινόμενο αυτών των στοιχειωδών πινάκων, έχουμε

$$W = UM\,.$$

Γνωρίζουμε οτι οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι. Συνεπώς από την Πρόταση 1.9, ο πίνακας M είναι αντιστρέψιμος. Από το Λήμμα 1.10, ο πίνακας U είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν ο W είναι αντιστρέψιμος. Αλλά ο W έχει μία στήλη μηδενικών και από το Λήμμα 1.11 δεν είναι αντιστρέψιμος.

□

Εάν τώρα A είναι ένας ιδιόμορφος $n \times n$ πίνακας, τότε η διαδικασία της απαλοιφής Gauss καταλήγει με ένα άνω τριγωνικό πίνακα U, ο οποίος έχει τουλάχιστον ένα μηδενικό στοιχείο στη διαγώνιο, και

$$A = P^{-1}LU\,.$$

Αφού P και L είναι αντιστρέψιμοι και U δεν είναι αντιστρέψιμος, από το Λήμμα 1.10 καταλήγουμε οτι ο ιδιόμορφος πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Εχουμε αποδείξει το ακόλουθο

Θεώρημα 1.13 *Ενας πίνακας είναι ιδιόμορφος εάν και μόνον εάν δεν είναι αντιστρέψιμος.*

Άσκηση 1.52 Χρησιμοποιήστε τη διαδικασία Gauss–Jordan για να βρείτε τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων, εάν υπάρχουν

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 1.53 Βρείτε τον αντίστροφο του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1.54 Βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα στοιχεία των πινάκων A και B, ώστε αυτοί να είναι αντιστρέψιμοι.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ f & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1.55 Εναλλάξτε τις γραμμές και συνεχίστε με την απαλοιφή Gauss-Jordan για να βρείτε τον πίνακα A^{-1}:

$$\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 1.56 Βρείτε x τέτοιο ώστε

α′.

$$\begin{bmatrix} 2x & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

β′.

$$2\begin{bmatrix} 2x & x \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1.57 Μία ενδιαφέρουσα και κομψή εφαρμογή της διαδικασίας Gauss–Jordan είναι οτι ο αντίστροφος ενός μη ιδιόμορφου άνω τριγωνικού πίνακα είναι επίσης άνω τριγωνικός. Φανταστείτε οτι εκτελείτε τη διαδικασία, για να δείτε οτι ο αντίστροφος είναι άνω τριγωνικός.

Άσκηση 1.58 Δείξτε οτι εάν ένας πίνακας έχει δύο γραμμές ίσες, ή δύο στήλες ίσες, τότε δεν είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 1.59 Δώστε παραδείγματα πινάκων A και B τέτοιων ώστε

α′. $A+B$ δεν είναι αντιστρέψιμος, αλλά A και B είναι.

β′. $A+B$ είναι αντιστρέψιμος, αλλά A και B δεν είναι.

γ′. και οι τρείς πίνακες A, B, $A+B$ είναι αντιστρέψιμοι.

Στην τελευταία περίπτωση χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $A^{-1}(A+B)B^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$, για να δείξετε οτι $C = B^{-1} + A^{-1}$ είναι επίσης αντιστρέψιμος, και να υπολογίσετε τον C^{-1}.

Άσκηση 1.60 Υποθέστε οτι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, και οτι εναλλάσσοντας τις δύο πρώτες γραμμές του A λαμβάνουμε τον πίνακα B. Είναι ο B αντιστρέψιμος; Πώς μπορούμε να πάρουμε τον B^{-1} από τον A^{-1};

Άσκηση 1.61 Εάν A και B είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, δείξτε οτι $I - BA$ είναι αντιστρέψιμος εάν ο $I - AB$ είναι αντιστρέψιμος. Ξεκινήστε από την ταυτότητα $B(I - AB) = (I - BA)B$.

Ανάστροφοι πίνακες

Ορισμός. Εάν A είναι ένας $m \times n$ πίνακας, ονομάζουμε **ανάστροφο** (transpose) του A, και συμβολίζουμε A^T τον $n \times m$ πίνακα του οποίου οι στήλες είναι οι γραμμές του A. Το στοιχείο στη θέση ij του πίνακα A^T είναι ίσο με το στοιχείο στη θέση ji του A:

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji}\,.$$

Παράδειγμα 1.8

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε τις ακόλουθες ιδιότητες του αναστρόφου.

Πρόταση 1.14 *Εάν A, B είναι $m \times n$ πίνακες, και C είναι $n \times p$ πίνακας, τότε*

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$.
2. $(AC)^T = C^T A^T$.
3. *Εάν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε* $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Ορισμός. Ενας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται **συμμετρικός** εάν $A^T = A$, δηλαδή εάν $(A)_{ij} = (A)_{ji}$ για κάθε i, j. Ενας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται **αντισυμμετρικός** εάν $A^T = -A$, δηλαδή εάν $(A)_{ij} = -(A)_{ji}$ για κάθε i, j.

Πρόταση 1.15 *Εάν A είναι συμμετρικός πίνακας, και $A = LDU'$, όπου L είναι κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο, D είναι διαγώνιος και U' είναι άνω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο, τότε*

$$L^T = U' .$$

Απόδειξη. Εχουμε $LDU' = A = A^T = (LDU')^T = (U')^T D^T L^T$. Αλλά $(U')^T$ είναι κάτω τριγωνικός, D^T είναι διαγώνιος και L^T είναι άνω τριγωνικός, και από τη μοναδικότητα της παραγοντοποίησης $A = LDU'$, έχουμε $L^T = U'$, και $(U')^T = L$.

□

Άσκηση 1.62 Βρείτε τον ανάστροφο των πινάκων

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} .$$

Άσκηση 1.63 Συμπληρώστε τα $*$ στους ακόλουθους πίνακες, έτσι ώστε να είναι συμμετρικοί:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ * & 6 & * \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} -3 & * & 8 & 9 \\ -4 & 7 & * & 7 \\ * & 2 & 6 & 4 \\ * & 7 & * & 9 \end{bmatrix} .$$

Άσκηση 1.64 Βρείτε A τέτοιο ώστε $(4A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 1.65 Δείξτε οτι εάν A και B είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \quad , \quad (A^T B^T)^{-1} = (A^{-1}B^{-1})^T .$$

Άσκηση 1.66 Δίδονται πίνακες A σχήματος 4×1, B σχήματος 2×3, C σχήματος 2×4 και D σχήματος 1×3. Ποιοί από τους ακόλουθους πίνακες ορίζονται, και τί σχήμα έχουν;

α′. ADB^T β′. $C^T B - 5AD$
γ′. $4CA - (CA)^2$ δ′. $(ADB^T C)^2 - I_4$

Άσκηση 1.67 Αποδείξτε οτι $(AB)^T = B^T A^T$. Ξεκινήστε από την πρώτη γραμμή του $(AB)^T$, η οποία είναι ίση με την πρώτη στήλη του AB, και δείξτε οτι αυτή είναι η πρώτη γραμμή του $B^T A^T$.

Άσκηση 1.68 Βρείτε τους αντιστρόφους των πινάκων μεταθέσεως

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Εξηγήστε γιατί, για πίνακες μεταθέσεως P, ισχύει πάντα $P^{-1} = P^T$: δείξτε οτι τα 1 βρίσκονται στη σωστή θέση ώστε να ισχύει $PP^T = I$

Άσκηση 1.69 Είναι τα ακόλουθα αληθή ή ψευδή; Δώστε αντιπαραδείγματα εάν είναι ψευδή και αποδείξεις εάν είναι αληθή.

α′. Ένας 4×4 πίνακας με μία γραμμή μηδέν δεν είναι αντιστρέψιμος.

β′. Ένας πίνακας με 1 στην κύρια διαγώνιο είναι αντιστρέψιμος.

γ′. Εάν A είναι αντιστρέψιμος, τότε A^{-1} είναι αντιστρέψιμος.

δ′. Εάν A^T είναι αντιστρέψιμος, τότε A είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 1.70 Δείξτε οτι υπάρχουν μη μηδενικοί πίνακες για τους οποίους $A^2 = 0$, αλλά οτι $A^T A = 0$ μόνο όταν $A = 0$.

Άσκηση 1.71 Παραγοντοποιήστε τους ακόλουθους συμμετρικούς πίνακες στην μορφή $A = LDL^T$, όπου D είναι διαγώνιος και L κάτω τριγωνικός.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \; A_2 = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & c \end{bmatrix} \; A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1.72 Υποθέστε οτι ο πίνακας R είναι $m \times n$ παραλληλόγραμμος, και ο A είναι $m \times m$ συμμετρικός.

α′. Τι σχήμα έχει ο πίνακας $R^T AR$; Δείξτε οτι είναι συμμετρικός.

β′. Δείξτε οτι ο $R^T R$ δεν έχει αρνητικές τιμές στη διαγώνιο.

Κεφάλαιο 2

Πίνακες και Διανυσματικοί Υπόχωροι

Θέλουμε να εξετάσουμε υποσύνολα των διανυσματικών χώρων $\mathbb{R}^n$ στα οποία ορίζονται οι πράξεις των διανυσμάτων. Θεωρούμε πρώτα μία ευθεία στο $\mathbb{R}^2$, $\varepsilon = \{(x,\, y) \,|\, -3x+2y = 6\}$. Εάν προσθέσουμε δύο διανύσματα του συνόλου ε, το άθροισμα δεν ανήκει στο ε. Εάν πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα του ε με έναν αριθμό, το γινόμενο δεν ανήκει στο ε:

$$(-2,\, 0) \in \varepsilon,\, (0,\, 3) \in \varepsilon \quad \text{αλλά} \quad (-2,\, 0) + (0,\, 3) \notin \varepsilon,\, 2(-2,\, 0) \notin \varepsilon\,.$$

Αντιθέτως, για την ευθεία $\delta = \{(x,\, y) \,|\, -3x + 2y = 0\}$, εάν $(x_1,\, y_1) \in \delta$, $(x_2,\, y_2) \in \delta$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$(x_1,\, y_1) + (x_2,\, y_2) = (x_1 + x_2,\, y_1 + y_2) \in \delta \quad \text{και} \quad \lambda(x_1,\, y_1) = (\lambda x_1,\, \lambda y_1) \in \delta\,.$$

Ανάλογα στο $\mathbb{R}^3$, το επίπεδο $\Pi = \{(u,\, v,\, w) \,|\, 2u + v + w = 0\}$ έχει την ιδιότητα οτι εάν $a,\, b \in \Pi$ τότε $a + b \in \Pi$ και $\lambda b \in \Pi$, ενώ το επίπεδο $\Lambda = \{(u,\, v,\, w) \,|\, 2u + v + w = 5\}$ δεν έχει αυτήν την ιδιότητα.

Ορισμός. Ενα υποσύνολο V του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται **διανυσματικός υπόχωρος (ή γραμμικός υπόχωρος)** του $\mathbb{R}^n$ εάν

1. V δεν είναι κενό, $V \neq \varnothing$.

2. V είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση: εάν $a,\, b \in V$ τότε $a + b \in V$.

3. V είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό με αριθμό: εάν $a \in V$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\lambda a \in V$.

Τα 2 και 3 μαζί, σημαίνουν οτι οι γραμμικοί συνδυασμοί των στοιχείων του V παραμένουν μέσα στο V.

Παράδειγμα 2.1 Παρατηρούμε οτι εάν V είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, τότε το μηδενικό διάνυσμα $0 = (0,\, \ldots,\, 0) \in \mathbb{R}^n$ ανήκει στο V. Πράγματι, αφού V δεν είναι κενό, υπάρχει κάποιο $a \in V$ και $0 = a + (-1)a \in V$.

Το σύνολο $\{(0,\, \ldots,\, 0) \in \mathbb{R}^n\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Στο $\mathbb{R}^3$, διανυσματικοί υπόχωροι είναι: όλος ο χώρος $\mathbb{R}^3$, κάθε επίπεδο που περιέχει το $0 \in \mathbb{R}^3$, κάθε ευθεία που περιέχει το $0 \in \mathbb{R}^3$, το μονοσύνολο $\{0 \in \mathbb{R}^3\}$.

Θα μελετήσουμε ορισμένους διανυσματικούς υπόχωρους του $\mathbb{R}^m$ και του $\mathbb{R}^n$ που συνδέονται με ένα σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους, ή με ένα $m \times n$ πίνακα.

Παράδειγμα 2.2 Θεωρούμε το σύστημα $Ax = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Πότε έχει το σύστημα λύση; Εάν υπάρχει λύση, έστω $(u_0,\, v_0)$, τότε το διάνυσμα $(b_1,\, b_2,\, b_3)$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = u_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + v_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Αντίστροφα, εάν το διάνυσμα μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A, τότε οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού αποτελούν μια λύση του συστήματος. Συνεπώς το σύστημα έχει λύση εάν και μόνον εάν το διάνυσμα b μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A. Το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των στηλών του A είναι το σύνολο $V = \{\lambda_1(1,\, 5,\, 2) + \lambda_2(0,\, 4,\, 4) \,|\, \lambda_1,\, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$. Το σύνολο V δεν είναι κενό, εφόσον $(1,\, 5,\, 2) \in V$, και είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με αριθμό:

$$\left(\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}\right) + \left(\mu_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = (\lambda_1 + \mu_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + (\lambda_2 + \mu_2) \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

και

$$\mu \left(\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \mu\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \mu\lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ορισμός. Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των στηλών του $m \times n$ πίνακα A είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, ο οποίος ονομάζεται **χώρος στηλών** του A, και συμβολίζεται $\mathcal{R}(A)$.

Πρέπει να δείξουμε οτι πράγματι $\mathcal{R}(A)$ είναι γραμμικός υπόχωρος. Η απόδειξη είναι απλή γενίκευση του προηγούμενου παραδείγματος και την αφήνουμε ως άσκηση.

Παρατηρούμε οτι $b \in \mathcal{R}(A)$ εάν και μόνον εάν το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση. Πράγματι οι συνιστώσες του διανύσματος x είναι ακριβώς οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού των στηλών του A που δίδει το b.

Ο μικρότερος δυνατός χώρος στηλών είναι ο μηδενικός υπόχωρος, που αποτελείται μόνο από το μηδενικό διάνυσμα στο $\mathbb{R}^m$: αυτός είναι ο χώρος στηλών του μηδενικού πίνακα $A = 0$. Στο άλλο άκρο, ο χώρος στηλών του ταυτοτικού $m \times m$ πίνακα είναι όλος ο χώρος $\mathbb{R}^m$: κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών $e_1, e_2, \ldots, e_m$ του I:

$$(b_1,\, b_2, \ldots, b_m) = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \cdots + b_m e_m\,.$$

Το ίδιο ισχύει για κάθε μη ιδιόμορφο $m \times m$ πίνακα A. Ο χώρος στηλών του A περιέχει όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^m$: η εξίσωση $Ax = b$ έχει λύση για κάθε διάνυσμα $b \in R^m$.

Παράδειγμα 2.3 Εξετάζουμε την εξίσωση $Ax = 0$. Προφανώς $x = 0$ είναι μια λύση. Εάν x_1 και x_2 είναι δύο λύσεις της εξίσωσης, τότε

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0 \quad \text{και } A(\lambda x_1) = \lambda A x_1 = 0\,.$$

Αρα το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $Ax = 0$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός. Εάν A είναι $m \times n$ πίνακας, το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $Ax = 0$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, ο οποίος ονομάζεται **μηδενόχωρος** του A, και συμβολίζεται $\mathcal{N}(A)$.

Στην εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

η μόνη λύση είναι $(u, v) = (0, 0)$. Αρα $\mathcal{N}(A) = \{0 \in \mathbb{R}^2\}$.

Στον πίνακα $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, η τρίτη στήλη είναι το άθροισμα των άλλων δύο. Αρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, ο γραμμικός συνδυασμός

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Δηλαδή κάθε πολλαπλάσιο του $(1, 1, -1)$ είναι λύση του $Bx = 0$, και

$$\mathcal{N}(B) = \{\lambda(1, 1, -1) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

.

Άσκηση 2.1 Ελέγξτε εάν τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις αποτελούν διανυσματικούς υπόχωρους ή όχι.

α'. $3x + y = 0$ β'. $3(x + 2) = 5y$
γ'. $3(x + 2) - 5y = 6$ δ'. $x^2 + y^2 = 0$

Άσκηση 2.2 Εάν προσθέσουμε μία επιπλέον στήλη b στον πίνακα A, τότε ο χώρος στηλών γίνεται μεγαλύτερος, εκτός εάν .... Δώστε ένα παράδειγμα στο οποίο ο χώρος στηλών μεγαλώνει και ένα στο οποίο παραμένει ο ίδιος. Γιατί η εξίσωση $Ax = b$ έχει λύση ακριβώς όταν ο χώρος στηλών δεν μεγαλώνει όταν συμπεριλάβουμε το διάνυσμα b;

Άσκηση 2.3 Οι στήλες του AB είναι γραμμικοί συνδυασμοί των στηλών του A. Αυτό σημαίνει οτι ο χώρος στηλών του AB περιέχεται στον (ή είναι ίσος με τον) χώρο στηλών του A. Δώστε ένα παράδειγμα όπου οι χώροι στηλών του A και του AB δεν είναι ίσοι.

Άσκηση 2.4 Είναι τα ακόλουθα αληθή ή ψευδή; Δώστε αντιπαράδειγμα εάν είναι ψευδή και αιτιολόγηση εάν είναι αληθή.

α'. Τα διανύσματα b που δεν περιέχονται στο χώρο στηλών $\mathcal{R}(A)$ αποτελούν γραμμικό υπόχωρο.

β'. Εάν $\mathcal{R}(A)$ περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα, τότε A είναι ο μηδενικός πίνακας.

γ'. Ο χώρος στηλών του πίνακα $2A$ είναι ίσος με το χώρο στηλών του A.

δ′. Ο χώρος στηλών του $A - I$ είναι ίσος με το χώρο στηλών του A.

Άσκηση 2.5 Για ποιά διανύσματα (b_1, b_2, b_3) έχουν τα ακόλουθα συστήματα λύση;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.6 Κατασκευάστε έναν 3×3 πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών περιέχει τα διανύσματα $(1, 1, 0)$ και $(1, 0, 1)$, αλλά δεν περιέχει το $(1, 1, 1)$. Κατασκευάστε έναν 3×3 πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών είναι μία ευθεία.

Άσκηση 2.7 Εάν A είναι πίνακας 9×12 και το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση για κάθε b, τότε $\mathcal{R}(A) = \dots$.

Άσκηση 2.8 Βρείτε το χώρο στηλών και το μηδενόχωρο του πίνακα $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 2.9 Δείξτε οτι εάν A είναι αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας, τότε $\mathcal{N}(A) = \{0 \in \mathbb{R}^n\}$.

Απαλοιφή σε σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους

Η περίπτωση συστημάτων m εξισώσεων με n αγνώστους για $m \neq n$, λύνεται πάλι με απαλοιφή, εμφανίζονται όμως περισσότερες δυνατότητες. Στην αρχή εξετάζουμε, με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, τη διαδικασία της απαλοιφής σε ένα 3×4 πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Στην πρώτη γραμμή έχουμε μη μηδενικό στοιχείο στην πρώτη στήλη, το οποίο χρησιμοποιούμε ως οδηγό. Αφαιρούμε δύο φορές την πρώτη γραμμή από τη δεύτερη, και προσθέτουμε την πρώτη γραμμή στην τρίτη:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Στη δεύτερη στήλη δεν υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο κάτω από την πρώτη γραμμή, άρα δεν μπορούμε να βρούμε οδηγό με εναλλαγή γραμμών. Συνεχίζουμε στην τρίτη στήλη, όπου υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο στη δεύτερη γραμμή, ο δεύτερος οδηγός. Αφαιρούμε δύο φορές τη δεύτερη γραμμή από την τρίτη:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Στην τέταρτη στήλη δεν υπάρχει οδηγός. Στη γενική περίπτωση μπορεί να χρειάζεται να κάνουμε εναλλαγή γραμμών για να φέρουμε ένα μη μηδενικό στοιχείο στη θέση του οδηγού. Καταλήγουμε σε ένα πίνακα στην ακόλουθη μορφή, η οποία ονομάζεται κλιμακωτή.

- Οι γραμμές με μή μηδενικά στοιχεία (εάν υπάρχουν) εμφανίζονται πάνω από τις γραμμές που έχουν μόνο μηδενικά στοιχεία (εάν υπάρχουν).
- Το πρώτο μή μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής (εάν υπάρχει) ονομάζεται **οδηγός**. Ο οδηγός κάθε μη μηδενικής γραμμής βρίσκεται στα δεξιά του οδηγού της προηγούμενης γραμμής.

Συμπεραίνουμε οτι στα αριστερά και κάτω από κάθε οδηγό υπάρχουν μόνο μηδενικά. Εάν καταγράψουμε τα αντίστροφα των βημάτων της απαλοιφής, παίρνουμε ένα κάτω τριγωνικό $m \times m$ πίνακα. Στο παράδειγμα έχουμε, για τον αντίστροφο του πρώτου βήματος της απαλοιφής

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ενώ για το αντίστροφο του δεύτερου βήματος

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αρα $A = E^{-1}F^{-1}U = LU$, όπου

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αυτή η περιγραφή περιλαμβάνει και την περίπτωση τετραγωνικού πίνακα, καθώς η άνω τριγωνική μορφή που παίρνουμε από την απαλοιφή ενός τετραγωνικού πίνακα είναι ειδική περίπτωση της κλιμακωτής μορφής. Συνεπώς το επόμενο Θεώρημα, του οποίου θα δώσουμε πιό προσεκτική απόδειξη, περιλαμβάνει και τα προηγούμενα αποτελέσματα.

Θεώρημα 2.1 *Σε κάθε $m \times n$ πίνακα A αντιστοιχεί*

1. *ένας $m \times m$ πίνακας μεταθέσεων P,*
2. *ένας $m \times m$ κάτω τριγωνικός πίνακας L, με 1 στη διαγώνιο, και*
3. *ένας $m \times n$ πίνακας σε κλιμακωτή μορφή U*

τέτοιοι ώστε

$$PA = LU\,.$$

Πριν δώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος πρέπει να ορίσουμε με κατάλληλο τρόπο ένα γενικό πίνακα σε κλιμακωτή μορφή. Δίνουμε πρώτα έναν ορισμό όπου επικεντρώνουμε την προσοχή μας στις γραμμές του πίνακα. Στον ακόλουθο ορισμό δίνουμε σε παρένθεση τη διαισθητική ερμηνεία των αριθμών r και j_i.

Ορισμός. Ενας $m \times n$ πίνακας $U = [a_{ij}]$ είναι σε **κλιμακωτή μορφή** εάν υπάρχει ένας ακέραιος r (ο αριθμός των μη μηδενικών γραμμών του πίνακα), με $0 \le r \le m$, και για κάθε $i = 1, \ldots, r$ υπάρχουν ακέραιοι $j_i \le n$ (η θέση του πρώτου μη μηδενικού στοιχείου της γραμμής i) τέτοιοι ώστε

1. $a_{ij_i} \neq 0$, και ονομάζεται **οδηγός** στη γραμμή i και στη στήλη j_i.

2. $j_1 \geq 1$, και για κάθε $i = 1, \ldots, r-1$, $j_{i+1} > j_i$. (Κάθε οδηγός βρίσκεται στα δεξιά του προηγούμενου).

3. Για κάθε $i = 1, \ldots, r$, $a_{ik} = 0$ για $k < j_i$. (Ο οδηγός είναι το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της γραμμής).

4. Για $i > r$, $a_{ik} = 0$ για κάθε k. (Υπάρχουν μόνον r μη μηδενικές γραμμές).

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1j_1} & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2j_2} & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{rj_r} & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Η διαδικασία της απαλοιφής προχωρά στήλη–στήλη, άρα χρειαζόμαστε μια περιγραφή της κλιμακωτής μορφής κατά στήλες. Εξετάστε προσεκτικά τις δύο περιγραφές και βεβαιωθείτε οτι σε κάθε περίπτωση περιγράφουν την ίδια μορφή.

Εάν $U = [a_{ij}]$ είναι $m \times n$ πίνακας σε κλιμακωτή μορφή, τότε υπάρχει $r \leq m$ και για κάθε $j = 1, \ldots, n$ υπάρχουν ακέραιοι i_j (η θέση του τελευταίου μη μηδενικού στοιχείου της στήλης j) με $i_j \leq r$, τέτοιοι ώστε

1. $0 \leq i_1 \leq 1$ και για κάθε $j = 1, \ldots, n-1$, $i_j \leq i_{j+1} \leq i_j + 1$.

2. $a_{ij} = 0$ για $i > i_j$, και εάν $i_j > i_{j-1}$ τότε $a_{i_j j} \neq 0$.

Ο αριθμός i_j μετράει πόσοι οδηγοί υπάρχουν στις στήλες από 1 έως j.

Απόδειξη. Πρώτα περιγράφουμε αναδρομικά τη διαδικασία της απαλοιφής, χρησιμοποιώντας τους αριθμούς i_j. Θέτουμε $i_0 = 0$, $U_0 = A$ και υποθέτουμε οτι για k με $n > k \geq 0$ έχουμε πίνακα U_k (τον πίνακα που προκύπτει από τον A μετά την απαλοιφή στις k πρώτες στήλες) και ακεραίους $i_0, \ldots, i_k$ οι οποίοι ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες. Θεωρούμε τη στήλη $k+1$ του πίνακα U_k και κατασκευάζουμε τον πίνακα U_{k+1} και τον ακέραιο i_{k+1} με τον ακόλουθο τρόπο.

- Εάν $a_{i(k+1)} = 0$ για κάθε i με $m \geq i > i_k$, τότε δεν χρειάζεται να αλλάξουμε τη στήλη $k+1$ για να πάρουμε τον πίνακα U_{k+1}. Θέτουμε $i_{k+1} = i_k$ και $U_{k+1} = U_k$.

- Διαφορετικά, βρίσκουμε το μικρότερο i για το οποίο $i > i_k$ και $a_{i(k+1)} \neq 0$. Για αυτό το i, εναλλάσσουμε τις γραμμές $i_k + 1$ και i του πίνακα U_k, δηλαδή πολλαπλασιάζουμε τον U_k από τα αριστερά με τον πίνακα $P_{(i_k+1)i}$. Με αυτή την εναλλαγή φέρνουμε ένα μη μηδενικό στοιχείο στη θέση του οδηγού στη στήλη $k+1$. Αριθμούμε ξανά τις γραμμές του νέου πίνακα, και συμβολίζουμε τα στοιχεία του με a_{ij}. Για κάθε ℓ με $m \geq \ell > i_k + 1$, πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά με το στοιχειώδη πίνακα που αφαιρεί $\frac{a_{\ell(k+1)}}{a_{(i_k+1)(k+1)}}$ φορές τη γραμμή $i_k + 1$ από τη γραμμή ℓ. Με αυτόν τον τρόπο μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία της στήλης $k+1$ που βρίσκονται κάτω από τον οδηγό $a_{(i_k+1)(k+1)}$. Τέλος θέτουμε $i_{k+1} = i_k + 1$ και U_{k+1} ίσο με το τελικό γινόμενο.

Οταν εξαντλήσουμε όλες τις στήλες, καταλήγουμε με τον πίνακα $U = U_n$, ο οποίος είναι σε κλιμακωτή μορφή.

Εάν συμβολίσουμε $P_1, \ldots, P_r$ τους πίνακες εναλλαγής που χρησιμοποιούμε στα r μη τετριμμένα βήματα της διαδικασίας απαλοιφής, και $L_1, \ldots, L_r$ τους αντίστοιχους κάτω τριγωνικούς πίνακες, έχουμε

$$U = L_r P_r L_{r-1} P_{r-1} \cdots L_1 P_1 A\,.$$

Για να καταλήξουμε στη παραγοντοποίηση $LU = PA$, όπου L είναι κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο και P είναι πίνακας μεταθέσεως, πρέπει να *περάσουμε όλους τους κάτω τριγωνικούς πίνακες L_i στα αριστερά των πινάκων εναλλαγής P_i*. Γνωρίζουμε οτι, εν γένει,

$$L_r P_r L_{r-1} P_{r-1} \cdots L_1 P_1 \neq L_r L_{r-1} \cdots L_1 P_r P_{r-1} \ldots P_1\,.$$

Όμως θα δείξουμε οτι υπάρχει κάτω τριγωνικός πίνακας K, με 1 στη διαγώνιο, τέτοιος ώστε

$$L_r P_r L_{r-1} P_{r-1} \cdots L_1 P_1 = K\, P_r \cdots P_1\,.$$

Θέτουμε $K_r = L_r$, και για κάθε $i = 1, \ldots, r-1$ ορίζουμε τον πίνακα K_i από τη σχέση

$$(P_r P_{r-1} \cdots P_{i+1}) L_i = K_i (P_r P_{r-1} \cdots P_{i+1})\,. \tag{2.2}$$

Στον ακόλουθο υπολογισμό, έχουμε υπογραμμίσει τους όρους που έχουμε αντικαταστήσει σε κάθε βήμα, χρησιμοποιώντας την 2.2.

$$\begin{aligned}
L_r P_r L_{r-1} P_{r-1} \cdots L_1 P_1 &= \underline{K_r} P_r L_{r-1} P_{r-1} \cdots L_1 P_1 \\
&= K_r \underline{K_{r-1} P_r} P_{r-1} \cdots L_1 P_1 \\
&= \ldots \\
&= K_r K_{r-1} \cdots K_3 \underline{K_2 P_r P_{r-1} \cdots P_3} P_2 L_1 P_1 \\
&= K_r K_{r-1} \cdots K_2 \underline{K_1 P_r P_{r-1} \cdots P_2} P_1\,.
\end{aligned}$$

Απομένει να δείξουμε οτι $K = K_r \cdots K_1$ είναι επίσης κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο. Παρατηρούμε οτι ο L_i αφαιρεί πολλαπλάσια της i γραμμής από τις πιο κάτω γραμμές, δηλαδή είναι της μορφής

$$L_i = \begin{bmatrix} I_i & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ B & \vdots & I_{m-i} \end{bmatrix}$$

ενώ $P_r \cdots P_{i+1}$ είναι μια μετάθεση R των γραμμών $i+1, \ldots, m$, άρα

$$P_r \cdots P_{i+1} = \begin{bmatrix} I_i & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & R \end{bmatrix}$$

και

$$(P_r \cdots P_{i+1})^{-1} = P_{i+1} \cdots P_r = \begin{bmatrix} I_i & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & R^{-1} \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζουμε το γινόμενο $K_i = (P_r \cdots P_{i+1})L_i(P_r \cdots P_{i+1})^{-1}$ πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες σε μπλοκ, και έχουμε

$$\begin{aligned} K_i &= \begin{bmatrix} I_i & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_i & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ B & \vdots & I_{m-i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_i & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & R^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_i & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ RB & \vdots & I_{m-i} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ο οποίος είναι κάτω τριγωνικός πίνακας, με 1 στη διαγώνιο. Συμπεραίνουμε οτι ο πίνακας $K = K_r \cdots K_1$ είναι επίσης κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο.

□

Άσκηση 2.10 Δείξτε οτι εάν A και B είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε ο πίνακας

$$C = \begin{bmatrix} A & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & B^{-1} \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 2.11 Δίδονται οι πίνακες

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε τα γινόμενα $P_1LP_1^{-1}$ και $P_2LP_2^{-1}$. Είναι αυτά τα γινόμενα κάτω τριγωνικοί πίνακες; Εξηγήστε τα αποτελέσματά σας.

Άσκηση 2.12 Βρείτε τον κλιμακωτό πίνακα U, και τους πίνακες P και L έτσι ώστε $PA = LU$, για τους ακόλουθους πίνακες:

α′.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

β′.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

γ′.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

δ′.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ε′.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Οι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης

Για να βρούμε τις λύσεις του συστήματος m εξισώσεων με n αγνώστους, εξετάζουμε πρώτα την **ομογενή** περίπτωση: όταν στη δεξιά πλευρά έχουμε το μηδενικό διάνυσμα.

$$Ax = 0\,.$$

Από το Θεώρημα έχουμε $A = (P^{-1}L)U$, και εφόσον $P^{-1}L$ είναι αντιστρέψιμος, $Ax = 0$ εάν και μόνον εάν $Ux = (P^{-1}L)^{-1}0$, δηλαδή εάν και μόνον εάν

$$Ux = 0\,.$$

Αυτό το σύστημα έχει πάντα μία τουλάχιστον λύση, την $x = 0$. Μας ενδιαφέρει να δούμε εάν έχει και άλλες λύσεις.

Στο παράδειγμα 2.1, είχαμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ v \\ \mathbf{w} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε σημειώσει με παχειά γράμματα τους οδηγούς και τις μεταβλητές u και w που αντιστοιχούν σε στήλες με οδηγούς. Λύνουμε με ανάδρομη αντικατάσταση:

- από τη δεύτερη γραμμή $3w + y = 0$, και συνεπώς $w = -\frac{1}{3}y$.
- αντικαθιστώντας το w στην πρώτη γραμμή έχουμε $u + 3v - y + 2y = 0$, και συνεπώς $u = -3v - y$.

Δηλαδή μπορούμε να δώσουμε οποιαδήποτε τιμή στις μεταβλητές v και y, οι οποίες αντιστοιχούν σε στήλες που δεν έχουν οδηγούς, και να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες τιμές των μεταβλητών u και w. Η γενική λύση είναι

$$(-3v - y,\, v,\, -\tfrac{1}{3}y,\, y)\,.$$

Είναι χρήσιμο, άν και κάπως αυθαίρετο, να διακρίνουμε τις μεταβλητές σε αυτές που αντιστοιχούν σε στήλες με οδηγούς, τις οποίες ονομάζουμε **βασικές μεταβλητές**, και στις υπόλοιπες, που αντιστοιχούν σε στήλες χωρίς οδηγούς, τις οποίες ονομάζουμε **ελεύθερες μεταβλητές**. Στο παράδειγμά μας οι ελεύθερες μεταβλητές είναι οι v και y, και η λύση μπορεί να γραφεί

$$x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε οτι κάθε διάνυσμα που γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $(-3,\,1,\,0,\,0)$ και $(-1,\,0,\,-\frac{1}{3},\,1)$ ανήκει στο μηδενόχωρο του πίνακα A.

Θα δείξουμε οτι γενικότερα, για έναν $m \times n$ πίνακα, υπάρχει ένα σύνολο διανυσμάτων με πλήθος ίσο με το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών, τέτοιο ώστε κάθε διάνυσμα του μηδενόχωρου γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός αυτών των διανυσμάτων. Για να βρούμε ένα τέτοιο σύνολο διανυσμάτων, μπορούμε να εφαρμόσουμε την ακόλουθη διαδικασία.

Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει από τις μη μηδενικές γραμμές του κλιμακωτού πίνακα U. Δίνουμε την τιμή 1 σε μία από τις ελεύθερες μεταβλητές, την τιμή 0 στις υπόλοιπες ελεύθερες μεταβλητές, και λύνουμε το σύστημα για να προσδιορίσουμε τις αντίστοιχες τιμές των βασικών μεταβλητών. Με αυτόν τον τρόπο για κάθε ελεύθερη μεταβλητή έχουμε ένα διάνυσμα που ικανοποιεί την εξίσωση $Ux = 0$, συνεπώς και την εξίσωση $Ax = 0$.

Θα δείξουμε οτι κάθε διάνυσμα του μηδενόχωρου εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός αυτών των διανυσμάτων. Συμβολίζουμε τις μεταβλητές του συστήματος $x_1, \ldots, x_n$ και υποθέτουμε οτι υπάρχουν k ελεύθερες μεταβλητές, οι $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$.

Συμβολίζουμε $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ τα διανύσματα που προκύπτουν με τον πιο πάνω τρόπο. Στο παράδειγμά μας ελεύθερες μεταβλητές είναι οι $x_2 = v$ και $x_4 = y$, και τα αντίστοιχα διανύσματα είναι τα

$$a_2 = (-3,\,1,\,0,\,0)\,, \quad a_4 = (-1,\,0,\,-\tfrac{1}{3},\,1)\,.$$

Θεωρούμε τώρα ένα οποιοδήποτε διάνυσμα του μηδενόχωρου, $c = (c_1,\,\ldots,\,c_n) \in \mathcal{N}(A)$. Έχουμε $Uc = Ac = 0$. Θα δείξουμε οτι το c γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$, με συντελεστές τις συνιστώσες $c_{i_1}, \ldots, c_{i_k}$ του c,

$$c = c_{i_1}a_{i_1} + c_{i_2}a_{i_2} + \cdots + c_{i_k}a_{i_k}\,.$$

Το διάνυσμα $a = c - (c_{i_1}a_{i_1} + \cdots + c_{i_k}a_{i_k})$ είναι ένα διάνυσμα που ικανοποιεί την εξίσωση $Ux = 0$, αφού $Uc = 0$ και $Ua_{i_j} = 0$. Επί πλέον, σε κάθε ελεύθερη μεταβλητή η συνιστώσα του a είναι 0. Τότε όμως οι μη μηδενικές γραμμές του U προσδιορίζουν με μοναδικό τρόπο τις τιμές του a στις βασικές μεταβλητές: αυτές είναι επίσης 0. Άρα

$$c - (c_{i_1}a_{i_1} + \cdots + c_{i_k}a_{i_k}) = 0\,.$$

Άσκηση 2.13 Βρείτε την παραγοντοποίηση LU σε κάτω τριγωνικό πίνακα και πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, για τον

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Προσδιορίστε τις βασικές και τις ελεύθερες μεταβλητές του συστήματος $Ax = 0$. Βρείτε τη γενική λύση του ομογενούς συστήματος.

Άσκηση 2.14 Για τους πίνακες A της Άσκησης 2.12, βρείτε τις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης $Ax = 0$.

Οι λύσεις της μη ομογενούς εξίσωσης

Τώρα εξετάζουμε τη μη ομογενή περίπτωση:

$$Ax = b \quad , \quad b \neq 0\,.$$

Το σύστημα έχει λύσεις εάν και μόνον εάν το b ανήκει στο χώρο στηλών του A. Εάν $b \notin \mathcal{R}(A)$, τότε το σύστημα δεν έχει λύση, και λέμε οτι οι εξισώσεις είναι **ασύμβατες**. Εάν $b \in \mathcal{R}(A)$, τότε η απαλοιφή και η ανάδρομη αντικατάσταση δίδει τις λύσεις.

Ας εξετάσουμε το παράδειγμα 2.1. Εφαρμόζοντας την απαλοιφή και στη δεξιά πλευρά της

$$Ax = b \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

παίρνουμε την εξίσωση

$$Ux = c \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - 2b_2 + 5b_1 \end{bmatrix}.$$

Βλέπουμε οτι εάν $b_3 - 2b_2 + 5b_1 \neq 0$ δεν είναι δυνατό να ικανοποιηθεί η τρίτη εξίσωση και το σύστημα είναι ασύμβατο. Στο παράδειγμα, ο χώρος στηλών είναι ακριβώς το επίπεδο των διανυσμάτων (b_1, b_2, b_3) που ικανοποιούν $5b_1 - 2b_2 + b_3 = 0$.

Θεωρούμε το διάνυσμα $b = (1, 5, 5)$. Αυτό ανήκει στο χώρο στηλών και το σύστημα δεν είναι ασύμβατο. Η απαλοιφή το μετατρέπει σε

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Τώρα μπορούμε εύκολα να βρούμε τις λύσεις. Η τρίτη εξίσωση γίνεται $0x = 0$. Στις ελεύθερες μεταβλητές v και y μπορούμε να δώσουμε οποιαδήποτε τιμή. Οι τιμές των βασικών μεταβλητών προσδιορίζονται με ανάδρομη αντικατάσταση στις άλλες δύο εξισώσεις

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} & & & & 3w & + & y & = & 3 & \text{ή} & w & = & 1 & - & \frac{y}{3} & & \\ u & + & 3v & + & 3w & + & 2y & = & 1 & \text{ή} & u & = & -2 & - & y & - & 3v\,. \end{array}$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να βρούμε τη **γενική λύση** ως άθροισμα μίας ειδικής λύσης, και της γενικής λύσης του ομογενούς συστήματος $Ax = 0$. Πράγματι, εάν x_1 και x_2 είναι δύο διαφορετικές λύσεις της $Ax = b$, τότε $A(x_1 - x_2) = 0$.

Για να βρούμε μια ειδική λύση, μπορούμε να δώσουμε σε όλες τις ελεύθερες μεταβλητές την τιμή 0. Στο παράδειγμα, μία ειδική λύση είναι η $x = (-2, 0, 1, 0)$, και η γενική λύση είναι

$$x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Θεώρημα 2.2 *Η εξίσωση $Ax = b$ έχει λύσεις εάν και μόνον εάν b ανήκει στο χώρο στηλών του A. Εάν x_1 είναι μία λύση, τότε η γενική λύση $x_{\gamma\varepsilon\nu\iota\kappa\acute{\eta}}$ είναι της μορφής*

$$x_{\gamma\varepsilon\nu\iota\kappa\acute{\eta}} = x_1 + x_0\,,$$

όπου x_0 είναι οποιαδήποτε λύση της ομογενούς εξίσωσης $Ax = 0$.

Παρατηρούμε οτι το σύνολο των λύσεων στην περίπτωση $b \neq 0$ δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος: είναι ο μηδενόχωρος του A 'μετατοπισμένος' κατά την ειδική λύση.

Ονομάζουμε **τάξη του πίνακα** A τον αριθμό r των οδηγών που εμφανίζονται στην απαλοιφή. Εάν υπάρχουν r οδηγοί, τότε υπάρχουν r βασικές μεταβλητές και $n-r$ ελεύθερες μεταβλητές. Είναι προφανές οτι ο αριθμός των οδηγών είναι ίσος με τον αριθμό των μη μηδενικών γραμμών στον κλιμακωτό πίνακα U.

Εάν $r = n$, τότε δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές, συνεπώς ο μηδενόχωρος του A είναι $\{0 \in \mathbb{R}^n\}$, και εάν υπάρχει κάποια λύση, αυτή είναι μοναδική.

Εάν $r = m$, τότε δεν είναι δύσκολο να δούμε οτι όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ ανήκουν στο χώρο στηλών του A, και συνεπώς η εξίσωση $Ax = b$ έχει λύση για κάθε b.

Εάν $r = m = n$, τότε έχουμε τετραγωνικό μη ιδιόμορφο πίνακα: η εξίσωση έχει πάντα μία και μοναδική λύση.

Άσκηση 2.15 Για τους πίνακες A της Άσκησης 2.12, βρείτε την τάξη του πίνακα, και τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι συνιστώσες b_i του διανύσματος b, ώστε να έχει λύση η εξίσωση $Ax = b$. Σε κάθε περίπτωση, επιλέξτε ένα διάνυσμα b που ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες, και βρείτε όλες τις λύσεις του συστήματος.

Άσκηση 2.16 Εάν A είναι 2×3 και C είναι 3×2 πίνακες, δείξτε οτι CA δεν μπορεί να είναι ο ταυτοτικός πίνακας (εξετάστε την τάξη του CA). Βρείτε ένα παράδειγμα στο οποίο $AC = I$.

Άσκηση 2.17 Θεωρήστε τον κλιμακωτό πίνακα

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Μπορούμε να συνεχίσουμε την απαλοιφή προς τα πάνω, ώστε να μηδενίσουμε τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από τους οδηγούς, και στη συνέχεια να διαιρέσουμε κάθε μη μηδενική γραμμή με τον αντίστοιχο οδηγό, ώστε να έχουμε 1 στη θέση των οδηγών. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα καταλήγουμε στον πίνακα

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Αυτός ο πίνακας έχει *ανηγμένη κλιμακωτή μορφή*, και είναι ο απλούστερος πίνακας που προκύπτει με απαλοιφή από τον A.

Βρείτε τους πίνακες R σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή που αντιστοιχούν στους πίνακες

α΄.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

β΄.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

γ΄.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 12 \\ 3 & 6 & 7 & 13 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.18 Δείξτε οτι κάθε $m \times n$ πίνακας τάξεως r γράφεται ως γινόμενο ενός $m \times r$ και ενός $r \times n$ πίνακα:

$$A = (\text{στήλες του A που περιέχουν οδηγούς})\ (\text{ μη μηδενικές γραμμές του } R).$$

Άσκηση 2.19 Εφαρμόστε απαλοιφή στον επαυξημένο πίνακα $[A \vdots b]$ για να βρείτε τον κλιμακωτό πίνακα U και τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι συνιστώσες του b για να έχει λύση το σύστημα $Ax = b$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης $Ax = 0$, και τη γενική λύση της $Ax = b$ όταν $b = (4, 3, 5)$.

Άσκηση 2.20 Δείξτε οτι η εξίσωση $Ax = b$ έχει λύσεις εάν και μόνον εάν η τάξη του πίνακα A είναι ίση με την τάξη του επαυξημένου πίνακα $[A \vdots b]$.

Άσκηση 2.21 Ποιά διανύσματα (b_1, b_2, b_3) βρίσκονται στο χώρο στηλών του A; Ποιοί γραμμικοί συνδυασμοί των γραμμών του A δίδουν 0;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.22 Ποιές συνθήκες στα b_1, b_2, b_3, b_4 καθιστούν το σύστημα επιλύσιμο; Βρείτε όλες τις λύσεις.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.23 Ποιά συνθήκη στα b_1, b_2, b_3 καθιστά το σύστημα επιλύσιμο; Ξεκινήστε με τον επαυξημένο πίνακα $[A \vdots b]$, και βρείτε όλες τις λύσεις όταν ικανοποιείται η συνθήκη.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 2z & = & b_1 \\ 2x & + & 5y & - & 4z & = & b_2 \\ 4x & + & 9y & - & 8z & = & b_3 \end{array}$$

Άσκηση 2.24 Εάν η εξίσωση $Ax = b$ έχει δύο διαφορετικές λύσεις x_1 και x_2, βρείτε δύο διαφορετικές λύσεις της $Ax = 0$. Στη συνέχεια βρείτε άλλη μία λύση της $Ax = b$.

Άσκηση 2.25 Γράψτε όλες τις σχέσεις που μπορείτε να συμπεράνετε για τα r, m και n, εάν γνωρίζετε οτι ο $m \times n$ πίνακας A έχει τάξη r, και για την εξίσωση $Ax = b$

α'. υπάρχουν κάποια b για τα οποία δεν έχει λύση.

β'. για κάθε b έχει άπειρες λύσεις.

γ'. υπάρχει ακριβώς μία λύση για κάποια b, καμία λύση για κάποια άλλα b.

δ'. ακριβώς μία λύση για κάθε b.

Άσκηση 2.26 Επιλέξτε τον αριθμό q, αν είναι δυνατόν, έτσι ώστε η τάξη των πινάκων A και B να είναι α') 1, β') 2, γ') 3.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \\ 9 & 6 & q \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ q & 2 & q \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.27 Ο μηδενοχώρος ενός 3×4 πίνακα A είναι η ευθεία που περιέχει το $(2, 3, 1, 0)$.

α'. Βρείτε την τάξη του πίνακα A, και τη γενική λύση της $Ax = 0$;

β'. Βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή R του A.

Άσκηση 2.28 Είναι τα ακόλουθα αληθή ή ψευδή; Δώστε αντιπαράδειγμα εάν είναι ψευδή και αιτιολόγηση εάν είναι αληθή.

α'. Ένας τετραγωνικός πίνακας δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές.

β'. Ένας αντιστρέψιμος πίνακας δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές.

γ'. Ένας $m \times n$ πίνακας δεν έχει περισσότερες από n βασικές μεταβλητές.

δ'. Ένας $m \times n$ πίνακας δεν έχει περισσότερες από m βασικές μεταβλητές.

Άσκηση 2.29 Βρείτε τον πίνακα A εάν γνωρίζετε οτι η γενική λύση του συστήματος $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 2.30 Βρείτε έναν 2×2 πίνακα του οποίου ο μηδενοχώρος είναι ίσος με το χώρο στηλών.

Άσκηση 2.31 Βρείτε έναν πίνακα του οποίου ο μηδενοχώρος αποτελείται από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων $(2, 2, 1, 0)$ και $(3, 1, 0, 1)$.

Άσκηση 2.32 Βρείτε έναν πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών περιέχει το $(1, 1, 1)$ και ο μηδενοχώρος αποτελείται από τα πολλαπλάσια του $(1, 1, 1, 1)$.

Άσκηση 2.33 Βρείτε έναν πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών περιέχει τα $(1, 1, 0)$ και $(0, 1, 1)$ και ο μηδενοχώρος τα $(1, 0, 1)$ και $(0, 0, 1)$

Γραμμική Ανεξαρτησία

Όταν θέλαμε να βρούμε τις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης $Ax = 0$, για τον πίνακα 2.1, δώσαμε σε μία ελεύθερη μεταβλητή την τιμή 1, και στην άλλη την τιμή 0, για βρούμε μία λύση. Κατόπιν, δώσαμε στην πρώτη ελεύθερη μεταβλητή την τιμή 0 και στην άλλη την τιμή 1, για να βρούμε μία δεύτερη λύση. Δεν χρειάστηκε να υπολογίσουμε τις λύσεις για άλλους συνδυασμούς, για παράδειγμα να δώσουμε την τιμή 1 και στις δύο ελεύθερες μεταβλητές, γιατί όλες οι άλλες λύσεις προκύπτουν ως γραμμικοί συνδυασμοί αυτών των δύο. Μία τρίτη λύση δεν προσφέρει κάτι περισσότερο στο μηδενοχώρο του πίνακα A. Με αυτή την έννοια είναι περιττή.

Θεωρούμε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων,

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 5y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & 4y & + & 3z & = & 0 \end{array}$$

το οποίο μπορούμε να λύσουμε, και να βρούμε το σύνολο των λύσεων

$$U = \{(t, -t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Εάν τώρα θεωρήσουμε μόνο τις δύο πρώτες εξισώσεις, θα δούμε οτι και αυτό το σύστημα έχει ως σύνολο λύσεων το U. Η τρίτη εξίσωση είναι η διαφορά της δεύτερης από την πρώτη, και έτσι δεν βάζει κάποιον επί πλέον περιορισμό στο σύνολο λύσεων. Με αυτή την έννοια, η τρίτη εξίσωση είναι *περιττή*.

Αυτή η έννοια του περιττού για λύσεις που δεν μεγαλώνουν το χώρο των λύσεων, ή εξισώσεων οι οποίες δεν θέτουν περισσότερους περιορισμούς, αποτελεί μία βασική έννοια της Γραμμικής Άλγεβρας, την οποία ονομάζουμε *γραμμική εξάρτηση*. Μία συλλογή διανυσμάτων είναι γραμμικά εξαρτημένη όταν περιέχει περιττά διανύσματα. Ένα σύστημα εξισώσεων είναι γραμμικά εξαρτημένο όταν περιέχει περιττές εξισώσεις.

Η τάξη ενός πίνακα είναι ο αριθμός που μας δίδει το πραγματικό μέγεθος του πίνακα. Μετράει τον αριθμό των μη περιττών εξισώσεων, των μη μηδενικών γραμμών στον κλιμακωτό πίνακα. Επίσης μετράει τον αριθμό των στηλών με οδηγούς, αυτών που πραγματικά συνεισφέρουν στο χώρο στηλών. Για να καταλάβουμε καλύτερα τη σημασία της τάξης ενός πίνακα, χρειαζόμαστε την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας.

Ορισμός. Τα διανύσματα $u_1, \ldots, u_n$ του $\mathbb{R}^m$, για $n \geq 2$, είναι **γραμμικά εξαρτημένα** εάν ένα από αυτά μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός τω υπολοίπων.

Το σύνολο των γραμμών του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικά εξαρτημένο αφού η τρίτη γραμμή είναι ίση με το άθροισμα των δύο άλλων, $(1, 3, 3) = (1, -1, 2) + (0, 4, 1)$. Αυτό έχει ως συνέπεια οτι εάν το διάνυσμα (u, v, w) ικανοποιεί τις δύο πρώτες από τις εξισώσεις του συστήματος

$$\begin{array}{rcrcrcl} u & - & v & + & 2w & = & 0 \\ & & 4v & + & w & = & 0 \\ u & + & 3v & + & 3w & = & 0 \end{array},$$

τότε ικανοποιεί και την τρίτη.

Ενα σύνολο k διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το 0, είναι απαραιτήτως γραμμικά εξαρτημένο: εάν $v_1 = 0$ τότε $v_1 = 0v_2 + \cdots + 0v_k$.

Θα δώσουμε ένα πιο συμμετρικό ορισμό της έννοιας της γραμμικής εξάρτησης, όπου δεν διακρίνεται κάποιο από τα διανύσματα.

Ορισμός. Τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n$ του $\mathbb{R}^m$ είναι **γραμμικά εξαρτημένα** εάν υπάρχει γραμμικός συνδυασμός με συντελεστές $c_1, \ldots, c_n$, *οι οποίοι δεν είναι όλοι μηδέν*, τέτοιος ώστε

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_kv_k = 0\,.$$

Αυτό σημαίνει οτι εάν A είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n$ τότε το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ έχει λύσεις $x = (c_1, \ldots, c_n)$ διαφορετικές από το $0 \in \mathbb{R}^n$.

Τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_k$ του $\mathbb{R}^n$ είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** εάν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα, δηλαδή εάν ο μοναδικός γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_k$ που είναι ίσος με μηδέν, είναι ο τετριμμένος, με όλους τους συντελεστές ίσους με 0. Σε αυτή τη περίπτωση η μοναδική λύση του ομογενούς συστήματος $Ax = 0$ είναι η $x = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Συμπληρώνουμε τον ορισμό για $n = 1$, λέγοντας οτι το σύνολο $\{u\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο εάν $u = 0$, και γραμμικά ανεξάρτητο εάν $u \neq 0$.

Παράδειγμα 2.4 Δύο μη μηδενικά διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα όταν δεν είναι συγγραμμικά. Εάν $c_1v_1 + c_2v_2 = 0$, αλλά δεν υπάρχει c τέτοιο ώστε $v_1 = cv_2$ ή $v_2 = cv_1$, τότε $c_1 = c_2 = 0$.

Παράδειγμα 2.5 Τα διανύσματα $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (3, 6, -3)$, $v_3 = (3, 9, 3)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, γιατί το δεύτερο είναι πολλαπλάσιο του πρώτου. Ετσι $-3v_1 + v_2 + 0v_3 = 0$.

Παράδειγμα 2.6 Τα διανύσματα $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (3, 4, -3)$, $v_3 = (1, 4, -1)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, γιατί $4v_1 - v_2 - v_3 = 0$.

Συνεπώς, για να ελέγξουμε εάν τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, σχηματίζουμε τον $m \times n$ πίνακα με στήλες $v_1, \ldots, v_n$. Εάν υπάρχει ένα *μη μηδενικό διάνυσμα* $c = (c_1, \ldots, c_n)$ τέτοιο ώστε $Ac = 0$, τότε οι στήλες του πίνακα A είναι γραμμικά εξαρτημένες. Εάν η μοναδική λύση της $Ax = 0$ είναι η τετριμμένη, $x = 0 \in \mathbb{R}^n$, τότε οι στήλες του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Ειδικότερα, οι στήλες ενός τριγωνικού πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες εάν και μόνον εάν όλα τα στοιχεία στη διαγώνιο είναι διαφορετικά από το 0.

Πρόταση 2.3 *Σε ένα πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, οι μη μηδενικές γραμμές είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Το ίδιο ισχύει για τις στήλες που περιέχουν οδηγούς.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα $m \times n$ πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, με r μη μηδενικές γραμμές, και οδηγούς στις στήλες $j_1, j_2, \ldots, j_r$. Συμβολίζουμε U τον $r \times n$ πίνακα που αποτελείται από τις μη μηδενικές γραμμές, και $c = (c_1, \ldots, c_r)$ ένα διάνυσμα τέτοιο ώστε $c^TU = 0$. Θέλουμε να δείξουμε οτι $c = 0$.

Εξετάζουμε τη στήλη j_1. Το στοιχείο $a_{1j_1} \neq 0$, ενώ όλα τα υπόλοιπα είναι 0. Αρα $c_1a_{1j_1} = 0$ και συνεπώς $c_1 = 0$.

Υποθέτουμε τώρα οτι $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$, για $k < r$, και θα δείξουμε οτι $c_{k+1} = 0$.

Εξετάζουμε τη στήλη j_{k+1}. Το στοιχείο $a_{(k+1)j_{k+1}} \neq 0$, ενώ για $p > k+1$, $a_{pj_{k+1}} = 0$. Αρα $c_{k+1}a_{(k+1)j_{k+1}} = 0$ και συνεπώς $c_{k+1} = 0$.

Για να αποδείξουμε οτι οι στήλες που περιέχουν οδηγούς είναι γραμμικά ανεξάρτητες, εξετάζουμε λύσεις της εξίσωσης $Ux = 0$ για τις οποίες όλες οι ελεύθερες μεταβλητές είναι

0. Η ανάδρομη αντικατάσταση τότε δίδει τη μοναδική λύση $x = 0$.

□

Πόρισμα 2.4 *Εάν $n > m$ ένα σύνολο n διανυσμάτων στο χώρο $\mathbb{R}^m$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.*

Άσκηση 2.34 Δείξτε οτι εάν $a = 0$ ή $d = 0$ ή $f = 0$, τότε οι στήλες του U είναι γραμμικά εξαρτημένες:

$$U = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.35 Εάν τα a, d, f στην Άσκηση 2.34 είναι όλα διαφορετικά από το 0, τότε η μόνη λύση της εξίσωσης $Ux = 0$ είναι $x = 0$. Οι στήλες του U είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Άσκηση 2.36 Εξετάστε εάν είναι ανεξάρτητα τα διανύσματα:
α′) (0, 1), (1, 1)
β′) (1, 1), (0, 1), (1, 0)
γ′) (1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1)

Άσκηση 2.37 Δείξτε οτι τα διανύσματα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αλλά οτι τα u_1, u_2, u_3, u_4 είναι γραμμικά εξαρτημένα:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.38 Εάν w_1, w_2, w_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, δείξτε οτι οι διαφορές $u_1 = w_2 - w_3$, $u_2 = w_1 - w_3$ και $u_3 = w_1 - w_2$ είναι γραμμικά εξαρτημένες. Βρείτε ένα γραμμικό συνδυασμό των u_1, u_2, u_3 που δίδει 0.

Άσκηση 2.39 Εάν w_1, w_2, w_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, δείξτε οτι τα αθροίσματα $v_1 = w_2 + w_3$, $v_2 = w_1 + w_3$ και $v_3 = w_1 + w_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Εκφράστε τη σχέση $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$ ως προς τα w_i, και βρείτε εξισώσεις για τα c_i.

Παραγωγή Υπόχωρου

Ο χώρος στηλών ενός πίνακα είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ που αποτελείται από τα διανύσματα που γράφονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των στηλών του πίνακα. Λέμε οτι οι στήλες του πίνακα *παράγουν* το χώρο στηλών.

Ορισμός. Θεωρούμε γραμμικό υπόχωρο V του $\mathbb{R}^n$. Τα διανύσματα $w_1, \ldots, w_k$ του $\mathbb{R}^n$ **παράγουν** τον υπόχωρο $V \subseteq \mathbb{R}^n$ εάν

1. $w_j \in V$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$ και
2. Κάθε διάνυσμα του V εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $w_1, \ldots, w_k$, δηλαδή για κάθε $v \in V$ υπάρχουν αριθμοί $c_1, \ldots, c_k$ τέτοιοι ώστε $v = c_1w_1 + \cdots + c_kw_k$.

Γενικότερα, ένα σύνολο διανυσμάτων $S \subseteq V$ παράγει τον υπόχωρο V εάν κάθε διάνυσμα του V εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του S.

Παράδειγμα 2.7 Τα διανύσματα $(1, 0)$, $(1, 1)$ και $(-1, 0)$ παράγουν το $\mathbb{R}^2$. Ποιά δύο από αυτά τα διανύσματα παράγουν το $\mathbb{R}^2$; Ποιά δύο από αυτά τα διανύσματα δεν παράγουν το $\mathbb{R}^2$;

Παράδειγμα 2.8 Η έκφραση ως γραμμικός συνδυασμός δεν είναι, εν γένει, μοναδική. Εκφράστε το διάνυσμα $(-1, 2)$ ως γραμμικό συνδυασμό των παραπάνω διανυσμάτων με δύο διαφορετικούς τρόπους.

Παράδειγμα 2.9 Τα διανύσματα $e_1, e_2, \ldots, e_n$ του $\mathbb{R}^n$ (οι στήλες του ταυτοτικού πίνακα) παράγουν το $\mathbb{R}^n$. Μάλιστα το διάνυσμα $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ δίδεται από το γραμμικό συνδυασμό

$$b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n \,.$$

Λήμμα 2.5 *Θεωρούμε τα διανύσματα $w_1, \ldots, w_k$ του $\mathbb{R}^n$. Το σύνολο όλων των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ που εκφράζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των $w_1, \ldots, w_k$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.*

Ορισμός. Θεωρούμε τα διανύσματα $w_1, \ldots, w_k$ του $\mathbb{R}^n$. Ο υπόχωρος που **παράγεται** από τα διανύσματα $w_1, \ldots, w_k$ είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ που εκφράζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των $w_1, \ldots, w_k$.

Ο χώρος στηλών είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται από τις στήλες του A.

Συμβατικά, θεωρούμε οτι ο μηδενικός υπόχωρος $\{0 \in \mathbb{R}^n\}$ παράγεται από το κενό σύνολο $\varnothing$.

Άσκηση 2.40 Τα διανύσματα $u + w$ και $u - w$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των u και w. Γράψτε τα u και w ως γραμμικούς συνδυασμούς των $u + w$ και $u - w$. Τα δύο ζεύγη διανυσμάτων .... τον ίδιο υπόχωρο. Αποτελούν τα δύο ζεύγη βάσεις του υπόχωρου;

Άσκηση 2.41 Περιγράψτε τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^2$ που παράγεται από τα διανύσματα:
α′) $(0, 1)$, $(1, 1)$
β′) $(1, 1)$, $(-1, -1)$
γ′) $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$

Άσκηση 2.42 α′) Αποφασίστε εάν τα ακόλουθα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή όχι, λύνοντας ένα κατάλληλο σύστημα $Ax = 0$.

$$(1, 1, 0, 0) \quad , \quad (1, 0, 1, 0) \quad , \quad (0, 0, 1, 1) \quad , \quad (0, 1, 0, 1) \,.$$

β′) Ελέγξτε εάν το διάνυσμα $(0, 0, 0, 1)$ βρίσκεται στο χώρο που παράγουν τα παραπάνω διανύσματα.

Άσκηση 2.43 Περιγράψτε τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα

α′. $(1, 1, -1)$ και $(-1, -1, 1)$.

β′. $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ και $(0, 0, 0)$.

γ΄. τις στήλες ενός 3×5 κλιμακωτού πίνακα με 2 οδηγούς.

δ΄. όλα τα διανύσματα με θετικές συντεταγμένες.

Άσκηση 2.44 Υποθέστε οτι τοποθετούμε τα διανύσματα των οποίων θέλουμε να ελέγξουμε τη γραμμική ανεξαρτησία, στις γραμμές και όχι στις στήλες ενός πίνακα. Πως μπορούμε να συμπεράνουμε εάν είναι γραμμικά ανεξάρτητα κατά τη διάρκεια της απαλοιφής από τον A στον U;

Βάση ενός διανυσματικού χώρου

Ορισμός. Βάση ενός διανυσματικού υπόχωρου $V \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα σύνολο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ το οποίο

1. Παράγει τον υπόχωρο V και
2. Είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Λήμμα 2.6 *Εάν $w_1, \ldots, w_k$ είναι βάση του γραμμικού υπόχωρου V, τότε κάθε στοιχείο του V εκφράζεται* με μοναδικό τρόπο *ως γραμμικός συνδυασμός των $w_1, \ldots, w_k$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι $w_1, \ldots, w_k$ είναι βάση του V, και οτι

$$b = a_1 w_1 + \cdots + a_k w_k = c_1 w_1 + \cdots + c_k w_k \,.$$

Τότε $(a_1 - c_1) w_1 + \cdots + (a_k - c_k) w_k = 0$, και αφού τα διανύσματα $w_1, \ldots, w_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού που παριστάνει το 0 είναι όλοι ισοι με 0.

□

Παράδειγμα 2.10 Η **κανονική** βάση του $\mathbb{R}^n$ είναι η βάση $e_1, \ldots, e_n$, η οποία αποτελείται από τις στήλες του μοναδιαίου πίνακα. Όμως η βάση αυτή δεν είναι κατά κανένα τρόπο μοναδική. Οι *στήλες κάθε αντιστρέψιμου $n \times n$ πίνακα* αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα 2.11 Οι στήλες ενός κλιμακωτού πίνακα δεν είναι πάντα γραμμικά ανεξάρτητες, αλλά παράγουν το χώρο στηλών. Ο *στήλες που περιέχουν τους οδηγούς* αποτελούν μία βάση του χώρου στηλών του πίνακα. Θα το δούμε αυτό σε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.12 Θεωρούμε τον κλιμακωτό πίνακα

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι στήλες που περιέχουν οδηγούς είναι οι $(1, 0, 0)$ και $(3, 3, 0)$. Ελέγχουμε οτι είναι γραμμικά ανεξάρτητες: από την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

έχουμε $c_1 + 3c_2 = 0$ και $3c_2 = 0$, και συνεπώς $c_2 = 0$, $c_1 = 0$.

Για να δείξουμε οτι οι στήλες με οδηγούς παράγουν το χώρο στηλών, αρκεί να ελέγξουμε οτι οι υπόλοιπες στήλες εκφράζονται ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών που περιέχουν οδηγούς.

Στον πίνακα U του παραδείγματος, εάν $v_1, \ldots, v_4$ είναι οι στήλες του U, παρατηρούμε οτι οι στήλες v_2 και v_4 εκφράζονται ως γραμμικός συνδυασμόστων v_1 και v_3:

$$v_2 = 3v_1 \quad \text{και} \quad v_4 = \frac{1}{3}v_3 + v_1.$$

Διάσταση

Κάθε γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ διαφορετικός από τον $\{0\}$, έχει άπειρες διαφορέτικές βάσεις. Όμως όλες οι βάσεις έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων.

Πρόταση 2.7 *Εάν ένας γραμμικός υπόχωρος V του $\mathbb{R}^n$ έχει μία βάση με k στοιχεία, τότε κάθε άλλη βάση του V έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι έχουμε βάσεις $v_1, \ldots, v_k$ και $w_1, \ldots, w_m$ του V.

Αφού τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_k$ αποτελούν βάση, κάθε διάνυσμα w_j εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των v_i:

$$w_j = a_{1j}v_1 + \cdots + a_{kj}v_k. \tag{2.3}$$

Θεωρούμε τους πίνακες V και W, με στήλες $v_1, \ldots, v_k$ και $w_1, \ldots, w_m$ αντίστοιχα. Εάν $A = (a_{ij})$ είναι ο πίνακας του οποίου τα στοιχεία ορίζονται από την 2.3, έχουμε

$$W = V\,A.$$

Για παράδειγμα, η πρώτη στήλη του VA είναι ο γραμμικός συνδυασμός των στηλών του V με συντελεστές $a_{11}, \ldots, a_{k1}$

$$a_{11}v_1 + \cdots + a_{k1}v_k = w_1\,.$$

Ο πίνακας A είναι $k \times m$. Εάν $k < m$, τότε υπάρχει διάνυσμα $c \neq 0$ τέτοιο ώστε $Ac = 0$.

Αλλά τότε

$$W\,c = V\,A\,c = V\,0 = 0\,,$$

και συνεπώς οι στήλες του W δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Άρα η υπόθεση $k < m$ δεν μπορεί να ισχύει αφού W είναι βάση. Παρόμοια δείχνουμε οτι δεν μπορεί να ισχύει η υπόθεση $k > m$, και συνεπώς έχουμε $k = m$.

□

Ορισμός. Ο αριθμός των στοιχείων της βάσης ενός γραμμικού υπόχωρου V του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται **διάσταση** του V, και συμβολίζεται $\dim V$.

Παράδειγμα 2.13 Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ έχει διάσταση n: η κανονική βάση έχει n στοιχεία. Ο μηδενικός υπόχωρος $\{0 \in \mathbb{R}^n\}$ έχει διάσταση 0: το κενό σύνολο έχει 0 στοιχεία.

Παράδειγμα 2.14 Ο υπόχωρος $V = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y = 3x\}$ αποτελείται από τα στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0\,.$$

Για να βρούμε μία βάση του υπόχωρου V, τον θεωρούμε ως το μηδενόχωρο $\mathcal{N}(A)$ του πίνακα $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Εδώ ο πίνακας έχει μόνο μία γραμμή, η οποία περιέχει τον οδηγό, 3. Άρα η τάξη του πίνακα είναι 1, και έχουμε δύο ελεύθερες μεταβλητές. Μία βάση του μηδενόχωρου έχει δύο στοιχεία (όσες είναι οι ελεύθερες μεταβλητές), και συνεπώς η διάσταση του V είναι 2. Όπως γνωρίζουμε από την Αναλυτική Γεωμετρία, το σύνολο V παριστάνει ένα επίπεδο στο χώρο.

Προσέξτε οτι η διάσταση αναφέρεται στον υπόχωρο V, και όχι στα μεμονομένα διανύσματα του V. Κάθε στοιχείο v του V έχει 3 συντεταγμένες, πράγμα που σημαίνει οτι ανήκει στο $\mathbb{R}^3$, $v \in \mathbb{R}^3$. Έτσι το διάνυσμα $v = (1, 3, 2)$ είναι στοιχείο του χώρου V ο οποίος έχει διάσταση 2, και του χώρου $\mathbb{R}^3$ ο οποίος έχει διάσταση 3. Αλλά το v είναι επίσης στοιχείο του χώρου $W = \{(t, 3t, 2t) : t \in \mathbb{R}\}$, ο οποίος έχει διάσταση 1.

Άσκηση 2.45 Επιλέγουμε ένα διάνυσμα $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Υπάρχουν 24 μεταθέσεις των συντεταγμένων του. Αυτά τα 24 διανύσματα παράγουν έναν υποχώρο V του $\mathbb{R}^4$. Βρείτε συγκεκριμένα διανύσματα x τέτοια ώστε η διάσταση του V να είναι α′) 0, β′) 1, γ′) 3, δ′) 4.

Άσκηση 2.46 Βρείτε μία βάση για το επίπεδο $x - 2y + 3z = 0$ στο $\mathbb{R}^3$. Στη συνέχεια βρείτε μία βάση για την τομή αυτού του επιπέδου με το (x, y)-επίπεδο. Τέλος βρείτε μία βάση για τον υπόχωρο των διανυσμάτων που είναι κάθετα στο αρχικό επίπεδο.

Άσκηση 2.47 Υποθέτουμε οτι S είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^6$, διάστασης 5. Είναι τα ακόλουθα αληθή ή ψευδή;

α′. Κάθε βάση του S μπορεί να επεκταθεί σε μία βάση του $\mathbb{R}^6$, προσθέτοντας ένα ακόμη διάνυσμα.

β′. Κάθε βάση του $\mathbb{R}^6$ μπορεί να περιοριστεί σε μία βάση του S, διαγράφοντας ένα διάνυσμα.

Άσκηση 2.48 Οι στήλες του A είναι n διανύσματα του $\mathbb{R}^m$. Ποιά είναι η τάξη του A εάν τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Ποιά εάν τα διανύσματα παράγουν τον $\mathbb{R}^m$. Ποιά εάν τα διανύσματα αποτελουν βάση του $\mathbb{R}^m$

Άσκηση 2.49 Βρείτε μία βάση για κάθε ένα από τους ακόλουθους υπόχωρους του $\mathbb{R}^4$.

α′. Όλα τα διανύσματα των οποίων οι συνιστώσες είναι ίσες.

β′. Όλα τα διανύσματα των οποίων οι συνιστώσες έχουν άθροισμα 0.

γ′. Όλα τα διανύσματα που είναι κάθετα στα $(1, 1, 0, 0)$ και $(1, 0, 1, 1)$

Άσκηση 2.50 Υποθέτουμε οτι ο υπόχωρος V έχει διάσταση k. Δείξτε οτι

α′. εάν k διανύσματα του V είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε αποτελούν βάση του V.

β′. εάν k διανύσματα παράγουν τον V, τότε αποτελούν βάση του V.

Άσκηση 2.51 Αποδείξτε οτι εάν V και W είναι τρισδιάστατοι υπόχωροι του $\mathbb{R}^5$, τότε V και W πρέπει να έχουν ένα κοινό μη μηδενικό διάνυσμα. (Ξεκινήστε με βάσεις για τους δύο υπόχωρους, που συνολικά περιέχουν 6 διανύσματα).

Οι τέσσερεις Θεμελιώδεις Υπόχωροι ενός πίνακα.

Μέχρι τώρα έχουμε δεί παραδείγματα βάσεων, αλλά δεν έχουμε ένα τρόπο να κατασκευάσουμε μία βάση για οποιαδήποτε γραμμικό υπόχωρο. Στη συνέχεια θα δούμε πως, ξεκινώντας από μία περιγραφή ενός υπόχωρου, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία βάση του.

Έχουμε δεί δύο τρόπους να περιγράψουμε ένα διανυσματικό υπόχωρο. Μπορεί να γνωρίζουμε ένα σύνολο διανυσμάτων που παράγουν τον υπόχωρο, όπως ο χώρος στηλών, που παράγεται από τις στήλες ενός πίνακα. Διαφορετικά, μπορεί να γνωρίζουμε συνθήκες τις οποίες πρέπει να ικανοποιούν τα διανύσματα του υποχώρου, όπως ο μηδενοχώρος ενός πίνακα A, που αποτελείται από τα διανύσματα που ικανοποιούν τις συνθήκες $Ax = 0$.

Στην πρώτη περίπτωση, μπορεί να περιέχονται περιττά διανύσματα στο σύνολο που παράγει τον υπόχωρο. Στη δεύτερη περίπτωση μπορεί να περιλαμβάνονται περιττές εξισώσεις στις συνθήκες που προσδιορίζουν τον υπόχωρο.

Θα οργανώσουμε τη συζήτηση γύρω από τους τέσσερεις θεμελιώδεις υπόχωρους που σχετίζονται με ένα πίνακα.

Έχουμε ήδη δεί το μηδενόχωρο και το χώρο στηλων ενός πίνακα A. Θα ορίσουμε άλλους δύο χώρους, οι οποίοι προκύπτουν από τον A, έτσι ώστε για κάθε $m \times n$ πίνακα A να έχουμε τέσσερις υπόχωρους:

- Ο **χώρος στηλών** του A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ ο οποίος παράγεται από τις στήλες του A, και συμβολίζεται
$$\mathcal{R}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$$

- Ο **μηδενόχωρος** του A είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ ο οποίος αποτελείται από τις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης $Ax = 0$, και συμβολίζεται
$$\mathcal{N}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$$

- Ο **χώρος γραμμών** του A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ ο οποίος παράγεται από τις γραμμές του A. Προφανώς συμπίπτει με το χώρο στηλών του ανάστροφου πίνακα A^T, και συμβολίζεται
$$\mathcal{R}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^n$$

- Ο **αριστερός μηδενόχωρος** του A είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ ο οποίος αποτελείται από τις λύσεις της εξίσωσης $y^T A = 0$. Συμπίπτει με το μηδενόχωρο του ανάστροφου πίνακα A^T, αφού $y^T A = (A^T y)^T$, και συμβολίζεται
$$\mathcal{N}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^m\,.$$

Θα μελετήσουμε καθένα από αυτούς τους χώρους: θα βρούμε τη διάσταση τους, και θα περιγράψουμε βάσεις, χρησιμοποιώντας τον πίνακα A και τον κλιμακωτό πίνακα U που προκύπτει μετά την απαλοιφή.

Επιστρέφουμε στο παράδειγμα 2.1 και θεωρούμε ταυτοχρόνως τους πίνακες A και U:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο χώρος γραμμών του A, $\mathcal{R}(A^T)$

Για ένα κλιμακωτό πίνακα U εύκολα βλέπουμε οτι ο χώρος γραμμών έχει ως βάση τις μη μηδενικές γραμμές του U: στην Πρόταση 2.3 δείξαμε οτι είναι γραμμικά ανεξάρτητες, και παράγουν όλο το χώρο αφού οι μηδενικές γραμμές δεν συνεισφέρουν τίποτα περισσότερο. Η σημαντική παρατήρηση είναι οτι ο χώρος γραμμών του A είναι ίδιος με το χώρο γραμμών του U.

Λήμμα 2.8

$$\mathcal{R}(A^T) = \mathcal{R}(U^T)\,.$$

Απόδειξη. Κάθε γραμμή του U προκύπτει από γραμμικούς συνδυασμούς των γραμμών του A. (Στο παράδειγμα, η 2η γραμμή του U είναι η 2η γραμμή του A μείον το διπλάσιο της 1ης γραμμής του A.) Άρα και οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός γραμμών του U μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός γραμμών του A. Άρα ο χώρος γραμμών του U περιέχεται στο χώρο γραμμών του A:

$$\mathcal{R}(U^T) \subseteq \mathcal{R}(A^T)\,.$$

Αλλά αφού η διαδικασία της απαλοιφής είναι αντιστρέψιμη κάθε γραμμή του A μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του U. (Στο παράδειγμα, η 2η γραμμή του A είναι η 2η γραμμή του U συν το διπλάσιο της 1ης γραμμής του U.)

Άρα ο χώρος γραμμών του U περιέχεται στο χώρο γραμμών του A:

$$\mathcal{R}(A^T) \subseteq \mathcal{R}(U^T)\,.$$

Συμπεραίνουμε οτι

$$\mathcal{R}(A^T) = \mathcal{R}(U^T)\,.$$

□

Ως βάση του $\mathcal{R}(A^T)$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις μη μηδενικές γραμμές του U. Το πλήθος αυτών είναι ίσο με την τάξη r του πίνακα. Συμπεραίνουμε οτι η διάσταση του χώρου γραμμών είναι ίση με την τάξη του πίνακα:

$$\dim \mathcal{R}(A^T) = r\,.$$

Μπορούμε να βρούμε μία βάση του χώρου γραμμών που να αποτελείται από γραμμές του A. Εάν όμως έχουν υπάρξει εναλλαγές γραμμών στην απαλοιφή Gauss, οι r πρώτες γραμμές του πίνακα A μπορεί να μην είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Καταγράφουμε τις προηγούμενες παρατηρήσεις στην ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 2.9 *Ο χώρος γραμμών του $m \times n$ πίνακα A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, και έχει διάσταση ίση με την τάξη του πίνακα,*

$$\mathcal{R}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^n \quad , \quad \dim \mathcal{R}(A^T) = r$$

Μία βάση του $\mathcal{R}(A^T)$ αποτελείται από τις μη μηδενικές γραμμές του αντίστοιχου κλιμακωτού πίνακα U.

Ο μηδενόχωρος του A, $\mathcal{N}(A)$.

Έχουμε δει οτι ο μηδενόχωρος του A είναι ίσος με το μηδενόχωρο του U (αυτός ακριβώς είναι ο λόγος που η απαλοιφή Gauss χρησιμοποιείται για την λύση του συστήματος $Ax = 0$). Έχουμε δει επίσης οτι για κάθε ελεύθερη μεταβλητή $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ μπορούμε να βρούμε διανύσματα $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ τα οποία παράγουν το μηδενόχωρο $\mathcal{N}(A)$. Το διάνυσμα v_{i_j} έχει την τιμή 1 στην ελεύθερη μεταβλητή x_{i_j}, και την τιμή 0 στις υπόλοιπες ελεύθερες μεταβλητές. Συνεπώς κανένα από τα διανύσματα v_{i_j} δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Συμπεραίνουμε οτι τα διανύσματα $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και συνεπώς οτι αποτελούν βάση του μηδενόχωρου $\mathcal{N}(A)$. Η διάσταση του μηδενόχωρου είναι ίση με το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών, $k = n - r$.

Πρόταση 2.10 *Ο μηδενόχωρος του $m \times n$ πίνακα A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, και έχει διάσταση ίση με το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών,*

$$\mathcal{N}(A) \subseteq \mathbb{R}^n \quad , \quad \dim \mathcal{N}(A) = n - r\,.$$

Ο χώρος στηλών του A, $\mathcal{R}(A)$.

Στην περίπτωση του χώρου στηλών, η σχέση του $\mathcal{R}(A)$ με τον $\mathcal{R}(U)$ δεν είναι τόσο απλή. Από το παράδειγμα είναι προφανές οτι ο $\mathcal{R}(A)$ δεν είναι ο ίδιος με τον $\mathcal{R}(U)$.

Άσκηση 2.52 Βρείτε ένα διάνυσμα του $\mathcal{R}(A)$ του παραδείγματος 2.1 που δεν ανήκει στον $\mathcal{R}(U)$.

Το ακόλουθο Λήμμα περιγράφει τη σχέση μεταξύ των στηλών του A και των στηλών του U.

Λήμμα 2.11 *Ένα σύνολο στηλών του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητο εάν και μόνον εάν το αντίστοιχο σύνολο στηλών του U είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Απόδειξη. Εάν A' είναι ο πίνακας που παίρνουμε από ένα υποσύνολο των στηλών του A, και U' ο πίνακας από τις αντίστοιχες στήλες του U, τότε

$$A' = P^{-1} L\, U'$$

και, αφού ο πίνακας $P^{-1} L$ είναι αντιστρέψιμος, ένα διάνυσμα x ικανοποιεί την εξίσωση $A'x = 0$ εάν και μόνον εάν ικανοποιεί την εξίσωση $U'x = 0$.

Εάν οι στήλες του U' είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε η μοναδική λύση του $U'x = 0$ είναι η $x = 0$, και συνεπώς η μοναδική λύση του $A'x = 0$ είναι η $x = 0$. Συνεπώς οι στήλες του A' είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Οι συνεπαγωγές ισχύουν και αντίστροφα: εάν οι στήλες του A' είναι γραμμικά ανεξάρτητες, το ίδιο ισχύει για τις στήλες του U'.

$\square$

Γνωρίζουμε οτι οι r στήλες που περιέχουν οδηγούς αποτελούν βάση του $\mathcal{R}(U)$. Συνεπώς οι αντίστοιχες r στήλες $j_1, \ldots, j_r$ του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Εάν η διάσταση του $\mathcal{R}(A)$ ήταν μεγαλύτερη από r, τότε θα υπήρχε κάποια άλλη στήλη του A η οποία, μαζί με τις $j_1, \ldots, j_r$ θα αποτελούσε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Αλλά τότε οι αντίστοιχες $r + 1$ στήλες του U θα ήταν γραμμικά ανεξάρτητες, που δεν μπορεί να συμβεί, αφού η διάσταση του $\mathcal{R}(U)$ είναι r. Συνεπώς οι στήλες $j_1, \ldots, j_r$ παράγουν το $\mathcal{R}(A)$ και αποτελούν βάση του.

Πρόταση 2.12 *Ο χώρος στηλών του $m \times n$ πίνακα A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, και έχει διάσταση ίση με την τάξη r του πίνακα,*

$$\mathcal{R}(A) \subseteq \mathbb{R}^m \quad , \quad \dim \mathcal{R}(A) = r \, .$$

Μία βάση του $\mathcal{R}(A)$ αποτελείται από τις στήλες που αντιστοιχούν στις στήλες του κλιμακωτού πίνακα U που περιέχουν οδηγούς.

Συνέπεια των Προτάσεων 2.9 και 2.12 είναι το ακόλουθο θεμελιώδες αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.13 *Σε κάθε $m \times n$ πίνακα A, το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του A είναι ίσο με την τάξη του πίνακα, δηλαδή το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του A.*

Ο αριστερός μηδενόχωρος του A, $\mathcal{N}(A^T)$.

Ο αριστερός μηδενόχωρος του A είναι ο μηδενόχωρος του ανάστροφου πίνακα A^T. Γνωρίζουμε οτι η διάσταση του μηδενόχωρου ενός πίνακα είναι το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών, που είναι ίσο με το πλήθος όλων των μεταβλητών μείον το πλήθος των βασικών μεταβλητών. Για τον πίνακα A^T, το πλήθος όλων των μεταβλητών είναι m (όσες είναι οι στήλες του A^T, δηλαδή όσες είναι οι γραμμές του A). Το πλήθος των βασικών μεταβλητών του A^T είναι ίσο με την τάξη του r, από το Θεώρημα 2.13. Συνεπώς το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών του A^T είναι $m - r$, και

$$\dim \mathcal{N}(A^T) = m - r \, .$$

Για να περιγράψουμε τα διανύσματα y που ικανοποιούν $y^T A = 0$, εξετάζουμε την παραγοντοποίηση

$$P\,A = L\,U \, .$$

Ο L είναι αντιστρέψιμος, και έχουμε

$$L^{-1}\,P\,A = U \, .$$

Η i γραμμή του U είναι το γινόμενο της i γραμμής του $L^{-1}P$ με τον πίνακα A. Οι $m - r$ τελευταίες γραμμές του U είναι ίσες με το μηδέν. Άρα οι $m - r$ τελευταίες γραμμές του $L^{-1}P$ είναι διανύσματα του αριστερού μηδενόχωρου του A. Αφού ο πίνακας $L^{-1}P$ είναι αντιστρέψιμος, οι γραμμές του είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Άρα οι $m-r$ τελευταίες γραμμές του $L^{-1}P$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου $\mathcal{N}(A^T)$, ο οποίος έχει διάσταση $m - r$, και συνεπώς αποτελούν μία βάση του χώρου.

Πρόταση 2.14 *Ο αριστερός μηδενόχωρος του $m \times n$ πίνακα A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, και έχει διάσταση $m - r$,*

$$\mathcal{N}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^m \quad , \quad \dim \mathcal{N}(A^T) = m - r$$

Μία βάση του $\mathcal{N}(A^T)$ αποτελείται από τις $m - r$ τελευταίες γραμμές του πίνακα $L^{-1}P$ της απαλοιφής Gauss.

Άσκηση 2.53 Περιγράψτε τους τέσσσερεις υποχώρους του $\mathbb{R}^3$ που σχετίζονται με τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.54 Βρείτε μια βάση του χώρου στηλών του

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.55 Βρείτε τη διάσταση και μία βάση για τους τέσσερεις θεμελιώδεις υπόχωρους των πινάκων.

α′.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

β′.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.56 Εάν το γινόμενο AB είναι ο μηδενικός πίνακας, $AB = 0$, δείξτε οτι ο χώρος στηλών του πίνακα B περιέχεται στο μηδενοχώρο του A. Δείξτε επίσης οτι ο χώρος γραμμών του A περιέχεται στον αριστερό μηδενοχώρο του B

Άσκηση 2.57 Βρείτε έναν πίνακα A ο οποίος έχει τον χώρο V ως χώρο στηλών, και ένα πίνακα B ο οποίος έχει τον χώρο V ως μηδενοχώρο: V είναι ο υπόχωρος που παράγεται από τα διανύσματα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.58 Γιατί δεν υπάρχει πίνακας A τέτοιος ώστε το διάνυσμα $(1, 1, 1)$ να περιέχεται στο χώρο γραμμών και στο μηδενοχώρο του A;

Άσκηση 2.59 Εάν η εξίσωση $Ax = 0$ έχει μία μη μηδενική λύση, δείξτε οτι υπάρχουν διανύσματα w για τα οποία $A^T y = w$ δεν έχει λύση. Κατασκευάστε ένα τέτοιο A και w.

Άσκηση 2.60 Χωρίς να πολλαπλασιάσετε για να υπολογίσετε το A, βρείτε βάσεις των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων του A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.61 Εάν εναλλάξετε τις δύο πρώτες γραμμές του πίνακα A, ποιοί από τους τέσσερεις υπόχωρους δεν αλλάζουν; Εάν $y = (1, 2, 3, 4)$ είναι στοιχείο στον αριστερό μηδενοχώρο του A, βρείτε ένα διάνυσμα στον αριστερό μηδενοχώρο του νέου πίνακα.

Γενικοί διανυσματικοί χώροι

Ξεκινήσαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο μελετώντας συστήματα εξισώσεων πρώτου βαθμού, και σιγά-σιγά, χρησιμοποιώντας ως βασικό εργαλείο την απαλοιφή Gauss, χτίσαμε ένα αρκετά πολύπλοκο οικοδόμημα:

- διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$ και πράξεις με διανύσματα
- πίνακες και πράξεις με πίνακες
- παραγοντοποίηση και αντιστροφή πινάκων
- γραμμικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$
- γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία
- διάσταση γραμμικού υπόχωρου
- τάξη πίνακα
- θεμελιώδεις υπόχωροι ενός πίνακα, και βάσεις τους

Όμως όλα αυτά είναι απόλυτα συγκεκριμένα: αναφέρονται σε n-άδες πραγματικών αριθμών. Ποιές είναι οι θεμελιώδεις ιδιότητες, που είναι απαραίτητες για να αναπτύξουμε τη θεωρία, και ποιές είναι απλώς ιδιαιτερότητες των n-άδων πραγματικών αριθμών, που δεν επηρεάζουν ουσιαστικά το οικοδόμημα;

Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τη βασική διαδικασία της απαλοιφής Gauss, χρειάζεται να μπορούμε να προσθέτουμε διανύσματα και να τα πολλαπλασιάζουμε ή να τα διαιρούμε με αριθμούς. Υπάρχουν άλλα μαθηματικά αντικείμενα με τα οποία μπορούμε να κάνουμε αυτές τις πράξεις; Εύκολα βρίσκουμε κάποια παραδείγματα:

- πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές: εάν $p(x)$ και $q(x)$ είναι πολυώνυμα, και c είναι πραγματικός αριθμός, τότε $p(x) + q(x)$ και $cp(x)$ είναι επίσης πολυώνυμα.
- ακολουθίες πραγματικών αριθμών: εάν a_n και b_n είναι ακολουθίες, $a_n + b_n$ και ca_n είναι επίσης ακολουθίαες.
- συναρτήσεις από ένα σύνολο X στους πραγματικούς αριθμούς: εάν $f : X \to \mathbb{R}$ και $g : X \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις, τότε $f + g$, που ορίζεται ως $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, και cf, που ορίζεται ως $(cf)(x) = cf(x)$, είναι επίσης συναρτήσεις από το X στο $\mathbb{R}$.

Θα μπορούσαμε, αντί για τους πραγματικούς αριθμούς, να χρησιμοποιήσουμε τους ακέραιους ή τους μιγαδικούς; Με τους ακέραιους δεν θα μπορούσαμε να κάνουμε διαίρεση, που είναι απαραίτητη στην απαλοιφή Gauss. Ποιές ιδιότητες των πραγματικών χρειαζόμαστε; Αν σκεφτούμε λίγο, βλέπουμε οτι για την απαλοιφή Gauss χρησιμοποιούμε όλες τις συνηθισμένες ιδιότητες των τεσσάρων πράξεων της αριθμητικής, αλλά δεν χρησιμοποιούμε τη διάταξη των πραγματικών αριθμών. Χρησιοποιούμε τις ιδιότητες ενός *αλγεβρικού σώματος*.

Αλγεβρικά σώματα

Ένα **αλγεβρικό σώμα** είναι ένα σύνολο $\mathbb{K}$ στο οποίο ορίζονται δύο (διμελείς) πράξεις, τις οποίες ονομάζουμε **πρόσθεση** και **πολλαπλασιασμό**,

$$(a,\, b) \mapsto a + b \quad \text{και} \quad (a,\, b) \mapsto ab$$

και οι οποίες ικανοποιούν τα ακόλουθα αξιώματα.

ΑΣ1. Η προσεταιριστική ιδιότητα για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό: για κάθε $a,\, b,\, c \in \mathbb{K}$, ισχύουν

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad , \quad (ab)c = a(bc)$$

ΑΣ2. Η αντιμεταθετική ιδιότητα για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό: για κάθε $a,\, b \in \mathbb{K}$, ισχύουν

$$a + b = b + a \quad , \quad ab = ba$$

ΑΣ3. Η επιμεριστική ιδιότητα της πρόσθεσης ως προς τον πολλαπλασιασμό: για κάθε $a,\, b,\, c \in \mathbb{K}$, ισχύει

$$a(b + c) = ab + ac$$

ΑΣ4. Υπάρχουν στοιχεία $0 \in \mathbb{K}$ και $1 \in \mathbb{K}$, τέτοια ώστε για κάθε $a \in \mathbb{K}$,

$$a + 0 = a \quad \text{και} \quad a1 = a$$

ΑΣ5. Για κάθε $a \in \mathbb{K}$ υπάρχει μοναδικό $b \in \mathbb{K}$ τέτοιο ώστε $a + b = 0$. Το μοναδικό στοιχείο b με αυτή την ιδιότητα συμβολίζεται $-a$ και ονομάζεται *αντίθετο* του a.

ΑΣ6. Για κάθε $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, υπάρχει μοναδικό $b \in \mathbb{K}$ τέτοιο ώστε $ab = 1$. Το μοναδικό στοιχείο b με αυτή την ιδιότητα συμβολίζεται a^{-1} και ονομάζεται *αντίστροφο* του a.

Παράδειγμα 2.15 Οι ρητοί αριθμοί, $\mathbb{Q}$, οι πραγματικοί αριθμοί, $\mathbb{R}$, και οι μιγαδικοί αριθμοί, $\mathbb{C}$, με τις γνωστές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, αποτελούν αλγεβρικά σώματα. Οι ακέραιοι αριθμοί δεν αποτελούν σώμα, καθώς δεν ικανοποιείται το αξίωμα (ΑΣ6).

Μπορούμε να ορίσουμε πράξεις πολλαπλασιασμού και πρόσθεσης οι οποίες να ικανοποιούν όλα τα αξιώματα ενός αλγεβρικού σώματος και σε πεπερασμένα σύνολα:

Παράδειγμα 2.16 Στο σύνολο με δύο στοιχεία $\mathbb{Z}_2 = \{0,\, 1\}$, ορίζουμε τις πράξεις με τους ακόλουθους πίνακες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

Εύκολα ελέγχουμε οτι ικανοποιούνται τα αξιώματα (ΑΣ1) – (ΑΣ6).

Το ίδιο ισχύει για το σύνολο με τρία στοιχεία $\mathbb{Z}_3 = \{0,\, 1,\, 2\}$ με τις πράξεις

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\times$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Άσκηση 2.62 Επαληθεύσατε οτι οι πράξεις της πρόθεσης και του πολλαπλασιασμού όπως ορίζονται με τους παραπάνω πίνακες έχουν τη αντιμεταθετική και την προσεταιριστική ιδιότητα. Ποιό είναι το αντίθετο στοιχείο του 1 στο $\mathbb{Z}_2$; Ποιό είναι το αντίθετο στοιχείο του 2 στο $\mathbb{Z}_3$; Ποιό είναι το *αντίστροφο* στοιχείο του 2 στο $\mathbb{Z}_3$;

Παράδειγμα 2.17 Το σύνολο των ρητών αριθμών επεκτεταμένο με την τετραγωνική ρίζα του 2, δηλαδή το σύνολο $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a,\, b \in \mathbb{Q}\}$, αποτελεί ένα αλγεβρικό σώμα.

Άσκηση 2.63 Επαληθεύσατε οτι οι πράξεις της πρόθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι καλά ορισμένες στο $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, δηλαδή οτι το άθροισμα και το γινόμενο δύο στοιχείων του $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ είναι επίσης στοιχείο του $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Βρείτε το αντίστροφο του $a + b\sqrt{2}$ όταν $b \neq 0$.

Διανυσματικοί χώροι πάνω από ένα σώμα

Τώρα θα ορίσουμε ένα **διανυσματικό χώρο V πάνω από ένα αλγεβρικό σώμα** $\mathbb{K}$, ως ένα σύνολο V στο οποίο ορίζονται δύο πράξεις, η *πρόσθεση*

$$\alpha : V \times V \to V \qquad \alpha(v,\, w) = v \dot{+} w$$

και ο *πολλαπλασιασμός (με στοιχεία του $\mathbb{K}$)*

$$\mu : \mathbb{K} \times V \to V \qquad \mu(a,\, v) = a \cdot v$$

και στο οποίο ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα.

ΔΧ1. Για κάθε $v,\, w \in V, \quad v \dot{+} w = w \dot{+} v$.

ΔΧ2. Για κάθε $v,\, w,\, u \in V, \quad (v \dot{+} w) \dot{+} u = v \dot{+} (w \dot{+} u)$.

ΔΧ3. Υπάρχει στοιχείο $\bar{0} \in V$ τέτοιο ώστε, για κάθε $v \in V, \quad v \dot{+} \bar{0} = v$.

ΔΧ4. Για κάθε $v \in V$ υπάρχει $w \in V$ τέτοιο ώστε $u \dot{+} w = 0$.

ΔΧ5. Για κάθε $a,\, b \in \mathbb{K}$ και $v \in V, \quad a \cdot (b \cdot v) = (ab) \cdot v$.

ΔΧ6. Για κάθε $v \in V$ ισχύει $1 \cdot v = v$.

ΔΧ7. Για κάθε $a \in \mathbb{K}$ και $v,\, w \in V, \quad a \cdot (v \dot{+} w) = a \cdot v \dot{+} a \cdot w$.

ΔΧ8. Για κάθε $a,\, b \in \mathbb{K}$ και $v, \in V, \quad (a + b) \cdot v = a \cdot v \dot{+} b \cdot v$.

Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου ονομάζονται **διανύσματα**.

Παράδειγμα 2.18 Εύκολα ελέγχουμε οτι τα σύνολα $\mathbb{R}^n$ για $n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$, με τις συνηθισμένες πράξεις, ικανοποιούν τα αξιώματα (ΔΧ1) – (ΔΧ8), και συνεπώς είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Τα σύνολα $\mathbb{C}^n$ για $n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$, με τις συνηθισμένες πράξεις, είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 2.19 Οι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$ και του $\mathbb{C}^n$ είναι διανυσματικοί χώροι. Ο περιορισμός των πράξεων του $\mathbb{R}^n$ ή του $\mathbb{C}^n$ στον υπόχωρο, ικανοποιεί όλα τα αξιώματα ενός διανυσματικού χώρου.

Γενικότερα, εάν V είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$, και W είναι ένα υποσύνολο του V, το W είναι **διανυσματικός υπόχωρος** του V εάν το W είναι κλειστό ως προς τις πράξεις, δηλαδή εάν για κάθε v και $w \in W$, και κάθε $a \in K$, τα διανύσματα $v \dotplus w$ και $a \cdot v$ ανήκουν στο W. Τότε το W ικανοποιεί τα αξιώματα (ΔΧ1) – (ΔΧ8), και είναι επίσης διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$.

Παράδειγμα 2.20 Τα σύνολα $(\mathbb{Z}_2)^n$ για $n = 1, 2, 3, \ldots$, των διατεταγμένων n-άδων από στοιχεία του $\mathbb{Z}_2$, επίσης αποτελούν διανυσματικούς χώρους. Οι πράξεις ορίζονται κατά συνιστώσα, έτσι ώστε, για παράδειγμα στο $(\mathbb{Z}_2)^3$,

$$\begin{aligned}(0,\,1,\,1)+(1,\,1,\,0) &= (0+1,\,1+1,\,1+0)\\ &= (1,\,0,\,1)\end{aligned}$$

και για $a \in \mathbb{Z}_2$

$$\begin{aligned}a(0,\,1,\,1) &= (a0,\,a1,\,a1)\\ &= (0,\,a,\,a)\,.\end{aligned}$$

Με αυτές τις πράξεις ικανοποιούνται όλα τα αξιώματα (ΔΧ1) – (ΔΧ8).

Παράδειγμα 2.21 Στο σύνολο όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές, το οποίο συμβολίζουμε $\mathbb{R}[x]$, ορίζονται οι συνηθισμένες πράξεις της πρόσθεσης δύο πολυωνύμων και του πολλαπλασιασμού ενός πολυωνύμου με έναν αριθμό (ορίζεται επίσης πολλαπλασιασμός δύο πολυωνύμων, αλλά αυτή η πράξη δεν θα μας απασχολήσει τώρα). Μπορούμε να προσθέσουμε δύο πολυώνυμα $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ και $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ για να πάρουμε το άθροισμα $(p+q)(x) = p(x)+q(x)$, ή να πολλαπλασιάσουμε το $p(x)$ με τον αριθμό c και να πάρουμε το πολυώνυμο $cp(x) = ca_n x^n + \cdots + ca_1 x + ca_0$. Εύκολα ελέγχουμε οτι το σύνολο $\mathbb{R}[x]$, με αυτές τις πράξεις, ικανοποιεί τα αξιώματα (ΔΧ1) – (ΔΧ8):

ΔΧ1. Για κάθε $p(x),\, q(x) \in \mathbb{R}[x], \quad p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$.

ΔΧ2. Για κάθε $p(x),\, q(x),\, r(x) \in \mathbb{R}[x], \quad (p(x) + q(x)) + r(x) = p(x) + (q(x) + r(x))$.

ΔΧ3. Το μηδενικό πολυώνυμο $\bar{0}(x)$ έχει την ιδιότητα οτι για κάθε $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, ισχύει $p(x) + \bar{0}(x) = p(x)$.

ΔΧ4. Για κάθε πολυώνυμο $p(x)$ υπάρχει το αντίθετο πολυώνυμο $-p(x)$ για το οποίο ισχύει $p(x) + (-p(x)) = \bar{0}(x)$.

ΔΧ5. Για κάθε $a,\, b \in \mathbb{R}$ και $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, ισχύει $a \cdot (b \cdot p(x)) = (ab) \cdot p(x)$.

ΔΧ6. Για κάθε $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ ισχύει $1 \cdot p(x) = p(x)$.

ΔΧ7. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και $p(x),\, q(x) \in \mathbb{R}[x]$, ισχύει $a \cdot (p(x) + q(x)) = a \cdot p(x) + a \cdot q(x)$.

ΔΧ8. Για κάθε $a,\, b \in \mathbb{R}$ και $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, ισχύει $(a + b) \cdot p(x) = a \cdot p(x) + b \cdot p(x)$.

Το σύνολο όλων των πολυωνύμων βαθμού 3 δεν αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο αυτού του χώρου, αφού το άθροισμα δύο πολυωνύμων βαθμού 3 μπορεί να είναι πολυώνυμα χαμηλότερου βαθμού. Αλλά το σύνολο των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου από ή ίσου με 3, είναι διανυσματικός υπόχωρος του διανυσματικού χώρου όλων των πολυωνύμων.

Παράδειγμα 2.22 Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συμβολίζεται $C^0(\mathbb{R})$. Σε αυτό ορίζουμε την πρόσθεση δύο συναρτήσεων κατά σημείο, $(f \dotplus g)(x) =$

$f(x) + g(x)$, και τον πολλαπλασιασμό μίας συνάρτησης με έναν αριθμό επίσης κατά σημείο $(c \cdot f)(x) = cf(x)$. Είναι γνωστό οτι εάν f και g είναι συνεχείς, τότε $f \dotplus g$ και $c \cdot f$ είναι επίσης συνεχείς. Το σύνολο $C^0(\mathbb{R})$ με αυτές τις πράξεις είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2.23 Στο διανυσματικό χώρο $V = (\mathbb{Z}_2)^2$, ο οποίος έχει 4 στοιχεία,

$$V = \{(0,\,0),\,(0,\,1),\,(1,\,0),\,(1,\,1)\}\,,$$

τα υποσύνολα $\{(0,\,0)\}$, $\{(0,\,0),\,(0,\,1)\}$, $\{(0,\,0),\,(1,\,0)\}$ και $\{(0,\,0),\,(1,\,1)\}$ είναι διανυσματικοί υπόχωροι, ενώ το υποσύνολο

$$\{(0,\,0),\,(0,\,1),\,(1,\,0)\}$$

δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος, αφού $(1,\,0) \dotplus (0,\,1) = (1,\,1)$ το οποίο δεν ανήκει σε αυτό το σύνολο.

Παράδειγμα 2.24 Το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων, με τις πράξεις της πρόσθεσης πινάκων και πολλαπλασιασμού ενός πίνακα με έναν αριθμό, αποτελεί διανυσματικό χώρο πάνω από το $\mathbb{R}$, τον οποίο συμβολίζουμε $\mathcal{M}_{m,n}$. Το σύνολο των άνω τριγωνικών $n \times n$ πινάκων είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathcal{M}_{n,n}$, αφού εύκολα ελέγχουμε οτι είναι κλειστό ως προς τις πράξεις. Αντιθέτως, το σύνολο των μη ιδιόμορφων $n \times n$ πινάκων δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathcal{M}_{n,n}$. Μπορείτε να βρείτε δύο μη ιδιόμορφους πίνακες, τέτοιους ώστε το άθροισμά τους να είναι ιδιόμορφος πίνακας;

Ένας **γραμμικός συνδυασμός** σε ένα διανυσματικό χώρο V πάνω από ένα αλγεβρικό σώμα $\mathbb{K}$ είναι ένα άθροισμα $a_1 \cdot v_1 \dotplus \cdots \dotplus a_n \cdot v_n$, όπου τα $v_1,\,\ldots,\,v_n$ είναι διανύσματα του V και $a_1,\,\ldots,\,a_n$ είναι στοιχεία του $\mathbb{K}$.

Μία συλλογή διανυσμάτων $v_1,\,\ldots,\,v_n$ του V είναι **γραμμικά ανεξάρτητη** εάν ο μοναδικός γραμμικός συνδυασμός των $v_1,\,\ldots,\,v_n$ ο οποίος είναι ίσος με το μηδενικό διάνυσμα, είναι ο συνδυασμός με όλους τους συντελεστές ίσους με $0 \in \mathbb{K}$.

Ένα υποσύνολο Y **παράγει** το διανυσματικό χώρο V εάν κάθε διάνυσμα του V μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του Y με συντελεστές στο σώμα $\mathbb{K}$.

Μία **βάση** $\mathcal{B}$ του διανυσματικού χώρου V είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο το οποίο παράγει το V: το σύνολο $\mathcal{B} \subseteq V$ είναι βάση του V εάν και μόνον εάν κάθε διάνυσμα $v \in V$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός

$$v = a_1 \cdot v_1 \dotplus \cdots \dotplus a_k \cdot v_k$$

όπου $v_1,\,\ldots,\,v_k\ \in \mathcal{B}$ και $a_1,\,\ldots,\,a_k \in \mathbb{K}$.

Εάν ένας διανυσματικός χώρος V έχει μία πεπερασμένη βάση $\mathcal{B} = \{v_1,\,\ldots,\,v_n\}$, τότε κάθε άλλη βάση έχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Αυτός ο αριθμός ονομάζεται **διάσταση** του V και συμβολίζεται $\dim V = n$.

Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, υποθέτουμε οτι ο V έχει πεπερασμένη διάσταση n και επιλέγουμε μία βάση $\mathcal{B} = \{v_1,\,\ldots,\,v_n\}$. Τότε κάθε στοιχείο $v \in V$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο

$$v = a_1 \cdot v_1 \dotplus \cdots \dotplus a_n \cdot v_n\,.$$

Οι συντελεστές $a_1,\,\ldots,\,a_n$ είναι στοιχεία του $\mathbb{K}$. Το διάνυσμα $(a_1,\,\ldots,\,a_n) \in \mathbb{K}^n$ ονομάζεται **διάνυσμα συντεταγμένων** του v ως προς τη βάση $\mathcal{B}$. Η αντιστοιχία

$$v \longleftrightarrow (a_1,\,\ldots,\,a_n)$$

ανάμεσα στα διανύσματα του V και στα διανύσματα του $\mathbb{K}^n$ είναι αμφιμονοσήμαντη. Επί πλέον, εάν w είναι ένα άλλο διάνυσμα του V με διάνυσμα συντεταγμένων $(b_1, \ldots, b_n)$, δηλαδή εάν $w = b_1 \cdot v_1 \dotplus \cdots \dotplus b_n \cdot v_n$, τότε το διάνυσμα $v \dotplus w$ έχει ως διάνυσμα συντεταγμένων το άθροισμα $(a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n)$ των $(a_1, \ldots, a_n)$ και $(b_1, \ldots, b_n)$ και εάν $c \in \mathbb{K}$, το διάνυσμα $c \cdot v$ έχει ως διάνυσμα συντεταγμένων το γινόμενο $(ca_1, \ldots, ca_n)$. Με αυτόν τον τρόπο, η επιλογή μίας βάσης για το χώρο V μας επιτρέπει να μετατρέψουμε οποιοδήποτε πρόβλημα εκφράζεται μέσω γραμμικών συνδυασμών στο διανυσματικό χώρο V, σε ένα πρόβλημα στον $\mathbb{K}^n$, για την επίλυση του οποίου μπορούμε να εφαρμόσουμε μεθόδους ανάλογες με αυτές που έχουμε ήδη αναπτύξει στο $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα 2.25 Στο διανυσματικό χώρο $\mathcal{M}_{m,n}$ όλων των $m \times n$ πινάκων, θεωρούμε τους πίνακες S_{ij} για $i = 1, \ldots, m$ και $j = 1, \ldots, n$, οι οποίοι έχουν 1 στη θέση (i, j) και 0 σε όλες τις άλλες θέσεις. Το σύνολο

$$\mathcal{E} = \{S_{ij} \in \mathcal{M}_{m,n} : i = 1, \ldots, m, \text{ και } j = 1, \ldots, n\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο: ο γραμμικός συνδυασμός $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} S_{ij}$ έχει τον αριθμό a_{ij} στη θέση (i, j). Εάν είναι ίσος με τον μηδενικό πίνακα, τότε κάθε a_{ij} είναι ίσο με 0. Προφανώς κάθε $m \times n$ πίνακας γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των S_{ij}. Συμπεραίνουμε οτι το σύνολο $\mathcal{E}$ αποτελεί μία βάση του $\mathcal{M}_{m,n}$. Αυτή η βάση έχει mn στοιχεία, και συνεπώς $\dim \mathcal{M}_{m,n} = mn$.

Παράδειγμα 2.26 Στο διανυσματικό χώρο των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με 3, το σύνολο των πολυωνύμων $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2$ και $p_3(x) = x^3$ αποτελεί μία βάση $\mathcal{B}$. Πράγματι, κάθε πολυώνυμο $q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός

$$q(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + a_3 p_3(x)$$

και το $q(x)$ είναι ίσο με το μηδενικό πολυώνυμο εάν και μόνον εάν όλοι οι συντελεστές a_0, a_1, a_2 και a_3 είναι ίσοι με μηδέν. Το διάνυσμα συντεταγμένων του πολυωνύμου $q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ ως προς αυτή τη βάση είναι απλώς η διατεταγμένη τετράδα (a_0, a_1, a_2, a_3).

Υποθέτουμε οτι θέλουμε να ελέγξουμε εάν τα πολυώνυμα

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 + 2x + x^3 \\ q(x) &= 3x + x^2 + 2x^3 \\ r(x) &= 2 + x - x^2 \\ s(x) &= -x + 2x^2 - x^3 \end{aligned}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αρκεί να ελέγξουμε εάν τα διανύσματα συντεταγμένων των τεσσάρων πολυωνύμων ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε τις γνωστές μεθόδους στον πίνακα με στήλες τα διανύσματα συντεταγμένων,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, στη διαδικασία της απαλοιφής βρίσκουμε μόνον τρείς οδηγούς, και συμπεραίνουμε οτι τα τέσσερα πολυώνυμα είναι γραμμικά εξαρτημένα. Επιλύοντας το σύστημα $Ax = 0$ μπορούμε να βρούμε μη τετριμμένο γραμμικό συνδυασμό των τεσσάρων πολυωνύμων που να είναι ίσος με το μηδενικό πολυώνυμο.

Κεφάλαιο 3

Πίνακες και Γραμμικές Απεικονίσεις

Γραμμικές απεικονίσεις

Οταν πολλαπλασιάζουμε ένα διάνυσμα x με ένα πίνακα A παίρνουμε ένα καινούργιο διάνυσμα Ax. Εάν $x \in \mathbb{R}^n$ και ο πίνακας είναι $m \times n$, παίρνουμε ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^m$. Ετσι μπορούμε στον πίνακα A να αντιστοιχίσουμε μια απεικόνιση L_A από το χώρο $\mathbb{R}^n$ στο χώρο $\mathbb{R}^m$.

$$L_A \, : \, \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \, : \, x \mapsto Ax \, .$$

Παράδειγμα 3.1 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} .$$

Για κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^2$, $Ax = cx$. Κάθε διάνυσμα διαστέλλεται με το συντελεστή c. Εάν $c > 1$, το διάνυσμα γίνεται μεγαλύτερο, εάν $0 < c < 1$, το διάνυσμα γίνεται μικρότερο. Τέλος εάν $c < 0$, το διάνυσμα αλλάζει φορά.

Παράδειγμα 3.2 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Για κάθε διάνυσμα $x = (u, \, v) \in \mathbb{R}^2$, $Ax = (-v, \, u)$. Πολλαπλασιασμός με αυτόν τον πίνακα περιστρέφει το επίπεδο γύρω από το 0, κατά μια ορθή γωνία.

Παράδειγμα 3.3 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Για κάθε διάνυσμα $x = (u, \, v) \in \mathbb{R}^2$, $Ax = (v, \, u)$. Πολλαπλασιασμός με αυτόν τον πίνακα ανακλά το επίπεδο ως προς την ευθεία $u = v$.

Παράδειγμα 3.4 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Για κάθε διάνυσμα $x = (u, \, v) \in \mathbb{R}^2$, $Ax = (u, \, 0)$. Πολλαπλασιασμός με αυτόν τον πίνακα προβάλλει το επίπεδο στον u-άξονα.

Τί είδους απεικονίσεις μπορούν να προκύψουν από πολλαπλασιασμό με ένα πίνακα; Εύκολα μπορούμε να βρούμε κάποιες ιδιότητες.

1. Το 0 πρέπει να απεικονίζεται στο 0: $L_A(0) = 0$, εφόσον $A0 = 0$.

2. Πολλαπλάσια ενός διανύσματος πρέπει να απεικονίζονται στα αντίστοιχα πολλαπλάσια της εικόνας του διανύσματος: $L_A(cx) = c\, L_A(x)$, εφόσον $A(cx) = c(Ax)$.

3. Το άθροισμα δύο διανυσμάτων απεικονίζεται στο άθροισμα των εικόνων των δύο διανυσμάτων: $L_A(x + y) = L_A(x) + L_A(y)$, εφόσον $A(x + y) = Ax + Ay$.

Απεικονίσεις που έχουν αυτές τις ιδιότητες ονομάζονται **γραμμικές απεικονίσεις** ή **γραμμικοί μετασχηματισμοί**.

Ορισμός. Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι **γραμμική απεικόνιση** εάν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και κάθε $c \in \mathbb{R}$,

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ και

2. $f(cx) = c\, f(x)$.

Γενικότερα, εάν V και W είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$ και του $\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα, μία απεικόνιση $f : V \to W$ είναι γραμμική εάν ικανοποιούνται οι παραπάνω συνθήκες για κάθε $v \in V$.

Είδαμε οτι για κάθε $m \times n$ πίνακα A, η απεικόνιση L_A είναι γραμμική. Θα δείξουμε τώρα οτι, αντίστροφα, κάθε γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ αντιστοιχεί σε ένα πίνακα. Υπενθυμίζουμε οτι εάν $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ είναι οι στήλες του πίνακα A, τότε

$$A \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = u_1\kappa_1 + \cdots + u_n\kappa_n\,.$$

Πρόταση 3.1 *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και τον πίνακα A με στήλες τα διανύσματα $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$, όπου $e_1, e_2, \ldots, e_n$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Τότε $f = L_A$.*

Απόδειξη. Εστω $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Τότε $u = u_1e_1 + u_2e_2 + \cdots + u_ne_n$. Από γραμμικότητα,

$$\begin{aligned} f(u) &= f(u_1e_1 + \cdots + u_ne_n) \\ &= u_1f(e_1) + \cdots + u_nf(e_n) \\ &= A \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Η Πρόταση 3.1 μπορεί να γενικευθεί ως εξής. Οι τιμές μίας γραμμικής απεικόνισης $f : V \to W$ στα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ μίας βάσης του πεδίου ορισμού V, καθορίζουν την απεικόνιση: κάθε $v \in V$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης, $v = c_1v_1 + \cdots + c_kv_k$, και τότε η γραμμικότητα της f προσδιορίζει το διάνυσμα $f(v)$,

$$f(v) = c_1f(v_1) + \cdots + c_kf(v_k)\,.$$

Παράδειγμα 3.5 Εάν $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ είναι γραμμική απεικόνιση, και $f(1, 2) = (1, 1, 2)$ ενώ $f(0, 1) = (0, 1, 1)$, τότε μπορούμε να βρούμε τον 3×2 πίνακα που παριστάνει την f. Πρέπει να ικανοποιούνται οι σχέσεις

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

τις οποίες μπορούμε να γράψουμε μαζί ως

$$A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αλλά τα διανύσματα $(1, 2)$ και $(0, 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^2$) και συνεπώς ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος. Πολλαπλασιάζουμε από τα δεξιά με το A^{-1}, και έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Παράδειγμα 3.6 Θα δούμε κάποιες απεικονίσεις που δεν είναι γραμμικές:

1. $g(x) = 2x + 1$. Αν και το γράφημα αυτής της συνάρτησης είναι μια ευθεία, δεν ικανοποιεί τις συνθήκες του ορισμού: $g(u+v) = 2u+2v+1 \neq (2u+1)+(2v+1) = g(u) + g(v)$.
2. $(u_1, u_2) \mapsto (2u_2 + 1, 0)$.
3. $(x, y) \mapsto (xy, x, y)$.

Η προσεταιριστική ιδιότητα του γινομένου πινάκων εξασφαλίζει οτι η σύνθεση δύο γραμμικών απεικονίσεων είναι γραμμική και αντιστοιχεί στο γινόμενο των πινάκων.

Πρόταση 3.2 *Εάν A, B είναι πίνακες, $m \times n$ και $n \times p$ αντίστοιχα, ώστε να ορίζεται το γινόμενο $C = AB$, τότε ισχύει*

$$L_A \circ L_B = L_C.$$

Απόδειξη. Πράγματι, $L_C(v) = Cv = (AB)v = A(Bv) = L_A(L_B(v)) = L_A \circ L_B(v)$. □

Άσκηση 3.1 Βρείτε την εικόνα του γενικού σημείου $(v_1, \ldots, v_n)$ του πεδίου ορισμού, για τις απεικονίσεις που ορίζονται με πολλαπλασιασμό από τα αριστερά με τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3.2 Βρείτε τον πίνακα A στον οποίο αντιστοιχεί η γραμμική απεικόνιση

$$f(x, y) = (3x + y,\, 2y,\, x - y)\,.$$

Άσκηση 3.3 Δείξτε οτι οι παρακάτω απεικονίσεις δεν είναι γραμμικές.

α′. $g(x,\, y,\, z) = (3x,\, y^2)$.

β′. $h(u,\, v,\, w) = (v + 2,\, 4u)$.

Άσκηση 3.4 Βρείτε τον πίνακα που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό ο οποίος:

α′. Απεικονίζει τα διανύσματα $(1,\, 0)$ και $(0,\, 1)$ στα διανύσματα $(1,\, 3)$ και $(7,\, 1)$, αντίστοιχα.

β′. Απεικονίζει τα διανύσματα $(1,\, 0,\, 0)$, $(0,\, 1,\, 0)$ και $(0,\, 0,\, 1)$ στα διανύσματα $(1,\, 5,\, 2,\, 9)$, $(2,\, 6,\, 4,\, 7)$ και $(\sqrt{3},\, 3,\, 7,\, 1)$, αντίστοιχα.

Άσκηση 3.5 Εάν οι απεικονίσεις f και g είναι γραμμικές, και $f(u) = g(u) = u$, τότε $f \circ g(u)$ είναι ίσο με u ή u^2;

Άσκηση 3.6 Ποιές από τις ακόλουθες απεικονίσεις ικανοποιούν τη σχέση $f(u + v) = f(u) + f(v)$, και ποιές ικανοποιούν τη σχέση $f(cv) = cf(v)$, όπου $v = (v_1,\, v_2,\, v_3)$;

α′. $f(v) = v/||v||$

β′. $f(v) = (v_1,\, 2v_2,\, 3v_3)$

γ′. $f(v) = v_1 + v_2 + v_3$

δ′. $f(v) =$ η μεγαλύτερη συνιστώσα του v.

Άσκηση 3.7 Ποίες από τις ακόλουθες απεικονίσεις δεν είναι γραμμικές, όπου $v = (v_1,\, v_2)$;

α′. $g(v) = (v_2,\, v_1)$

β′. $g(v) = (0,\, v_1)$

γ′. $g(v) = (v_1,\, v_1)$

δ′. $g(v) = (0,\, 1)$

Άσκηση 3.8 Δείξτε οτι εάν $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι γραμμική απεικόνιση, τότε f^2 είναι γραμμική απεικόνιση.

Άσκηση 3.9 Δείξτε οτι εάν η γραμμική απεικόνιση $f : V \to W$ είναι αντιστρέψιμη (δηλαδή αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση) τότε η αντίστροφή απεικόνιση $f^{-1} : W \to V$ είναι επίσης γραμμική

Γραμμικές απεικονίσεις του επιπέδου

Στα παραδείγματα που δώσαμε στην αρχή του κεφαλαίου θεωρήσαμε την περιστροφή του επιπέδου κατά μία ορθή γωνία, την ανάκλαση στην ευθεία $x = y$, και την προβολή στον x-άξονα. Όμως μπορούμε να έχουμε περιστροφές κατά αυθαίρετες γωνίες, και προβολές ή ανακλάσεις σε οποιαδήποτε ευθεία που περιέχει το 0. Όλες αυτές οι απεικονίσεις είναι γραμμικές. Θα βρούμε τους πίνακας που τις αναπαριστούν, χρησιμοποιώντας την κανονική βάση $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ του $\mathbb{R}^2$.

Η **περιστροφή κατά γωνία** ϑ απεικονίζει το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ στο διάνυσμα $\begin{bmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{bmatrix}$, και το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ στο διάνυσμα $\begin{bmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{bmatrix}$, (δες σημειώσεις Αναλυτικής Γεωμετρίας).

Άρα ο πίνακας Q_ϑ που παριστάνει την περιστροφή του επιπέδου κατά γωνία ϑ, είναι ο

$$Q_\vartheta = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

Η γεωμετρική διαίσθηση μας λέει οτι η περιστροφή κατά γωνία ϑ είναι αντιστρέψιμη, και έχει αντίστροφο την περιστροφή κατά γωνία $-\vartheta$.

Παρατηρούμε οτι

$$Q_{-\vartheta} = \begin{bmatrix} \cos(-\vartheta) & -\sin(-\vartheta) \\ \sin(-\vartheta) & \cos(-\vartheta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

και πράγματι

$$Q_\vartheta\, Q_{-\vartheta} = \begin{bmatrix} \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta & \cos\vartheta\sin\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta \\ \sin\vartheta\cos\vartheta - \cos\vartheta\sin\vartheta & \sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3.10 Επαληθεύσατε οτι δύο περιστροφές κατά γωνία ϑ ισοδυναμούν με μία περιστροφή κατά γωνία 2ϑ, δηλαδή τη

$$Q_\vartheta^2 = Q_{2\vartheta}\,,$$

και οτι η περιστροφή κατα γωνία ϑ και μετά κατά γωνία φ, ισοδυναμεί με την περιστροφή κατά γωνία $\vartheta + \varphi$, δηλαδή οτι

$$Q_\varphi\, Q_\vartheta = Q_{(\vartheta+\varphi)}.$$

Η **προβολή** του διανύσματος $(1,\,0)$ στην ευθεία που σχηματίζει γωνία ϑ με τον x-άξονα (ας ονομάσουμε αυτή την ευθεία τον ϑ-άξονα) δίδει ένα διάνυσμα συγγραμμικό με το $(\cos\vartheta,\,\sin\vartheta)$, αλλά με μήκος $\cos\vartheta$. Δηλαδή το $(1,\,0)$ προβάλλεται στο διάνυσμα $(\cos^2\vartheta,\,\cos\vartheta\sin\vartheta)$. Παρόμοια, το διάνυσμα $(0,\,1)$ προβάλλεται στο διάνυσμα $(\sin\vartheta\,\cos\vartheta,\,\sin^2\vartheta)$.

Ο πίνακας που παριστάνει την *προβολή στον ϑ-άξονα* είναι λοιπόν ο

$$P_\vartheta = \begin{bmatrix} \cos^2\vartheta & \cos\vartheta\sin\vartheta \\ \cos\vartheta\sin\vartheta & \sin^2\vartheta \end{bmatrix}.$$

Αυτός ο πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος. Τα σημεία του $\left(\vartheta + \dfrac{\pi}{2}\right)$-άξονα προβάλλονται στο 0. Ο μηδενοχώρος του πίνακα αποτελείται από τα πολλαπλάσια του διανύσματος

$$\left(\cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right),\, \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-\sin\vartheta,\, \cos\vartheta)\,.$$

Η γεωμετρική διαίσθηση μας λέει οτι εάν προβάλλουμε δύο φορές, το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με το να προβάλλουμε μία φορά:

$$(P_\vartheta)^2 = \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} c^2(c^2+s^2) & cs(c^2+s^2) \\ cs(c^2+s^2) & s^2(c^2+s^2) \end{bmatrix} = P_\vartheta.$$

Η **ανάκλαση στον ϑ-άξονα**, αφήνει αμετάβλητα τα σημεία του ϑ-άξονα, και συνεπώς το διάνυσμα $(\cos\vartheta,\, \sin\vartheta)$ απεικονίζεται στον εαυτό του. Ένα διάνυσμα κάθετο στον ϑ-άξονα απεικονίζεται στο αντίθετο του, συνεπώς το $(-\sin\vartheta,\, \cos\vartheta)$ απεικονίζεται στο $(\sin\vartheta,\, -\cos\vartheta)$. Άρα ο πίνακας H_ϑ που παριστάνει την ανάκλαση ικανοποιεί

$$H_\vartheta \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix}$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} H_\vartheta &= \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2c^2-1 & 2cs \\ 2cs & 2s^2-1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Άσκηση 3.11 Επαληθεύσατε τον παραπάνω υπολογισμό του πίνακα H_ϑ.

Η γεωμετρική διαίσθηση μας λέει οτι δύο ανακλάσεις στον ίδιο άξονα επαναφέρουν την αρχική εικόνα, δηλαδή $(H_\vartheta)^2 = I$. Μπορούμε να επαληθεύσουμε αυτή την ιδιότητα με απ' ευθείας υπολογισμό.

Εναλλακτικά, παρατηρούμε οτι $H_\vartheta = 2P_\vartheta - I$, και συνεπώς έχουμε $(H_\vartheta)^2 = (2P_\vartheta - I)^2 = 4P_\vartheta^2 - 4P_\vartheta + I = I$ αφού $P_\vartheta^2 = P_\vartheta$

Άσκηση 3.12 Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ παριστάνει μία **διαστολή** (stretching) στη διεύθυνση του $x-$άξονα. Σχεδιάστε τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$, και γύρω του σημεία $(2x,\, y)$ που προκύπτουν από πολλαπλασιασμό με τον πίνακα A. Τι σχήμα έχει η καμπύλη που προκύπτει;

Άσκηση 3.13 Ποίος πίνακας παριστάνει την απεικόνιση που περιστρέφει κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ κατά μία ορθή, και στη συνέχεια προβάλλει πάνω στον $x-$άξονα; Ποιός πίνακας παριστάνει την απεικόνιση που προβάλλει στον $x-$άξονα και στη συνέχεια προβάλλει πάνω στον $y-$άξονα;

Άσκηση 3.14 Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ παριστάνει ένα μετασχηματισμό **στρέβλωσης** (shearing), η οποία αφήνει τον $y-$άξονα αμετάβλητα. Σχεδιάστε το αποτέλεσμα αυτής της απεικόνισης στον $x-$άξονα, σημειώνοντας την εικόνα των σημείων $(1,\, 0)$, $(2,\, 0)$ και $(-1,\, 0)$, καθώς και την εικόνα όλου του $x-$άξονα.

Άσκηση 3.15 Ποιοί 3×3 πίνακες παριστάνουν τις ακόλουθες απεικονίσεις;

α'. προβολή στο $(x,\, y)$-επίπεδο.

β'. ανάκλαση στο $(x,\, y)$-επίπεδο.

γ′. την απεικόνιση που περιστρέφει το (x, y)-επίπεδο κατά μία ορθή γωνία, και αφήνει τα σημεία του z-άξονα αμετάβλητα.

δ′. την απεικόνιση που περιστρέφει το (x, y)-επίπεδο, κατόπιν το (x, z)-επίπεδο και κατόπιν το (y, z)-επίπεδο, όλα κατά μία ορθή γωνία.

ε′. την απεικόνιση που κάνει τις ίδιες τρείς περιστροφές, αλλά κατά γωνία ίση με δύο ορθές.

Άσκηση 3.16 Περιστροφές στο χώρο προσδιορίζονται από τον άξονα, του οποίου τα σημεία παραμένουν αμετάβλητα, και τη γωνία περιστροφής. Βρείτε τον άξονα και τη γωνία περιστροφής της απεικόνισης που απεικονίζει το (x_1, x_2, x_3) στο (x_2, x_3, x_1).

Άσκηση 3.17 Θεωρήστε την ‘‘κυκλική’’ απεικόνιση $g(v_1, v_2, v_3) = (v_3, v_1, v_2)$. Βρείτε το $g(g(g(v)))$ και το $g^{100}(v)$.

Άσκηση 3.18 Ποιος πίνακας παριστάνει την απεικόνιση που στέλνει το $(1, 0)$ στο $(2, 5)$ και το $(0, 1)$ στο $(1, 3)$; Ποιος πίνακας στέλνει το $(2, 5)$ στο $(1, 0)$ και το $(1, 3)$ στο $(0, 1)$; Γιατί δεν υπάρχει πίνακας που να απεικονίζει το $(2, 6)$ στο $(1, 0)$ και το $(1, 3)$ στο $(0, 1)$;

Άσκηση 3.19 Θεωρήστε όλα τα διανύσματα x στο τετράγωνο $\{(x_1, x_2) : 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1\}$ και ένα 2×2 πίνακα A.

α′. Τι σχήμα έχει η εικόνα του τετραγώνου από την $x \mapsto Ax$;

β′. Για ποιούς πίνακες A είναι η εικόνα τετράγωνο;

γ′. Για ποιούς πίνακες A είναι η εικόνα ένα ευθύγραμμο τμήμα;

δ′. Για ποιούς πίνακες A έχει η εικόνα εμβαδόν ίσο με 1;

Εικόνα και αντίστροφη εικόνα. Αριστερό και δεξιό αντίστροφο.

Πρόταση 3.3 *Θεωρούμε τον $m \times n$ πίνακα A, και την αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.*

1. *Εάν V είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, τότε η* εικόνα *του V μέσω της απεικόνισης L_A, $L_A(V) = \{L_A(v) \,|\, v \in V\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.*
2. *Εάν W είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, τότε η* αντίστροφη εικόνα *του W μέσω της απεικόνισης L_A, $L_A^{-1}(W) = \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, L_A(v) \in W\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το 1, θεωρούμε $w_1, w_2 \in L_A(V)$ και $c \in \mathbb{R}$, και πρέπει να δείξουμε οτι $w_1 + w_2$ και $cw_1 \in L_A(V)$. Εφόσον $w_1 \in L_A(V)$, υπάρχει $v_1 \in V$ τέτοιο ώστε $L_A(v_1) = w_1$, και ανάλογα για το w_2. Εφόσον V είναι διανυσματικός υπόχωρος, $v_1 + v_2 \in V$ και $L_A(v_1 + v_2) = L_A(v_1) + L_A(v_2) = w_1 + w_2$, άρα $w_1 + w_2 \in L_A(V)$. Παρόμοια $cv_1 \in V$ και $L_A(cv_1) = cL_A(v_1) = cw_1$. Αρα $cw_1 \in L_A(V)$.

Για το 2, θεωρούμε v_1, $v_2 \in L_A^{-1}(W)$ και $c \in \mathbb{R}$, και πρέπει να δείξουμε οτι $v_1 + v_2$ και $cv_1 \in L_A^{-1}(W)$. Υπάρχουν $w_1 \in W$ τέτοιο ώστε $L_A(v_1) = w_1$, και ανάλογα για το w_2. Αλλά τότε $L_A(v_1 + v_2) = w_1 + w_2 \in W$, και $L_A(cv_1) = cw_1 \in W$, άρα $v_1 + v_2$ και cv_1 ανήκουν στο $L_A^{-1}(W)$.

□

Το επόμενο ερώτημα που θέλουμε να εξετάσουμε είναι υπό ποίες συνθήκες είναι η απεικόνιση L_A ενεικονική, επεικονική ή αμφιμονοσήμαντη.

Η L_A είναι ενεικονική εάν για κάθε v_1, $v_2 \in \mathbb{R}^n$, η υπόθεση $L_A(v_1) = L_A(v_2)$ συνεπάγεται οτι $v_1 = v_2$. Αυτό ισχύει εάν και μόνον εάν ισχύει η συνεπαγωγή $Av_1 = Av_2 \Rightarrow v_1 = v_2$, ή ισοδύναμα εάν $A(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0$. Δηλαδή η L_A είναι ενεικονική, εάν και μόνον εάν, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$, δηλαδή εάν και μόνον εάν η μοναδική λύση της εξίσωσης $Ax = 0$ είναι η τετριμμένη, $x = 0$. Αλλά γνωρίζουμε οτι η ομογενής εξίσωση έχει μοναδική λύση την τετριμμένη, ακριβώς όταν δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές, δηλαδή όταν η τάξη του πίνακα είναι $r = n$.

Η L_A είναι επεικονική εάν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$, υπάρχει $v \in \mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε $L_A(v) = b$, δηλαδή όταν η εξίσωση $Ax = b$ έχει λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$. Αυτό ισχύει ακριβώς όταν ο χώρος στηλών του A είναι όλος ο $\mathbb{R}^m$, δηλαδή όταν η τάξη του πίνακα είναι $r = m$.

Εχουμε αποδείξει την ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 3.4 *Εάν A είναι $m \times n$ πίνακας, τότε η απεικόνιση L_A είναι*

1. *ενεικονική, εάν και μόνον εάν $r = n$,*
2. *επεικονική, εάν και μόνον εάν $r = m$, και*
3. *αμφιμονοσήμαντη εάν και μόνον εάν $r = m = n$.*

□

Μία απεικόνιση $f : N \to M$ έχει **αριστερό αντίστροφο** $g : M \to N$, τέτοιο ώστε $g \circ f = \mathrm{id}_N$, εάν και μόνον εάν η f είναι ενεικονική, και έχει **δεξιό αντίστροφο** $h : M \to N$, τέτοιο ώστε $f \circ h = \mathrm{id}_M$, εάν και μόνον εάν η f είναι επεικονική, (δες σημειώσεις του μαθήματος Θεμέλια των Μαθηματικών).

Ορισμός. Εάν A είναι ένας $m \times n$ πίνακας,

1. ο $n \times m$ πίνακας B είναι **αριστερός αντίστροφος** του A, εάν $BA = I_n$.
2. ο $n \times m$ πίνακας C είναι **δεξιός αντίστροφος** του A, εάν $AC = I_m$.

Πρόταση 3.5 *Ο $m \times n$ πίνακας A, έχει*

1. *αριστερό αντίστροφο εάν και μόνον εάν η τάξη $r = n$.*
2. *δεξιό αντίστροφο εάν και μόνον εάν η τάξη $r = m$.*

Απόδειξη. Πολλαπλασιασμός με τον αριστερό ή το δεξιό αντίστροφο πίνακα, ορίζει το αριστερό ή το δεξιό αντίστροφο της συνάρτησης L_A, αντίστοιχα. Από την προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε οτι η συνθήκη $r = n$ ή $r = m$ είναι αναγκαία. Θα ολοκληρώσουμε την απόδειξη βρίσκοντας συγκεκριμένο αριστερό ή δεξιό αντίστροφο όταν ικανοποιείται η αντίστοιχη συνθήκη.

Εάν η τάξη του $m \times n$ πίνακα A είναι $r = n$, τότε οι στήλες του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, και από το Λήμμα 4.7, το ίδιο ισχύει για τις στήλες του τετραγωνικού πίνακα

A^TA. Άρα ο A^TA είναι αντιστρέψιμος. Θέτουμε $B = (A^TA)^{-1}A^T$, και έχουμε $BA = \left[(A^TA)^{-1}A^T\right] A = (A^TA)^{-1}(A^TA) = I_n$.

Είναι φανερό οτι εάν η τάξη του A είναι $r = m$, τότε η τάξη του A^T είναι ίση με τον αριθμό των στηλών του, και από το Λήμμα, ο πίνακας $(A^T)^TA^T = AA^T$ είναι αντιστρέψιμος. Θέτουμε $C = A^T(AA^T)^{-1}$, και έχουμε $AC = A\left[A^T(AA^T)^{-1}\right] = (AA^T)(AA^T)^{-1} = I_m$.

□

Παρατηρούμε οτι εάν $m \neq n$ το αριστερό και το δεξιό αντίστροφο δεν είναι μοναδικό. Για παράδειγμα, εάν σε κάθε στήλη του πίνακα C προσθέσουμε ένα διάνυσμα του μηδενόχωρου του A, έχουμε πάλι ένα δεξιό αντίστροφο του A.

Στην περίπτωση ενός τετραγωνικού πίνακα A, $m = n$, και τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η τάξη του πίνακα είναι $r = n$.

2. Ο πίνακας A έχει αριστερό αντίστροφο.

3. Ο πίνακας A έχει δεξιό αντίστροφο.

4. Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 3.20 Εάν $V = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2\}$, βρείτε (μία βάση για) τους διανυσματικούς υπόχωρους $L_A(V)$ και $L_A^{-1}(V)$, για τον πίνακα

α′. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

β′. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Άσκηση 3.21 Ελέγξτε εάν οι παρακάτω πίνακες έχουν αριστερό ή δεξιό αντίστροφο, και υπολογίστε το

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3.22 Υποθέστε οτι αναζητούμε τον δεξιό αντίστροφο του πίνακα A. Τότε $AB = I$ οδηγεί στην $A^TAB = A^T$ ή $B = (A^TA)^{-1}A^T$. Ο B όμως ικανοποιεί την $BA = I$ και είναι αριστερός αντίστροφος. Ποιό βήμα είναι λάθος στον παραπάνω συλλογισμό;

Άσκηση 3.23 Δείξτε οτι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με

$$\begin{aligned} \varphi(1,1,\ 1) &= (1,0,1) \\ \varphi(0,1,-1) &= (2,1,3) \\ \varphi(1,2,1) &= (1,1,2)\,. \end{aligned}$$

α′. Βρείτε τον πίνακα A της παραπάνω απεικόνισης.

β′. Δείξτε οτι η εικόνα $\varphi(\mathbb{R}^3)$ της φ είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$.

γ′. Βρείτε την αντίστροφη εικόνα του $\{0\}$ μέσω της απεικόνισης φ.

δ′. Βρείτε έναν υπόχωρο V του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 2 με την ιδιότητα $\varphi(V) = \varphi(\mathbb{R}^3)$.

ε′. Βρείτε ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $\varphi(v) = (6,\, -1,\, 5)$.

ϛ′. Βρείτε έναν υπόχωρο W του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 2 με την ιδιότητα ο $\varphi(W)$ να είναι η ευθεία στον $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από το διάνυσμα $(6,\, -1,\, 5)$.

Άσκηση 3.24 Έστω $\varphi = \varphi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται από τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

α′. Δείξτε οτι η απεικόνιση είναι επί.

β′. Βρείτε ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$ με την ιδιότητα $\varphi(v) = (-2,\, 5)$.

γ′. Βρείτε την αντίστροφη εικόνα του $\{0\}$ μέσω της απεικόνισης φ.

δ′. Βρείτε μονόπλευρο αντίστροφο (αριστερό ή δεξιό;) της γραμμικής απεικόνισης φ.

Αλλαγή βάσης

Έχουμε δεί οτι εάν έχουμε μία διατεταγμένη βάση $\mathcal{B} = \{v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_n\}$ σε κάποιο διανυσματικό χώρο V, τότε κάθε διάνυσμα $w \in V$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός $w = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$, και συνεπώς αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό διάνυσμα συντεταγμένων $(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Αυτή την ιδέα μπορούμε να την εφαρμόσουμε στον ίδιο τον $\mathbb{R}^n$. Ως προς την κανονική βάση $e_1 = (1,\, 0,\, \ldots,\, 0)$, …, $e_n = (0,\, \ldots,\, 0,\, 1)$, κάθε διάνυσμα έχει ως διάνυσμα συντεταγμένων τον εαυτό του!

$$w = (a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n) = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n\,.$$

Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε άλλες βάσεις, ως προς τις οποίες το διάνυσμα συντεταγμένων του w θα είναι διαφορετικό από το w.

Παράδειγμα 3.7 Στο $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε τη βάση $v_1 = (1,\, 1)$, $v_2 = (-1,\, 1)$. Ποιό είναι το διάνυσμα συντεταγμένων του $(2,\, 3)$ ως προς αυτή τη βάση; Θα είναι το διάνυσμα $(x_1,\, x_2)$ για το οποίο

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} &= x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε πώς να βρούμε το $(x_1,\, x_2)$, λύνοντας την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Γενικότερα, για να βρούμε το διάνυσμα συντεταγμένων του $w \in \mathbb{R}^n$ ως προς τη βάση $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ σχηματίζουμε τον πίνακα B με στήλες τα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ και λύνουμε την εξίσωση

$$Bx = w\,.$$

Η επιλογή της κατάλληλης βάσης είναι ιδιαίτερα σημαντική όταν εξετάζουμε τον πίνακα που παριστάνει μία γραμμική απεικόνιση. Θεωρούμε τον τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα A και τη γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ που ορίζεται με $L(w) = Aw$. Εάν $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ είναι μία βάση του $\mathbb{R}^n$, τότε το διάνυσμα συντεταγμένων του w ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι το $x = B^{-1}w$, όπου B είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα της βάσης $\mathcal{B}$, ενώ το διάνυσμα συντεταγμένων του $L(w)$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι το $x' = B^{-1}(Aw)$. Αντικαθιστώντας το $w = Bx$ έχουμε

$$x' = (B^{-1}AB)x\,.$$

Δηλαδή ο πίνακας $B^{-1}AB$ παριστάνει την απεικόνιση $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.

Παράδειγμα 3.8 Θεωρούμε την απεικόνιση $L(x, y) = (5x + y, x + 5y)$. Ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ αυτή παριστάνεται από τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, αφού $L(x, y) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Θεωρούμε τη βάση $\mathcal{B}$ που αποτελείται από τα διανύσματα

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα της $\mathcal{B}$ είναι ο

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και ο πίνακας που παριστάνει την L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι ο

$$\begin{aligned} B^{-1}AB &= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε οτι ο πίνακας $B^{-1}AB$ είναι διαγώνιος. Αυτό σημαίνει οτι μπορούμε να περιγράψουμε πολύ καλύτερα την απεικόνιση L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ παρά ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$. Το διάνυσμα συντεταγμένων του v_1 ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι το $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, και το διάνυσμα συντεταγμένων του $L(v_1)$ είναι το

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix},$$

δηλαδή η απεικόνιση L πολλαπλασιάζει επί 6 το διάνυσμα v_1. Παρόμοια, αφού

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

η απεικόνιση L πολλαπλασιάζει επί 4 το v_2.

Στο Κεφάλαιο 6 θα δούμε πώς βρίσκουμε την καταλληλότερη βάση για να παραστήσουμε μία απεικόνιση. Προς το παρόν καταγράφουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα ως ένα Θεώρημα.

Θεώρημα 3.6 *Έστω $n \times n$ πίνακας A, και $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ η γραμμική απεικόνιση $L(w) = Aw$. Έστω $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ βάση του $\mathbb{R}^n$, και B ο πίνακας με στήλες $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Τότε η γραμμική απεικόνιση L παριστάνεται ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ από τον πίνακα $B^{-1}AB$. Δηλαδή, εάν $w = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ και $L(w) = x_1' v_1 + \cdots + x_n' v_n$ τότε*

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = B^{-1}AB \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3.25 Βρείτε τον πίνακα που παριστάνει τη γραμμική απεικόνιση $L(x, y) = (5x + 2y,\, x + 4y)$,

α′. Ως προς την κανονική βάση $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

β′. Ως προς τη βάση $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Κεφάλαιο 4

Μήκη και ορθές γωνίες

Μήκος διανύσματος

Στο επίπεδο, $\mathbb{R}^2$, βρίσκουμε το μήκος ενός διανύσματος $x = (x_1,\, x_2)$ χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$||x||^2 = x_1^2 + x_2^2\,.$$

Στο χώρο $\mathbb{R}^3$, εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα 2 φορές: εάν $x = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ και $u = (x_1,\, x_2,\, 0)$

$$\begin{aligned} ||x||^2 &= ||u||^2 + x_3^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\,. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του ανάστροφου, αυτό γράφεται

$$||x||^2 = x^T\, x\,.$$

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα $n-1$ φορές, βρίσκουμε το μήκος ενός διανύσματος στο $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} ||x||^2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \\ &= x^T\, x\,. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.1 Το μήκος του διανύσματος $x = (1,\, 2,\, -3)$ είναι $\sqrt{14}$:

$$\|x\|^2 = x^T x = [1\ 2\ -3] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 1^2 + 2^2 + (-3)^2 = 14\,.$$

Ορθογώνια διανύσματα

Εκτός από τα μήκη, θέλουμε να μετράμε και γωνίες μεταξύ διανυσμάτων. Αργότερα θα μιλήσουμε για όλες τις γωνίες, αλλά προς το παρόν μας ενδιαφέρουν οι **ορθές γωνίες**. Πότε είναι δύο διανύσματα $x\,,y$ **ορθογώνια**;

Το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει και αντίστροφα: ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο **μόνον** όταν το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των 2 πλευρών. Μπορούμε να εργαστούμε στο $\mathbb{R}^n$, αλλά στην πραγματικότητα οι μετρήσεις θα είναι μέσα στο επίπεδο που περιέχει το τρίγωνο, δηλαδή μέσα στο διανυσματικό υπόχωρο που παράγεται από τα διανύσματα x και y. Η γωνία $\angle(x,\, y)$ είναι ορθή εάν και μόνον εάν

$$||x||^2 + ||y||^2 = ||x-y||^2\,,$$

δηλαδή εάν και μόνον εάν

$$x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = 0$$

ή

$$x^Ty = 0$$

Πρόταση 4.1 *Δύο διανύσματα x, y του $\mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνια εάν και μόνον εάν το εσωτερικό τους γινόμενο x^Ty είναι 0.*

□

Παράδειγμα 4.2 Το διάνυσμα $x = (2,\, 2,\, -1)$ είναι ορθογώνιο στο $y = (-1,\, 2,\, 2)$:

$$x^Ty = [2\ 2\ -1]\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Ένα διάνυσμα είναι ορθογώνιο στον εαυτό του μόνον εάν έχει μηδενικό μήκος: $x^Tx = 0$. Το μοναδικό τέτοιο διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ είναι το 0.

Πρόταση 4.2 *Εάν τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n$ είναι μη μηδενικά και ορθογώνια μεταξύ τους, τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη. Έστω ένας γραμμικός συνδυασμός $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0$. Παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο με το v_1:

$$v_1^T(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = v_1^T0 = 0$$

Αλλά $v_1^Tv_i = 0$ για κάθε $i \neq 1$, άρα έχουμε

$$v_1^Tc_1v_1 = c_1||v_1||^2 = 0$$

και εφόσον $||v_1|| \neq 0$, έχουμε $c_1 = 0$

Παρόμοια, $c_i = 0$ για κάθε i, και συμπεραίνουμε οτι τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

□

Είναι προφανές οτι δεν ισχύει το αντίστροφο: δυο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα δεν είναι υποχρεωτικά ορθογώνια.

Άσκηση 4.1 Βρείτε τα μήκη και το εσωτερικό γινόμενο των $x = (1,\, 4,\, 0,\, 2)$ και $y = (2,\, -2,\, 1,\, 3)$.

Άσκηση 4.2 Ποία ζεύγη από τα διανύσματα u_1, u_2, u_3, u_4 είναι ορθογώνια;

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},\ u_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix},\ u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},\ u_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 4.3 Δύο ευθείες στο επίπεδο είναι ορθογώνιες όταν το γινόμενο των κλίσεων τους είναι -1. Εφαρμόστε αυτό το κριτήριο στις ευθείες που παράγονται από τα διανύσματα $x = (x_1, x_2)$ και $y = (y_1, y_2)$, οι οποίες έχουν κλίσεις x_2/x_1 και y_2/y_1, για να βρείτε το κριτήριο ορθογωνιότητας των διανυσμάτων, $x^T y = 0$.

Άσκηση 4.4 Πώς γνωρίζουμε οτι η i γραμμή ενός αντιστρέψιμου πίνακα B είναι ορθογώνια στην j στήλη του B^{-1}, εάν $i \neq j$;

Άσκηση 4.5 Δείξτε οτι το διάνυσμα $x - y$ είναι κάθετο στο $x + y$ εάν και μόνον εάν $||x|| = ||y||$. Ποιά ιδιότητα των ρόμβων εκφράζει αυτό το αποτέλεσμα;

Ορθογώνιοι υπόχωροι

Στον $\mathbb{R}^3$, μία ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο όταν σχηματίζει ορθή γωνία με κάθε ευθεία του επιπέδου που την τέμνει.

Ανάλογα, δύο υπόχωροι V και W του χώρου $\mathbb{R}^n$ είναι **ορθογώνιοι** όταν **κάθε** διάνυσμα του V είναι ορθογώνιο σε **κάθε** διάνυσμα του W.

Παρατηρούμε οτι δύο επίπεδα W_1 και W_2 στο $\mathbb{R}^3$ που σχηματίζουν ορθή γωνία **δεν** ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη. Πράγματι, ας θεωρήσουμε μία βάση από δύο ορθογώνια διανύσματα σε κάθε επίπεδο, u_1, v_1 στο W_1, u_2, v_2 στο W_2. Εάν τα W_1 και W_2 ήταν ορθογώνια, τότε θα είχαμε 4 διανύσματα u_1, v_1, u_2, v_2 ορθογώνια μεταξύ τους. Από την Πρόταση 4.2 αυτά θα ήταν γραμμικά ανεξάρτητα. Αλλά στον $\mathbb{R}^3$ δεν υπάρχουν 4 γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

Θα συμβολίζουμε την ορθογωνιότητα δύο γραμμικών υπόχωρων U και V του $\mathbb{R}^n$ με $U \perp V$.

Παράδειγμα 4.3 Θεωρούμε το επίπεδο V που παράγεται από τα διανύσματα $v_1 = (1, 0, 0, 0)$ και $v_2 = (1, 1, 0, 0)$. Το διάνυσμα $w = (0, 0, 4, 5)$ είναι ορθογώνιο προς τα v_1 και v_2. Συνεπώς η ευθεία W που παράγεται από το w είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ ορθογώνιος προς τον V. Αλλά μέσα στο $\mathbb{R}^4$ υπάρχει χώρος για ακόμη έναν υπόχωρο ορθογώνιο στους V και W: το διάνυσμα $z = (0, 0, 5, -4)$ είναι ορθογώνιο προς τα v_1, v_2 και w. Η ευθεία U που παράγεται από το z είναι ορθογώνια προς τους υπόχωρους V και W:

$$U \perp V\,,\; U \perp W\,,\; V \perp W\,.$$

Πρόταση 4.3 *Δίδεται ένας $m \times n$ πίνακας A. Τότε*

1. *Στο $\mathbb{R}^n$ ο χώρος γραμμών του A είναι ορθογώνιος στο μηδενόχωρο του A:*

$$\mathcal{R}(A^T) \perp \mathcal{N}(A)$$

2. *Στο $\mathbb{R}^m$ ο χώρος στηλών του A είναι ορθογώνιος στον αριστερό μηδενόχωρο του A:*

$$\mathcal{R}(A) \perp \mathcal{N}(A^T)\,.$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε την πρώτη περίπτωση, αφού η δεύτερη προκύπτει εξετάζοντας τον ανάστροφο πίνακα A^T.

Θεωρούμε ένα $x \in \mathcal{N}(A)$ και ένα $v \in \mathcal{R}(A^T)$, και θέλουμε να δείξουμε οτι $v^T x = 0$.

Έχουμε $Ax = 0$. Εφόσον $v \in \mathcal{R}(A^T)$, το v είναι γραμμικός συνδυασμός των γραμμών $r_1, \ldots r_m$ του A,

$$v = z_1 r_1 + \cdots + z_m r_m \,,$$

δηλαδή υπάρχει $z \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $v = A^T z$. Έχουμε

$$v^T x = (A^T z)^T x = z^T A x = z^T 0 = 0\,.$$

□

Υπενθυμίζουμε οτι οι διαστάσεις αυτών των χώρων ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\dim \mathcal{R}(A^T) + \dim \mathcal{N}(A) = n \tag{4.1}$$

$$\dim \mathcal{R}(A) + \dim \mathcal{N}(A^T) = m \tag{4.2}$$

Αυτή η παρατήρηση υποδεικνύει οτι ο χώρος γραμμών και ο μηδενόχωρος δεν είναι δύο οποιοιδήποτε ορθογώνιοι υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$: οι δύο υπόχωροι 'γεμίζουν' τον $\mathbb{R}^n$. Ας εξετάσουμε πιο προσεκτικά την κατάσταση. Αν W είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων που είναι ορθογώνια σε όλα τα διανύσματα του χώρου γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$, η Πρόταση 4.3 λέει οτι $\mathcal{N}(A) \subseteq W$. Εύκολα όμως βλέπουμε οτι ισχύει και ο αντίθετος εγκλεισμός, $W \subseteq \mathcal{N}(A)$, δηλαδή ο μηδενόχωρος περιέχει κάθε διάνυσμα που είναι ορθογώνιο σε όλα τα διανύσματα του χώρου γραμμών. Πράγματι, εάν $x \in W$ τότε το x είναι ορθογώνιο σε κάθε γραμμή του A και $Ax = 0$. Αυτή η κατάσταση παρουσιάζει αρκετό ενδιαφέρον ώστε να της δώσουμε ένα όνομα:

Ορισμός. Θεωρούμε γραμμικό υπόχωρο V του $\mathbb{R}^n$. Το σύνολο όλων των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ που είναι ορθογώνια σε κάθε διάνυσμα του V, αποτελεί γραμμικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$ (δες Άσκηση 4.22), ο οποίος ονομάζεται **ορθογώνιο συμπλήρωμα** του V στον $\mathbb{R}^n$, και συμβολίζεται $V^\perp$.

Έχουμε δείξει οτι ο μηδενόχωρος είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου γραμμών:

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^T)^\perp\,.$$

Θα δείξουμε οτι και ο χώρος γραμμών είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του μηδενόχωρου:

$$\mathcal{R}(A^T) = \mathcal{N}(A)^\perp\,.$$

Η Πρόταση 4.3 λέει οτι $\mathcal{R}(A^T) \subseteq \mathcal{N}(A)^\perp$. Για να δείξουμε τον αντίθετο εγκλεισμό θεωρούμε ένα διάνυσμα z ορθογώνιο στο $\mathcal{N}(A)$. Έστω A' ο πίνακας που προκύπτει από τον A επισυνάπτοντας ως μία επί πλέον γραμμή τη z^T. Ο A' έχει τον ίδιο μηδενόχωρο με τον A, αφού η νέα εξίσωση $z^T x = 0$ ικανοποιείται για κάθε $x \in \mathcal{N}(A)$. Επίσης έχει τον ίδιο αριθμό στηλών, n. Συγκρίνοντας τη σχέση

$$\dim \mathcal{R}(A'^T) + \dim \mathcal{N}(A') = n$$

με την 4.1, και αφού $\mathcal{N}(A') = \mathcal{N}(A)$, συμπεραίνουμε οτι $\dim \mathcal{R}(A'^{\,T}) = \dim \mathcal{R}(A^T)$. Αλλά αυτό σημαίνει οτι το διάνυσμα z εξαρτάται γραμμικά από τα διανύσματα μιας βάσης του $\mathcal{R}(A^T)$, δηλαδή οτι ανήκει στο $\mathcal{R}(A^T)$.

Έχουμε αποδείξει το πρώτο μέρος του ακόλουθου θεωρήματος. Το δεύτερο μέρος αποδεικνύεται θεωρώντας τον ανάστροφο πίνακα.

Θεώρημα 4.4 *Δίδεται ένας $m \times n$ πίνακας A. Τότε*

1. *Ο μηδενόχωρος $\mathcal{N}(A)$ είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$ στον $\mathbb{R}^n$, και ο χώρος γραμμών είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του μηδενόχωρου στον $\mathbb{R}^n$,*
$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^T)^\perp \text{ και } \mathcal{R}(A^T) = \mathcal{N}(A)^\perp .$$

2. *Ο αριστερός μηδενόχωρος $\mathcal{N}(A^T)$ είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου στηλών $\mathcal{R}(A)$ στον $\mathbb{R}^m$, και ο χώρος στηλών είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του αριστερού μηδενόχωρου στον $\mathbb{R}^m$,*
$$\mathcal{N}(A^T) = \mathcal{R}(A)^\perp \text{ και } \mathcal{R}(A) = \mathcal{N}(A^T)^\perp .$$

□

Με αυτό το Θεώρημα ολοκληρώνεται η περιγραφή των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων ενός πίνακα, οι οποίοι αποτελούν δύο ζεύγη ορθογωνίων συμπληρωμάτων.

Η ακόλουθη Πρόταση δίδει τις βασικές ιδιότητες του ορθογωνίου συμπληρώματος.

Πρόταση 4.5 *Έστω ένας διανυσματικός υπόχωρος V του $\mathbb{R}^n$, και W το ορθογώνιο συμπλήρωμα του V, $W = V^\perp$. Τότε*

1. *Η διάσταση του W είναι $\dim W = n - \dim V$, και $V \cap W = \{0\}$.*

2. *Το ορθογώνιο συμπλήρωμα του W είναι ο V: εάν $W = V^\perp$ τότε $V = W^\perp$.*

3. *Εάν $\{v_1, \ldots, v_k\}$ είναι βάση του V και $\{w_1, \ldots, w_{n-k}\}$ βάση του W, τότε $\{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_{n-k}\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$.*

4. *Κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$, γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα ενός διανύσματος του V και ενός διανύσματος του W.*

Απόδειξη. 1. Θεωρούμε μια βάση $v_1, \ldots, v_k$ του V και τον πίνακα A που έχει ως γραμμές τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_k$. Τότε V είναι ο χώρος γραμμών του A, και ο μηδενοχώρος του A είναι ίσος με το ορθογώνιο συμπλήρωμα του V, $\mathcal{N}(A) = W$. Άρα $\dim W = \dim \mathcal{N}(A) = n - k$.

Έστω τώρα διάνυσμα $x \in V \cap W$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Αφού $x \in V$ και $x \in W = V^\perp$, το x είναι ορθογώνιο στον εαυτό του, $xx^T = 0$. Δηλαδή $x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 = 0$ και συνεπώς $x = 0$.

2. Από το Θεώρημα 4.4, το ορθογώνιο συμπλήρωμα του $W = \mathcal{N}(A)$ είναι ο $\mathcal{R}(A^T) = V$.

3. Το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_{n-k}\}$ έχει n στοιχεία. Εάν δείξουμε οτι είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε θα είναι βάση του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε οτι $a_1 v_1 + \cdots + a_k u_k + b_1 w_1 + \cdots + b_{n-k} w_{n-k}) = 0$. Θέλουμε να δείξουμε οτι τότε όλα τα a_i και b_j είναι 0. Έχουμε

$$a_1 v_1 + \cdots + a_k u_k = y = -(b_1 w_1 + \cdots + b_{n-k} w_{n-k}) .$$

Αλλά η αριστερή πλευρά ανήκει στο V, η δεξιά πλευρά ανήκει στο W. Άρα το διάνυσμα y ανήκει στην τομή $V \cap W$, και συνεπώς y είναι το μηδενικό διάνυσμα $0 \in \mathbb{R}^n$. Άρα $a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k = 0$, και αφού $u_1, \ldots, u_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, όλα τα a_i είναι 0. Παρόμοια, $b_1 w_1 + \cdots + b_{n-k} w_{n-k} = 0$, και αφού το $w_1, \ldots, w_{n-k}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, όλα τα b_j είναι 0.

4. Αφού $\{u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_{n-k}\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$, κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός

$$\begin{aligned} x &= a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k + b_1 w_1 + \cdots + b_{n-k} w_{n-k} \\ &= x' + x'' \end{aligned}$$

όπου $x' = a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k \in V$ και $x'' = b_1 w_1 + \cdots + b_{n-k} w_{n-k} \in W$.

Υποθέτουμε οτι ισχύει επίσης $x = \tilde{x} + \hat{x}$, όπου $\tilde{x} \in V$ και $\hat{x} \in W$. Τότε $x' + x'' = \tilde{x} + \hat{x}$, και συνεπώς $x' - \tilde{x} = \hat{x} - x''$, αλλά η αριστερή πλευρά ανήκει στο V, η δεξιά πλευρά ανήκει στο W, και όπως πιο πάνω, είναι και οι δύο μηδέν. Άρα $x' = \tilde{x}$ και $x'' = \hat{x}$.

□

Τώρα μπορούμε να ολοκληρώσουμε την περιγραφή της γραμμικής απεικόνισης L_A που πολλαπλασιάζει κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ με τον πίνακα $m \times n$ πίνακα A.

Εάν $x \in \mathcal{N}(A)$, τότε $L_A(x) = 0$.

Εάν το x είναι ορθογώνιο στο μηδενοχώρο, τότε $x \in \mathcal{R}(A^T)$, και $L_A(x) \in \mathcal{R}(A)$. Αλλά το σημαντικό είναι οτι αυτή η απεικόνιση, από το χώρο γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$ στο χώρο στηλών $\mathcal{R}(A)$, είναι αμφιμονοσήμαντη.

Πρόταση 4.6 *Για κάθε διάνυσμα $y \in \mathcal{R}(A)$, υπάρχει ένα, και μόνον ένα, διάνυσμα $x \in \mathcal{R}(A^T)$, τέτοιο ώστε $Ax = y$.*

Απόδειξη. Αφού το y ανήκει στο χώρο στηλών, υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $Au = y$. Από την Πρόταση 4.5, υπάρχουν μοναδικά διανύσματα $x \in \mathcal{R}(A^T)$ και $w \in \mathcal{N}(A)$, τέτοια ώστε $u = x + w$. Αλλά $Aw = 0$, άρα $Ax = Au = y$. Εάν υπάρχει άλλο διάνυσμα $x' \in \mathcal{R}(A^T)$ με $Ax' = y$, τότε $x - x' \in \mathcal{N}(A)$. Αλλά αφού $\mathcal{R}(A^T)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος, $x - x' \in \mathcal{R}(A^T)$. Συνεπώς $x - x' = 0$, και έχουμε μοναδικότητα.

□

Ανακεφαλαιώνουμε την περιγραφή της δράσης του πολλαπλασιασμού με ένα πίνακα.

Εάν A είναι ένας $m \times n$ πίνακας τάξεως r, και $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ η γραμμική απεικόνιση $x \mapsto Ax$, τότε

1. Ο χώρος γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, διάστασης r.

2. Ο χώρος στηλών $\mathcal{R}(A)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, διάστασης r.

3. Ο μηδενοχώρος $\mathcal{N}(A)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ διάστασης $n - r$.

4. Ο αριστερός μηδενόχωρος $\mathcal{N}(A^T)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ διάστασης $m - r$.

5. Ο μηδενοχώρος είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου γραμμών, $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^T)^\perp$.

6. Ο αριστερός μηδενοχώρος είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου στηλών, $\mathcal{N}(A^T) = \mathcal{R}(A)^\perp$.

7. Η γραμμική απεικόνιση L_A απεικονίζει το διανυσματικό υπόχωρο $\mathcal{R}(A^T)$ του $\mathbb{R}^n$ αμφιμονοσήμαντα στο διανυσματικό υπόχωρο $\mathcal{R}(A)$ του $\mathbb{R}^m$.

8. Η γραμμική απεικόνιση L_{A^T} απεικονίζει το διανυσματικό υπόχωρο $\mathcal{R}(A)$ του $\mathbb{R}^m$ αμφιμονοσήμαντα στο διανυσματικό υπόχωρο $\mathcal{R}(A^T)$ του $\mathbb{R}^n$.

Προσέξτε οτι οι δύο προηγούμενες αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις δεν είναι υποχρεωτικά αντίστροφες η μία της άλλης.

Αυτή η εικόνα περιγράφεται παραστατικά στο Σχήμα 3.4 , σελίδα 163 του Strang.

Άσκηση 4.6 Βρείτε ένα διάνυσμα x ορθογώνιο στο χώρο γραμμών του A, ένα διάνυσμα ορθογώνιο στο χώρο στηλών, και ένα διάνυσμα ορθογώνιο στο μηδενοχώρο:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 4.7 Βρείτε όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ που είναι ορθογώνια στο $(1,\ 1,\ 1)$ και στο $(1,\ -1,\ 0)$.

Άσκηση 4.8 Βρείτε μία βάση για το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου γραμμών του A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Διαχωρίστε το $x = (3,\ 3,\ 3)$ σε μία συνιστώσα στο χώρο γραμμών, και σε μία συνιστώσα στο μηδενοχώρο του A.

Άσκηση 4.9 Θεωρήστε τον υποχώρο S του $\mathbb{R}^4$ που περιέχει όλα τα διανύσματα που ικανοποιούν την $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Βρείτε μία βάση για το χώρο $S^\perp$, που περιέχει όλα τα διανύσματα που είναι ορθογώνια στον S.

Άσκηση 4.10 Για να βρείτε το ορθογώνιο συμπλήρωμα του επιπέδου που παράγεται από τα διανύσματα $(1,\ 1,\ 2)$ και $(1,\ 2,\ 3)$, θεωρήστε αυτά τα διανύσματα ως γραμμές του πίνακα A, και λύστε την εξίσωση $Ax = 0$. Θυμηθείτε οτι το συμπλήρωμα είναι ολόκληρη ευθεία.

Άσκηση 4.11 Εάν V και W είναι ορθογώνιοι υπόχωροι, δείξτε οτι το μόνο κοινό διάνυσμα είναι το μηδενικό: $V \cap W = \{0\}$.

Άσκηση 4.12 Βρείτε έναν πίνακα του οποίου ο χώρος γραμμών περιέχει το $(1,\ 2,\ 1)$ και ο μηδενοχώρος περιέχει το $(1,\ -2,\ 1)$, ή δείξτε οτι δεν υπάρχει τέτοιος πίνακας.

Άσκηση 4.13 Κατασκευάστε μία ομογενή εξίσωση σε τρείς αγνώστους, της οποίας οι λύσεις είναι οι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων $(1,\ 1,\ 2)$ και $(1,\ 2,\ 3)$. Αυτό είναι το αντίστροφο της προηγούμενης άσκησης, αλλά τα δύο προβλήματα είναι ουσιαστικά τα ίδια.

Άσκηση 4.14 Σχεδιάστε στο επίπεδο τους τέσσερεις θεμελιώδεις υπόχωρους των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 4.15 Σχεδιάστε τους τέσσερεις θεμελιώδεις υπόχωρους του A, και βρείτε τις συνιστώσες του x στο χώρο γραμμών και στο μηδενοχώρο του A, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 4.16 Σε κάθε περίπτωση, κατασκευάστε έναν πίνακα A με τη ζητούμενη ιδιότητα ή εξηγήστε γιατί αυτό δεν είναι δυνατό

α΄. Ο χώρος στηλών περιέχει τα διανύσματα $(1,\ 2,\ -3)$ και $(2,\ -3,\ 5)$, και ο μηδενοχώρος περιέχει το $(1,\ 1,\ 1)$.

β΄. Ο χώρος γραμμών περιέχει τα $(1,\ 2,\ -3)$ και $(2,\ -3,\ 5)$ και ο μηδενοχώρος περιέχει το $(1,\ 1,\ 1)$.

γ′. Η εξίσωση $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ έχει λύση, και $A^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

δ′. Το άθροισμα των στηλών είναι το διάνυσμα (0, 0, 0), και το άθροισμα των γραμμών είναι το διάνυσμα (1, 1, 1).

Άσκηση 4.17 Υποθέστε οτι ο υπόχωρος S παράγεται από τα διανύσματα (1, 2, 2, 3) και (1, 3, 3, 2). Βρείτε δύο διανύσματα που παράγουν τον υπόχωρο $S^\perp$. Αυτό ισοδυναμεί με το να λύσετε την εξίσωση $Ax = 0$ για κάποιο πίνακα A. Ποιός είναι ο A;

Άσκηση 4.18 Δείξτε οτι εάν ο υπόχωρος S περιέχεται στον υπόχωρο V, τότε ο $S^\perp$ περιέχει τον $V^\perp$.

Άσκηση 4.19 Βρείτε το ορθογώνιο συμπλήρωμα $S^\perp$ όταν

α′. S είναι ο μηδενικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

β′. S είναι ο υπόχωρος που παράγεται από το (1, 1, 1).

γ′. S είναι ο υπόχωρος που παράγεται από τα (2, 0, 0) και (0, 0, 3).

Άσκηση 4.20 Κατασκευάστε έναν 3×3 πίνακα A, χωρίς μηδενικά στοιχεία, του οποίου οι στήλες είναι ανά δύο κάθετες. Υπολογίστε το γινόμενο $A^T A$. Γιατί είναι το γινόμενο διαγώνιος πίνακας;

Άσκηση 4.21 Βρείτε έναν πίνακα που περιέχει το διάνυσμα $u = (1, 2, 3)$ στο χώρο γραμμών και στο χώρο στηλών. Βρείτε έναν άλλο πίνακα που περιέχει το u στο μηδενοχώρο και στο χώρο στηλών. Σε ποιά ζεύγη υποχώρων ενός πίνακα δεν μπορεί να περιέχεται το u;

Άσκηση 4.22 Δείξτε οτι

$$V^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \,:\, \forall v \in V,\, w^T v = 0\}$$

είναι πράγματι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή οτι είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, κλειστό ως προς γραμμικούς συνδυασμούς.

Άσκηση 4.23 Δείξτε οτι εάν V είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και $W = V^\perp$, τότε $W^\perp = V$, δηλαδή οτι εάν ο W είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του V, τότε και ο V είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του W.

Άσκηση 4.24 Αποδείξτε οτι η εξίσωση $Ax = b$ έχει λύση εάν και μόνον εάν $y^T b = 0$ για κάθε y που ικανοποιεί $y^T A = 0$.

Βέλτιστες λύσεις και Προβολές

Επιστρέφουμε ακόμη μία φορά στην εξίσωση $Ax = b$. Έχουμε δει οτι η εξίσωση έχει λύσεις μόνον όταν το διάνυσμα b ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα A. Συχνά όμως θέλουμε να βρούμε την *καλύτερη δυνατή* λύση της εξίσωσης, ακόμη και όταν το b δεν ανήκει στον $\mathcal{R}(A)$.

Αυτό συμβαίνει συχνά στην ανάλυση πειραματικών δεδομένων, όπου για να περιορίσουμε την πιθανότητα τυχαίου σφάλματος, παίρνουμε περισσότερες μετρήσεις. Το αποτέλεσμα είναι να έχουμε ένα σύστημα με αρκετά περισσότερες εξισώσεις παρά αγνώστους, όπου δεν περιμένουμε να υπάρχει ακριβής λύση.

Εάν αντικαταστήσουμε το b με ένα διάνυσμα b' του χώρου στηλών $\mathcal{R}(A)$ τότε η εξίσωση $Ax = b'$ έχει λύση. Μπορούμε να βρούμε μια *βέλτιστη λύση* της εξίσωσης, εάν αντικαταστήσουμε το διάνυσμα b με το διάνυσμα του χώρου στηλών του A που είναι πλησιέστερο στο b από κάθε άλλο διάνυσμα του χώρου στηλών. Αυτό το διάνυσμα είναι η *ορθογώνια προβολή του b στο χώρο στηλών.*

Εάν συμβολίσουμε p την ορθογώνια προβολή του b στο χώρο στηλών, έχουμε μία νέα εξίσωση

$$A\hat{x} = p.$$

Οι λύσεις αυτής της εξίσωσης ονομάζονται *βέλτιστες λύσεις ελαχίστων τετραγώνων* της αρχικής εξίσωσης $Ax = b$, (δείτε την Άσκηση 4.25).

Παράδειγμα 4.4 Υποθέτουμε οτι μελετάμε την εξάρτηση μίας ποσότητας b από μία ποσότητα a, και αναμένουμε οτι η b είναι ανάλογη προς την a. Θέλουμε να βρούμε τον σταθερό λόγο λ για τον οποίο

$$b = \lambda a\,.$$

Υποθέτουμε οτι οι πειραματικές μετρήσεις δίδουν τις τιμές b_1 για $a = 2$, b_2 για $a = 3$ και b_3 για $a = 4$. Για να βρούμε το λ θεωρούμε τρείς εξισώσεις με ένα άγνωστο.

$$\begin{aligned} 2x &= b_1 \\ 3x &= b_2 \\ 4x &= b_3\,. \end{aligned}$$

Όμως αυτό το σύστημα έχει λύση μόνο όταν το διάνυσμα $(b_1,\, b_2,\, b_3)$ είναι ένα πολλαπλάσιο του $(2,\, 3,\, 4)$. Η εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

έχει λύση μόνον όταν το $(b_1,\, b_2,\, b_3)$ ανήκει στο χώρο στηλών. Για κάθε τιμή του x ορίζουμε το *σφάλμα*

$$\varepsilon = \|ax - b\| = \sqrt{(2x - b_1)^2 + (3x - b_2)^2 + (4x - b_3)^2}\,,$$

το οποίο μηδενίζεται μόνο όταν x αποτελεί λύση της εξίσωσης 4.3. Στην περίπτωση που η εξίσωση 4.3 δεν έχει λύση, θεωρούμε την *βέλτιστη λύση*, την τιμή του x η οποία κάνει το σφάλμα ε όσο το δυνατόν μικρότερο. Αυτό συμβαίνει όταν το διάνυσμα ax είναι ίσο με την ορθογώνια προβολή του διανύσματος b στο χώρο στηλών, δηλαδή όταν $ax - b$ είναι κάθετο στο a.

Άσκηση 4.25 Υπολογίστε την παράγωγο $\frac{d}{dx}(\varepsilon^2)$, και δείξτε οτι μηδενίζεται ακριβώς όταν $ax - b$ είναι κάθετο στο a.

Προβολή σε ευθεία

Ας εξετάσουμε πρώτα την προβολή σε μία ευθεία. Θεωρούμε τα διανύσματα a και b στο επίπεδο. Είδαμε στο Κεφάλαιο 3 την προβολή του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ στον ϑ-άξονα, δηλαδή στην ευθεία των διανυσμάτων που είναι συγγραμμικά με το $(\cos\vartheta,\, \sin\vartheta)$. Τώρα θέλουμε να υπολογίσουμε την προβολή ενός σημείου b του $\mathbb{R}^n$ πάνω στην ευθεία των διανυσμάτων που είναι συγγραμμικά με το $a \in \mathbb{R}^n$. Το διάνυσμα προβολής p χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Το p είναι συγγραμμικό με το a, δηλαδή $p = \hat{x}a$ για κάποιο αριθμό $\hat{x} \in \mathbb{R}$.

2. Η διαφορά $b - p$ είναι ορθογώνια στο a, δηλαδή $a^T(b - p) = 0$.

Από αυτές τις ιδιότητες λαμβάνουμε την εξίσωση

$$a^T(b - \hat{x}a) = 0$$

την οποία μπορούμε να λύσουμε για να βρούμε το $\hat{x}$:

$$\hat{x} = \frac{a^T b}{a^T a}.$$

Συνεπώς το διάνυσμα προβολής είναι

$$p = \hat{x}a = \frac{a^T b}{a^T a} a\,.$$

Θέλουμε να εκφράσουμε την προβολή ως μία γραμμική απεικόνιση από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^n$, η οποία απεικονίζει τον $\mathbb{R}^n$ στην ευθεία $V = \{ta : t \in \mathbb{R}\}$, και να βρούμε τον αντίστοιχο πίνακα. Στον προηγούμενο υπολογισμό μπορούμε να αντιστρέψουμε τη διάταξη του a και του $\hat{x}$:

$$p = a\hat{x} = a\frac{a^T b}{a^T a}\,,$$

και να εφαρμόσουμε την προσεταιριστική ιδιότητα:

$$p = \frac{1}{a^T a}\; a a^T b\,.$$

Παρατηρήστε οτι $a^T a$ είναι θετικός αριθμός, το τετράγωνο του μήκους του a, ενώ aa^T είναι τετραγωνικός πίνακας.

Τον πίνακα

$$P = \frac{1}{a^T a}\; a a^T$$

ονομάζουμε **πίνακα προβολής**. Για να προβάλουμε το διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^n$ στην ευθεία που ορίζει το διάνυσμα a, αρκεί να το πολλαπλασιάσουμε με τον πίνακα P.

Παράδειγμα 4.5 Συνεχίζουμε το Παράδειγμα 4.4, με $b = (4, 6, 9)$, δηλαδή θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Αυτό δεν έχει λύση, αφού το διάνυσμα $(4, 6, 9)$ δεν ανήκει στο χώρο που παράγει το $(2, 3, 4)$. Η βέλτιστη λύση είναι $\hat{x}$, τέτοια ώστε

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} - \hat{x} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right) = 0\,,$$

δηλαδή

$$\hat{x} = \frac{(2,\,3,\,4)\cdot(4,\,6,\,9)}{2^2+3^2+4^2} = \frac{62}{29}\,.$$

Συμπεραίνουμε οτι η βέλτιστη τιμή για το λ που προκύπτει από τα 3 σημεία $(2,\,4)$, $(3,\,6)$ και $(4,\,9)$ είναι $\lambda = \frac{62}{29}$.

Άσκηση 4.26 Βρείτε την προβολή του διανύσματος $(7,\,4)$ πάνω στον υπόχωρο που παράγεται από το διάνυσμα $(1,\,2)$.

Άσκηση 4.27 Βρείτε τον πίνακα προβολής που αντιστοιχεί στην προβολή των διανυσμάτων του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ πάνω στην ευθεία $3x-2y=0$.

Άσκηση 4.28 Βρείτε τον πίνακα προβολής P_1 στην ευθεία με διεύθυνση $a=(1,\,3)$, καθώς και τον πίνακα προβολής P_2 στην ευθεία που είναι κάθετη στο a. Υπολογίστε τους πίνακες P_1+P_2 και P_1P_2. Εξηγήστε το αποτέλεσμα.

Άσκηση 4.29 Στον χώρο $\mathbb{R}^n$, ποιά γωνία σχηματίζει το διάνυσμα $(1,\,1,\,\ldots\,,\,1)$ με τους άξονες συντεταγμένων; Βρείτε τον πίνακα προβολής σε αυτό το διάνυσμα.

Άσκηση 4.30 Ποιό πολλαπλάσιο του $a=(1,\,1,\,1)$ είναι πλησιέστερο στο σημείο $b=(2,\,4,\,4)$; Βρείτε επίσης το σημείο στην ευθεία με διεύθυνση b που είναι πλησιέστερο στο a.

Άσκηση 4.31 Δείξτε οτι ο πίνακας προβολής $P=\frac{1}{a^Ta}\,aa^T$ είναι συμμετρικός και ικανοποιεί τη σχέση $P^2=P$.

Άσκηση 4.32 Ποιος πίνακας P προβάλει κάθε σημείο του $\mathbb{R}^3$ στην ευθεία όπου τέμνονται τα επίπεδα $x+y+t=0$ και $x-t=0$;

Άσκηση 4.33 Για τα ακόλουθα διανύσματα, σχεδιάστε στο καρτεσιανό επίπεδο την προβολή του b στο a, και στη συνέχεια υπολογίστε την προβολή, από την έκφραση $p=\hat{x}a$:

α΄. $b=\begin{bmatrix}\cos\vartheta\\ \sin\vartheta\end{bmatrix}$ και $a=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

β΄. $b=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ και $a=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

Άσκηση 4.34 Υπολογίστε την προβολή του b στην ευθεία με διεύθυνση a, και ελέγξτε οτι το διανυσματικό σφάλμα $e=b-p$ είναι ορθογώνιο στο a:

α΄. $b=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$ και $a=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

β΄. $b=\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}$ και $a=\begin{bmatrix}-1\\-3\\-1\end{bmatrix}$

Άσκηση 4.35 Έστω a διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ και έστω P ο πίνακας προβολής του a. Δείξτε οτι το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του P ισούται με 1.

Άσκηση 4.36 Έστω $a = (1, 2, -1, 3)$.

α'. Βρείτε τον πίνακα προβολής P στο διάνυσμα a.

β'. Βρείτε μια βάση του μηδενόχωρου $\mathcal{N}(P)$.

γ'. Βρείτε ένα μη μηδενικό διάνυσμα v του $\mathbb{R}^4$ του οποίου η προβολή στο a να είναι το μηδενικό διάνυσμα.

Προβολή σε υπόχωρο

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα σε περισσότερες διαστάσεις. Θέλουμε να προβάλουμε το διάνυσμα b σε ένα υπόχωρο V διάστασης k μέσα στον $\mathbb{R}^m$. Μπορούμε για ευκολία να υποθέσουμε οτι $k = 2$ και $m = 3$, χωρίς ουσιαστική διαφορά στη διαδικασία. Θεωρούμε λοιπόν δύο διανύσματα a_1 και a_2 του $\mathbb{R}^3$, τα οποία αποτελούν βάση του V, και τον $m \times k$ πίνακα A με στήλες τα διανύσματα a_i, έτσι ώστε $V = \mathcal{R}(A)$. Αφού η προβολή p βρίσκεται στο χώρο στηλών του A, έχουμε

$$p = A\hat{x}$$

για κάποιο $\hat{x} \in \mathbb{R}^k$. Αφού η προβολή είναι ορθογώνια, το διάνυσμα $b - A\hat{x}$ είναι ορθογώνιο στο χώρο στηλών του A, και από το Θεώρημα 4.4 ανήκει στον αριστερό μηδενοχώρο του A:

$$A^T(b - A\hat{x}) = 0\,.$$

Έτσι έχουμε την εξίσωση

$$A^T A\hat{x} = A^T b\,,$$

η οποία θα μας δώσει τη βέλτιστη λύση $\hat{x}$, από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε το p.

Εάν ο πίνακας $A^T A$ είναι αντιστρέψιμος, έχουμε

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b\,,$$

και η προβολή του b στον υπόχωρο $V = \mathcal{R}(A)$ είναι

$$p = A\hat{x} = A(A^T A)^{-1} A^T b\,.$$

Ο πίνακας προβολής είναι

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T.$$

Σε αυτή την έκφραση, A είναι $m \times k$ πίνακας, οπότε $A^T A$ είναι τετραγωνικός $k \times k$ πίνακας, και P είναι $m \times m$ πίνακας.

Αν συγκρίνουμε με την περίπτωση της προβολής σε ευθεία, όπου $k = 1$, βλέπουμε οτι ο $m \times 1$ πίνακας A είναι το διάνυσμα a, και ο αντιστρέψιμος $k \times k$ πίνακας $A^T A$ είναι ο θετικός αριθμός $a^T a$, με αντίστροφο $\frac{1}{a^T a}$. Αυτός μετατίθεται με τον πίνακα A, και συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$a(a^T a)^{-1} a^T = \frac{1}{a^T a}\, a a^T.$$

Θα δείξουμε οτι η υπόθεση πως $A^T A$ είναι αντιστρέψιμος ικανοποιείται πάντα όταν οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, όπως στην περίπτωση που αποτελούν βάση του υπόχωρου V.

Λήμμα 4.7 *Ο πίνακας $A^T A$ έχει τον ίδιο μηδενοχώρο με τον A.*

Απόδειξη. Είναι προφανές οτι εάν $Ax = 0$ τότε $A^T Ax = 0$, δηλαδή οτι $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(A^T A)$.

Για να δείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό θεωρούμε x τέτοιο ώστε $A^T Ax = 0$, οπότε

$$x^T(A^T Ax) = 0.$$

Αλλά $x^T(A^T Ax) = (x^T A^T)Ax = (Ax)^T Ax = ||Ax||^2$.

Άρα το διάνυσμα Ax έχει μηδενικό μήκος, και συνεπώς $Ax = 0$, δηλαδή $x \in \mathcal{N}(A)$.

□

Πρόταση 4.8 *Ένας $m \times m$ πίνακας P είναι πίνακας προβολής σε ένα υπόχωρο του $\mathbb{R}^m$ εάν και μόνον εάν P είναι συμμετρικός και $P^2 = P$.*

Απόδειξη. Έστω V ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, και A ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα μίας βάσης του V. Τότε ο πίνακας προβολής στον υπόχωρο V είναι ο $P = A(A^T A)^{-1}A^T$. Εύκολα ελέγχουμε οτι $P^2 = P$,

$$\begin{aligned} P^2 &= A(A^T A)^{-1}A^T A(A^T A)^{-1}A^T \\ &= A(A^T A)^{-1}A^T \\ &= P. \end{aligned}$$

Ο ανάστροφος του P είναι ο πίνακας

$$\begin{aligned} P^T &= (A(A^T A)^{-1}A^T)^T \\ &= (A^T)^T \left((A^T A)^{-1}\right)^T A^T \\ &= A\left((A^T A)^T\right)^{-1} A^T \\ &= A(AA^T)^{-1}A^T \\ &= P \end{aligned}$$

Αντιστρόφως, εάν ο $m \times m$ πίνακας P ικανοποιεί τις σχέσεις $P^2 = P$ και $P = P^T$, θα δείξουμε οτι P είναι ο πίνακας προβολής στο χώρο στηλών του. Προφανώς, για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$, Pb ανήκει στο χώρο στηλών του P. Για να δείξουμε οτι Pb είναι η προβολή του b στον υπόχωρο $V = \mathcal{R}(P)$ αρκεί να δείξουμε οτι $b - Pb$ είναι ορθογώνιο στον V.

Έστω v διάνυσμα του V. Τότε v είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του P, δηλαδή υπάρχει $c \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $v = Pc$, και έχουμε

$$\begin{aligned} (b - Pb)^T v &= (b - Pb)^T Pc \\ &= (b^T - b^T P^T)Pc \\ &= b^T(I - P^T)Pc \\ &= b^T(P - P^T P)c. \end{aligned}$$

Αλλά $P^T = P$ και $P^2 = P$, άρα $P - P^T P = P - P = 0$.

□

Παράδειγμα 4.6 Συνεχίζουμε το Παράδειγμα 4.4, με $b = (4,\ 6,\ 9)$, αλλά τώρα υποθέτουμε οτι η σχέση μεταξύ των ποσοτήτων a και b είναι

$$b = \lambda a + \mu\,.$$

Με τα ίδια δεδομένα, (2, 4), (3, 6) και (4, 9), έχουμε τρείς εξισώσεις με δύο αγνώστους για να βρούμε τα λ και μ:

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ 3x_1 & + & x_2 & = & 6 \\ 4x_1 & + & x_2 & = & 9\,, \end{array}$$

τις οποίες γράφουμε ως ένα σύστημα

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Το διάνυσμα (4, 6, 9) δεν ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα A, και το σύστημα δεν έχει λύση. Το σφάλμα $\varepsilon = \|b - Ax\|$ ελαχιστοποιήται για την τιμή $\hat{x}$ του $x = (x_1,\, x_2)$ για την οποία το διάνυσμα $b - A\hat{x}$ είναι ορθογώνιο στο χώρο στηλών του A. Έτσι έχουμε την εξίσωση *ελαχίστων τετραγώνων*:

$$A^T(b - A\hat{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \right) = 0\,,$$

δηλαδή

$$\begin{bmatrix} 62 \\ 19 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 29 & 9 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = 0$$

με λύση

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ -9 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 62 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{6} \\ \frac{7}{6} \end{bmatrix}.$$

Άρα η βέλτιστη ευθεία που καθορίζεται από τα σημεία (2, 4), (3, 6) και (4, 9) έχει εξίσωση

$$6b = 15a + 7\,.$$

Άσκηση 4.37 Βρείτε τη βέλτιστη λύση ελαχίστων τετραγώνων της εξίσωσης $Ax = b$, και υπολογίστε την προβολή $p = A\hat{x}$, εάν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Επαληθεύστε οτι το διανυσματικό σφάλμα $e = b - p$ είναι ορθογώνιο στις στήλες του A.

Άσκηση 4.38 Υπολογίστε το τετράγωνο του σφάλματος $\varepsilon^2 = ||Ax - b||^2$, και βρείτε τις μερικές παραγώγους του ε^2 ως προς u και v, εάν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \text{ και } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Θέσατε τις παραγώγους ίσες με μηδέν, και συγκρίνετε με τις εξισώσεις $A^TA\hat{x} = A^Tb$, για να δείξετε οτι ο λογισμός και η γεωμετρία καταλήγουν στις ίδιες εξισώσεις. Υπολογίστε το $\hat{x}$ και την προβολή $p = A\hat{x}$. Γιατί είναι $p = b$;

Άσκηση 4.39 Βρείτε την προβολή του $b = (4, 3, 1, 0)$ πάνω στο χώρο στηλών του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 4.40 Βρείτε την βέλτιστη λύση ελαχίστων τετραγώνων $\hat{x}$, του συστήματος εξισώσεων $3x = 10$ και $4x = 5$. Ποιο είναι το τετράγωνο του σφάλματος ε^2 που ελαχιστοποιείται; Επαληθεύστε οτι το διανυσματικό σφάλμα $e = (10 - 3\hat{x},\, 5 - 4\hat{x})$ είναι ορθογώνιο στη στήλη $(3, 4)$.

Άσκηση 4.41 Βρείτε την προβολή του b στο χώρο στηλών του A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Διαχωρήστε το b σε άθροισμα $p + q$, με p στο χώρο στηλών του A και q ορθογώνιο προς αυτόν. Σε ποιό θεμελιώδη υπόχωρο του A βρίσκεται το διάνυσμα q;

Άσκηση 4.42 Δείξτε οτι εάν ο πίνακας P ικανοποιεί τη σχέση $P = P^T P$, τότε P είναι πίνακας προβολής. Είναι ο μηδενικός πίνακας $P = 0$ πίνακας προβολής, και σε ποιο υπόχωρο;

Άσκηση 4.43 Τα διανύσματα $a_1 = (1, 1, 0)$ και $a_2 = (1, 1, 1)$ παράγουν ένα επίπεδο στο $\mathbb{R}^3$. Βρείτε τον πίνακα προβολής στο επίπεδο, και ένα μη μηδενικό διάνυσμα b το οποίο προβάλεται στο 0.

Άσκηση 4.44 Εάν V είναι ο υπόχωρος που παράγεται από τα $(1, 1, 0, 1)$ και $(0, 0, 1, 0)$ βρείτε

α'. μία βάση για το ορθογώνιο συμπλήρωμα $V^\perp$.

β'. τον πίνακα προβολής P στο V.

γ'. το διάνυσμα στο V το οποίο είναι πλησιέστερο προς το $(0, 1, 0, -1) \in V^\perp$

Άσκηση 4.45 Εάν P είναι η προβολή στο χώρο στηλών του πίνακα A, ποιά είναι η προβολή στον αριστερό μηδενοχώρο του A;

Άσκηση 4.46 Εάν $P_\sigma = A(A^T A)^{-1} A^T$ είναι ο πίνακας προβολής στο χώρο στηλών του A, ποιός είναι ο πίνακας προβολής P_γ στο χώρο γραμμών του A;

Άσκηση 4.47 Θεωρούμε τον διανυσματικό υπόχωρο V του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα

$$(1, 2, 0, 3), \quad (2, 1, 1, 2) \quad (-1, 4, -2, 5)$$

α'. Βρείτε το ορθογώνιο συμπλήρωμα $V^\perp$ του V.

β'. Γράψτε το διάνυσμα $x = (-4, 15, 7, 8)$ ως άθροισμα $x = v + w$, όπου $v \in V$ και $w \in V^\perp$.

Ορθογώνιοι πίνακες

Θεωρούμε ένα διανυσματικό υπόχωρο $V \subseteq \mathbb{R}^n$ διάστασης $\dim V = k$, και μία βάση $v_1, \ldots, v_k$ του V. Τότε κάθε διάνυσμα $u \in V$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k.$$

Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων u και $w = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_k v_k$ είναι

$$\begin{aligned} u^T w &= (a_1 v_1^T + \cdots a_k v_k^T)(b_1 v_1 + \cdots + b_k v_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_i b_j v_i^T v_j. \end{aligned}$$

Εάν υποθέσουμε οτι τα διανύσματα της βάσης είναι ανά δύο ορθογώνια μεταξύ τους, δηλαδή οτι $v_i^T v_j = 0$ εάν $i \neq j$, το εσωτερικό γινόμενο $u^T w$ γίνεται

$$\begin{aligned} u^T w &= \sum_{i=1}^{k} a_i b_i v_i^T v_i \\ &= \sum a_i b_i ||v_i||^2. \end{aligned}$$

Είναι φανερό οτι μία βάση από ορθογώνια διανύσματα μπορεί να απλοποιήσει σημαντικά τους υπολογισμούς. Σε μία τέτοια βάση, μόνο μία ακόμη βελτίωση μπορούμε να κάνουμε: το μήκος κάθε διανύσματος της βάσης να είναι $||v_i||^2 = 1$. Τότε το εσωτερικό γινόμενο των u και w λαμβάνει την απλούστερη δυνατή μορφή:

$$u^T w = \sum a_i b_i$$

Μία τέτοια βέλτιστη βάση την χαρακτηρίζουμε *ορθοκανονική*.

Ορισμός. Τα διανύσματα $q_1, q_2, \ldots, q_k$ είναι **ορθοκανονικά** εάν

$$q_i^T q_j = \begin{cases} 0 & \text{εάν} \quad i \neq j \\ 1 & \text{εάν} \quad i = j \end{cases}$$

Μία βάση που αποτελείται από ορθοκανονικά διανύσματα ονομάζεται **ορθοκανονική βάση**

Άσκηση 4.48 Δείξτε οτι εάν $q_1, \ldots, q_k$ είναι μία ορθοκανονική βάση του V, τότε οι συντελεστές $a_1, \ldots, a_k$ του διανύσματος $u = a_1 q_1 + \cdots + a_k q_k$ είναι $a_i = q_i^T u$.

Ορισμός. Ένας τετραγωνικός πίνακας του οποίου οι στήλες είναι ορθοκανονικά διανύσματα ονομάζεται **ορθογώνιος**. Προσέξτε οτι αυτός ο όρος χρησιμοποιείται μόνο για τετραγωνικούς πίνακες. Ένας μη τετραγωνικός πίνακας με ορθοκανονικές στήλες δεν ονομάζεται ορθογώνιος.

Το σημαντικότερο παράδειγμα ορθοκανονικής βάσης είναι η κανονική βάση $e_1, \ldots, e_n$ του $\mathbb{R}^n$. Ο ορθογώνιος πίνακας που έχει αυτά τα διανύσματα ως στήλες, με τη διάταξη $e_1, \ldots, e_n$ είναι ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας I. Τα ίδια διανύσματα με διαφορετικές διατάξεις δίδουν τους πίνακες μετάθεσης, οι οποίοι είναι επίσης ορθογώνιοι πίνακες.

Πρόταση 4.9 *Εάν ο $m \times n$ πίνακας M έχει ορθοκανονικές στήλες τότε $M^T M = I$.*

Ειδικότερα, εάν Q είναι ορθογώνιος πίνακας, τότε ο ανάστροφος πίνακας είναι και αντίστροφος,

$$Q^T = Q^{-1}\,.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{R}^m$ είναι οι στήλες του M. Τότε $M^T M$ είναι ο $n \times n$ πίνακας με στοιχείο στη θέση (i, j) το $q_i^T q_j$. Αλλά

$$q_i^T q_j = \begin{cases} 0 & \text{εάν} \quad i \neq j \\ 1 & \text{εάν} \quad i \neq j\,. \end{cases}$$

Συνεπώς $M^T M$ είναι ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας και M^T είναι αριστερό αντίστροφο του M.

Εάν ο πίνακας είναι τετραγωνικός, τότε το ανάστροφο είναι αριστερό αντίστροφο και από την Πρόταση 3.5 είναι ο αντίστροφος πίνακας.

□

Παράδειγμα 4.7 Ο πίνακας περιστροφής $Q = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$ είναι ορθογώνιος. Ο Q περιστρέφει κατά γωνία ϑ, ενώ ο ανάστροφος $Q^T = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$ περιστρέφει κατά γωνία $-\vartheta$. Οι στήλες είναι ορθογώνιες, και αφού $\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1$, έχουν μήκος 1.

Παράδειγμα 4.8 Όπως αναφέραμε προηγουμένως, κάθε πίνακας μετάθεσης είναι ορθογώνιος. Ειδικότερα ο πίνακας

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

που παριστάνει την ανάκλαση στον άξονα $x = y$. Γεωμετρικά, κάθε ορθογώνιος πίνακας είναι σύνθεση μίας περιστροφής και μίας ανάκλασης.

Οι ορθογώνιοι πίνακες έχουν ακόμα μία σημαντική ιδιότητα:

Πρόταση 4.10 *Ο πολλαπλασιασμός με ένα ορθογώνιο πίνακα Q αφήνει το μήκος αμετάβλητο: για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$||Qx|| = ||x||.$$

Γενικότερα, πολλαπλασιασμός με ορθογώνιο πίνακα αφήνει το εσωτερικό γινόμενο αμετάβλητο: για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$(Qx)^T(Qy) = x^T y.$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε οτι $(Qx)^T = x^T Q^T$. Αλλά $Q^T Q = I$ και έχουμε:

$$(Qx)^T(Qy) = x^T Q^T Q y = x^T I y = x^T y.$$

□

Εάν ο πίνακας Q είναι ορθογώνιος, τότε $Q^T = Q^{-1}$, και συνεπώς $QQ^T = I$. Αυτό σημαίνει οτι *οι γραμμές ενός ορθογωνίου πίνακα είναι επίσης ορθοκανονικά διανύσματα.*

Ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt

Θα δείξουμε οτι εάν $v_1, \ldots, v_k$ είναι οποιαδήποτε βάση του υποχώρου $V \subseteq \mathbb{R}^n$, μπορούμε να κατασκευάσουμε από την $v_1, \ldots, v_k$ μία ορθοκανονική βάση $q_1, \ldots, q_k$, τέτοια ώστε για κάθε $j = 1, \ldots, k$, τα διανύσματα $q_1, \ldots, q_j$ παράγουν τον ίδιο υπόχωρο που παράγουν τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_j$. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται **ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt**. Θα την περιγράψουμε στην περίπτωση τριών διανυσμάτων v_1, v_2, v_3. Υποθέτουμε οτι τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αρχικά θα τα αντικαταστήσουμε με τρία ορθογώνια διανύσματα $w_1\, w_2$, w_3. Στη συνέχεια, διαιρούμε κάθε διάνυσμα w_i με το μήκος του και έχουμε τα ορθοκανονικά διανύσματα q_1, q_2, q_3.

Θέτουμε $w_1 = v_1$. Θέλουμε w_2 ορθογώνιο στο w_1 και τέτοιο ώστε τα w_1 και w_2 να παράγουν τον ίδιο υπόχωρο που παράγουν τα v_1 και v_2. Αφαιρούμε από το v_2 την προβολή του στην ευθεία που παράγεται από το w_1.

$$w_2 = v_2 - \frac{w_1^T v_2}{w_1^T w_1} w_1 \,.$$

Ελέγχουμε οτι w_1 και w_2 είναι ορθογώνια:

$$\begin{aligned} w_1^T w_2 &= w_1^T u_2 - \frac{w_1^T u_2}{w_1^T w_1} w_1^T w_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Το v_3 δεν περιέχεται στο επίπεδο που παράγουν τα w_1, w_2, αφού υποθέσαμε οτι τα v_1, v_2 και v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Για να βρούμε το w_3 θα αφαιρέσουμε την προβολή του v_3 στο επίπεδο που παράγουν τα v_1 και v_2. Έστω A ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα w_1 και w_3. Τότε

$$A^T A = \begin{bmatrix} w_1^T w_1 & 0 \\ 0 & w_2^T w_2 \end{bmatrix}$$

και, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό των μπλοκ, $A = [w_1\, w_2]$, η προβολή του v_3 είναι

$$\begin{aligned} A(A^T A)^{-1} A^T v_3 &= [w_1\, w_2] \begin{bmatrix} w_1^T w_1 & 0 \\ & \\ 0 & w_2^T w_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w_1^T \\ w_2^T \end{bmatrix} v_3 \\ &= \frac{w_1}{w_1^T w_1} w_1^T v_3 + \frac{w_2}{w_2^T w_2} w_2^T v_3 \\ &= \frac{w_1^T v_3}{w_1^T u_3} w_1 + \frac{w_2^T v_3}{w_2^T w_2} w_2 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε οτι, επειδή τα διανύσματα w_1 και w_2 είναι ορθογώνια, η προβολή στο επίπεδο που παράγουν τα w_1 και w_2 είναι το άθροισμα των προβολών στις ευθείες των w_1 και w_2. Καταλήγουμε πως

$$w_3 = v_3 - \frac{w_1^T v_3}{||w_1||^2} w_1 - \frac{w_2^T v_3}{||w_2||^2} w_2.$$

Τα διανύσματα w_1, w_2, w_3 είναι τώρα ορθογώνια. Για να βρούμε την ορθοκανονική βάση του V αρκεί να διαιρέσουμε κάθε διάνυσμα με το μήκος του,

$$q_1 = \frac{w_1}{||w_1||}, \quad q_2 = \frac{w_2}{||w_2||}, \quad q_3 = \frac{w_3}{||w_3||} \,.$$

Παράδειγμα 4.9 Θεωρούμε τα διανύσματα

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$w_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3/2}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Άρα

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad q_3 = \frac{3}{\sqrt{17}}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{17}} \\ \frac{3}{\sqrt{17}} \\ -\frac{2}{\sqrt{17}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Όπως περιγράψαμε τη διαδικασία της απαλοιφής Gauss μέσω της παραγοντοποίησης $A = LU$, μπορούμε να περιγράψουμε και την ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt μέσω μίας παραγοντοποίησης του πίνακα A ο οποίος έχει ως στήλες τα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_k$:

$$A = QR,$$

όπου Q είναι ο πίνακας με ορθοκανονικές στήλες $q_1, q_2, \ldots, q_k$, και R είναι ο πίνακας που αντιστρέφει τη διαδικασία Gram-Schmidt:

$$R = \begin{bmatrix} q_1^T v_1 & q_1^T v_2 & q_1^T v_3 \\ 0 & q_2^T v_2 & q_2^T v_3 \\ 0 & 0 & q_3^T v_3 \end{bmatrix}.$$

Γενικότερα, εάν A είναι $m \times k$ πίνακας, R είναι ο άνω τριγωνικός $k \times k$ πίνακας με στοιχείο στη θέση i, j

$$R_{ij} = q_1^T u_j \quad \text{για } j \geq i\,.$$

Πρόταση 4.11 *Κάθε $m \times k$ πίνακας A με γραμμικά ανεξάρτητες στήλες μπορεί να παραγοντοποιηθεί στη μορφή*

$$A = QR\,,$$

όπου ο Q έχει ορθοκανονικές στήλες, και ο R είναι άνω τριγωνικός και αντιστρέψιμος. Εάν $m = k$, τότε Q είναι ορθογώνιος πίνακας.

Η παραγοντοποίηση $A = QR$ απλοποιεί το πρόβλημα εύρεσης βέλτιστης λύσης ελαχίστων τετραγώνων. Η εξίσωση

$$A^T A\hat{x} = A^T b$$

γίνεται

$$R^T Q^T QR\hat{x} = R^T Q^T b.$$

Αφού $Q^T Q = I$ και R^T είναι αντιστρέψιμος, έχουμε

$$R\hat{x} = Q^T b$$

και το διάνυσμα $\hat{x}$ υπολογίζεται με ανάδρομη αντικατάσταση.

Άσκηση 4.49 Εάν u είναι μοναδιαίο διάνυσμα, δείξτε οτι $Q = I - 2uu^T$ είναι συμμετρικός ορθογώνιος πίνακας. (Είναι μία ανάκλαση, και ονομάζεται μετασχηματισμός Householder). Υπολογίστε τον Q όταν $u^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Άσκηση 4.50 Προβάλετε το διάνυσμα $b = (1, 2)$ σε δύο μή ορθογώνια διανύσματα, $a_1 = (1, 0)$ και $a_2 = (1, 1)$. Επαληθεύστε οτι το άθροισμα των δύο προβολών δεν είναι ίσο προς το b.

Άσκηση 4.51 Δείξτε οτι ένας άνω τριγωνικός ορθογώνιος πίνακας πρέπει να είναι διαγώνιος.

Άσκηση 4.52 Από τα μη ορθογώνια διανύσματα v_1, v_2, v_3, βρείτε ορθογώνια διανύσματα q_1, q_2, q_3.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 4.53 Ποιά είναι τα δυνατά διανύσματα v_1 και v_2, που δίνουν μετά από ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt τα διανύσματα q_1 και q_2.

Άσκηση 4.54 Ποιό πολλαπλάσιο του $a_1 = (1, 1)$ πρέπει να αφαιρεθεί από το $a_2 = (4, 0)$, ώστε το αποτέλεσμα να είναι ορθογώνιο προς το a_1. Παραγοντοποιήστε τον πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ σε γινόμενο QR όπου Q είναι ορθογώνιος.

Άσκηση 4.55 Εφαρμόστε τη διαδικασία Gram-Schmidt στα διανύσματα

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

και εκφράστε το αποτέλεσμα στη μορφή $A = QR$.

Άσκηση 4.56 Εάν $A = QR$, όπου οι στήλες του Q είναι ορθογώνια διανύσμασματα, βρείτε έναν απλό τύπο για τον πίνακα προβολής στο χώρο στηλών του A.

Άσκηση 4.57 Βρείτε τρία ορθοκανονικά διανύσματα q_1, q_2, $q_3 \in \mathbb{R}^3$, τέτοια ώστε τα q_1, q_2 να παράγουν το χώρο στηλών του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ποιός θεμελιώδης υπόχωρος του A περιέχει το διάνυσμα q_3; Βρείτε τη βέλτιστη λύση ελαχίστων τετραγώνων της εξίσωσης $Ax = b$, όταν $b^T = [1\,2\,7]$.

Άσκηση 4.58 Με τον πίνακα A της Άσκησης 4.57, και το διάνυσμα $b = [1\,1\,1]^T$, χρησιμοποιήστε την παραγοντοποίηση $A = QR$ για να λύσετε το πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων $Ax = b$.

Άσκηση 4.59 Εφαρμόστε τη διαδικασία Gram-Schmidt στα διανύσματα $(1,\, -1,\, 0)$, $(0,\, 1,\, -1)$ και $(1,\, 0,\, -1)$ για να βρείτε ορθοκανονική βάση του επιπέδου $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Πόσα μή μηδενικά διανύσματα προκύπτουν από τη διαδικασία Gram-Schmidt;

Άσκηση 4.60 Βρείτε ορθογώνια διανύσματα $w_1,\, w_2,\, w_3$ από τα διανύσματα

$$v_1 = (1,\, -1,\, 0,\, 0),\; v_2 = (0,\, 1,\, -1,\, 0),\; v_3 = (0,\, 0,\, 1,\, -1)\,.$$

Τα $v_1,\, v_2,\, v_3$ αποτελούν βάση του υποχώρου που είναι ορθογώνιος στο $(1,\, 1,\, 1,\, 1)$.

Κεφάλαιο 5

Ορίζουσες

Χαρακτηριστικές ιδιότητες της Ορίζουσας

Γνωρίζουμε την ορίζουσα πινάκων 2×2 : εάν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

η ορίζουσα του A είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2.$$

Για ένα γενικό 2×2 πίνακα, η ορίζουσα είναι :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Εύκολα ελέγχουμε ορισμένες ιδιότητες των οριζουσών 2×2 πινάκων.
(α΄) Η ορίζουσα του ταυτοτικού πίνακα είναι 1,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

(β΄) Το πρόσημο της ορίζουσας αλλάζει όταν εναλλάσσουμε τις γραμμές του πίνακα:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} &= cb - da \\ &= -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

(γ΄) Η ορίζουσα εξαρτάται γραμμικά από την πρώτη γραμμή του πίνακα :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} &= (a+a')d - (b+b')c \\ &= (ad - bc) + (a'd - b'c) \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} &= tad - tbc \\ &= t\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Από τα (β′) και (γ′) συμπεραίνουμε οτι η ορίζουσα επίσης εξαρτάται γραμμικά από τη δεύτερη γραμμή του πίνακα:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c+c' & d+d' \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} c+c' & d+d' \\ a & b \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c' & d' \\ a & b \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c' & d' \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Για να επεκτείνουμε την έννοια της ορίζουσας σε $n \times n$ πίνακες, θα χρησιμοποιήσουμε αυτές τις ιδιότητες. Θα δείξουμε οτι αυτές οι τρεις ιδιότητες χαρακτηρίζουν με μοναδικό τρόπο την ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα.

Ορισμός. Ορίζουσα ονομάζεται μία συνάρτηση στο σύνολο $M_{n,n}$ των $n \times n$ πινάκων,

$$\det : M_{n,n} \to \mathbb{R},$$

η οποία συμβολίζεται $\det A$ ή $|A|$, και ικανοποιεί τις ιδιότητες :

(α′) *Η ορίζουσα του $n \times n$ ταυτοτικού πίνακα είναι 1,*

$$\det I_n = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

(β′) *Εάν ο πίνακας B προκύπτει από τον πίνακα A με εναλλαγή δύο γραμμών, τότε*

$$\det B = -\det A.$$

(γ′) *Η $\det$ εξαρτάται γραμμικά από την πρώτη γραμμή του πίνακα.*

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & \dots & a_{1n}+a'_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

και

$$\begin{vmatrix} ta_{11} & \dots & ta_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Προσέξτε οτι δεν ισχύουν οι ισότητες $\det(A+B) = \det A + \det B$ και $\det(tA) = t\det A$, παρά μόνον όταν $n = 1$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (β′) και (γ′), βλέπουμε οτι η ορίζουσα εξαρτάται γραμμικά από οποιαδήποτε γραμμή του πίνακα.

Από αυτές τις τρεις ιδιότητες θα συμπεράνουμε διάφορες άλλες ιδιότητες των οριζουσών, που θα μας επιτρέψουν να δείξουμε οτι υπάρχει ακριβώς μια συνάρτηση που ικανοποιεί τις τρεις ιδιότητες.

(δ′) *Εάν δύο γραμμές του πίνακα A είναι ίσες, τότε* $\det A = 0$.

Πράγματι εάν εναλλάξουμε τις δύο ίσες γραμμές, ο πίνακας δεν αλλάζει, αλλά από το (β′), η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο. Άρα $\det A = -\det A$ και συνεπώς $\det A = 0$.

(ε′) *Οταν αφαιρούμε πολλαπλάσιο μίας γραμμής από μία άλλη, η ορίζουσα του πίνακα δεν αλλάζει.*

Εάν όλες οι γραμμές του πίνακα B είναι ίσες με αυτές του πίνακα A, εκτός απο τη γραμμή i, η οποία είναι ίση με τη γραμμή $j \neq i$ του πίνακα A, τότε η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει όταν αφαιρέσουμε απο την i-γραμμή του A τη j-γραμμή πολλαπλασιασμένη επί λ είναι ίση με $\det A - \lambda \det B$, αλλά $\det B = 0$.

Άσκηση 5.1 Ελέγξατε το (ε′) στον πίνακα

$$\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 5.2 Διατυπώστε το (ε′) με το συμβολισμό (a_{ij}).

Παρατήρηση Από τα (β′) και (ε′) προκύπτει οτι η διαδικασία απαλοιφής Gauss δεν αλλάζει την τιμή της ορίζουσας, παρά μόνο ως προς το πρόσημο.

(ϛ′) *Εάν ο πίνακας A έχει μία μηδενική γραμμή, τότε* $\det A = 0$, όπως αποδεικνύεται εύκολα από τα (δ′) και (ε′).

(ζ′) *Εάν D είναι διαγώνιος πίνακας*

$$\begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix},$$

τότε $\det D = d_1 d_2 \ldots d_n$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{vmatrix} &= d_1 \begin{vmatrix} 1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{vmatrix} \\ &= \cdots \\ &= d_1 d_2 \ldots d_n \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(η′) *Εάν ο A είναι τριγωνικός, τότε η ορίζουσα είναι το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου.*

Εάν a_{11}, a_{22}, … , a_{nn} είναι τα στοιχεία της διαγωνίου, και $a_{11} a_{22} \ldots a_{nn} \neq 0$, τότε αφαιρώντας πολλαπλάσια μίας γραμμής απο μία άλλη, μπορούμε να φέρουμε τον πίνακα σε διαγώνια μορφή με τα a_{11}, a_{22}, … , a_{nn} στη διαγώνιο. Αν A είναι κάτω τριγωνικός, αρχίζουμε με την πρώτη γραμμή, για να μηδενίσουμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης κάτω από το a_{11}. Αν A είναι άνω τριγωνικός, αρχίζουμε με την τελευταία γραμμή, για να μηδενίσουμε τα στοιχεία της τελευταίας στήλης πάνω από το a_{nn}. Άρα $\det A = a_{11},\, a_{22},\, \ldots\, ,\, a_{nn}$.

Εάν κάποιο απο τα $a_{i\,i}$ είναι μηδέν, τότε η απαλοιφή Gauss δίδει ένα πίνακα με μία μηδενική γραμμή. Άρα $\det A = 0$.

Τώρα μπορούμε να δείξουμε οτι υπάρχει μοναδική συνάρτηση στο σύνολο των τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων, η οποία να ικανοποιεί τις ιδιότητες (α′), (β′) και (γ′). Έτσι η ορίζουσα είναι *καλά ορισμένη*. Πράγματι, γνωρίζουμε οτι μπορούμε, με απαλοιφή Gauss, να μετατρέψουμε τον πίνακα A στον άνω τριγωνικό πίνακα U. Από το (ε′), η ορίζουσα του U είναι ίση με το γινόμενο των οδηγών. Αλλά από το (β′), η ορίζουσα του A διαφέρει μόνο ως προς το πρόσημο από την ορίζουσα του U: εάν κάναμε k εναλλαγές κατά την απαλοιφή, τότε $\det A = (-1)^k \det U$. Για να είναι η ορίζουσα του A μοναδικά προσδιορισμένη, πρέπει να δείξουμε οτι το πρόσημο $(-1)^k$ είναι μοναδικά προσδιορισμένο. Δηλαδή οτι δεν είναι δυνατόν ένα άρτιο πλήθος εναλλαγών και ένα περιττό πλήθος εναλλαγών, να δίνουν την ίδια μετάθεση των γραμμών του πίνακα A. Αυτό αποδεικνύεται στο Λήμμα 5.4, πιο κάτω.

Θεώρημα 5.1 *Η ορίζουσα* $\det A$ *είναι μηδέν εάν και μόνον εάν ο πίνακας* A *είναι ιδιόμορφος.*

Απόδειξη. Εάν ο A είναι ιδιόμορφος, τότε η απαλοιφή οδηγεί σε πίνακα με μία μηδενική γραμμή, άρα $\det A = 0$.

Αντίστροφα, εάν A δεν είναι ιδιόμορφος, η απαλοιφή οδηγεί σε άνω τριγωνικό πίνακα με μη μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο, και $\det A = \pm d_1\, d_2 \ldots d_n \neq 0$.

□

Θεώρημα 5.2 *Εάν* A, B *είναι* $n \times n$ *πίνακες,*

$$\det(AB) = \det A\, \det B.$$

Απόδειξη. Εάν ένας από τους πίνακες A, B είναι ιδιόμορφος, τότε το γινόμενο είναι επίσης ιδιόμορφο και $\det(AB) = 0 = \det A\, \det B$.

Υποθέτουμε οτι B δεν είναι ιδιόμορφος, και για κάθε μη ιδιόμορφο $n\times n$ πίνακα A ορίζουμε

$$d(A) = \frac{\det(AB)}{\det B}\,.$$

Θα δείξουμε οτι $d(A)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (α′), (β′), (γ′), και συνεπώς ορίζει μία συνάρτηση η οποία, εάν επεκταθεί με την τιμή 0 για ιδιόμορφους πίνακες, είναι ίση με την ορίζουσα.

Η ιδιότητα (α′): εάν $A = I$,

$$d(I) = \frac{\det IB}{\det B} = \frac{\det B}{\det B} = 1.$$

Η ιδιότητα (β′): εάν εναλλάξουμε δύο γραμμές του A, εναλλάσσονται οι αντίστοιχες γραμμές του AB. Άρα αλλάζει το πρόσημο του $\det AB$, και συνεπώς το πρόσημο του $d(A)$.

Η ιδιότητα (γ′): θεωρούμε πίνακες $C = (c_{ij})$ και $D = (d_{ij})$ τέτοιους ώστε για $j = 1, \ldots, n$,

$$a_{1j} = sc_{1j} + td_{1j}$$

και για $i > 1$

$$a_{ij} = c_{ij} = d_{ij}.$$

Τότε η πρώτη γραμμή του AB είναι

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\, b_{kj} = s \sum_{k=1}^{n} c_{1k}\, b_{kj} + t \sum d_{1k}\, b_{kj}$$

και ισχύει $\det AB = s \det CB + t \det DB$, και συνεπώς $d(A) = s\,d(C) + td(D)$. Άρα η $d(A)$ εξαρτάται γραμμικά απο την πρώτη γραμμή του A.

□

Θεώρημα 5.3 *Η ορίζουσα του αναστρόφου του πίνακα A είναι ίση με την ορίζουσα του A,*

$$\det(A^T) = \det A\,.$$

Απόδειξη. Ο πίνακας A είναι ιδιόμορφος εάν και μόνον εάν ο ανάστροφος A^T είναι ιδιόμορφος. Άρα σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\det A = 0 = \det A^T\,.$$

Εάν ο A δεν είναι ιδιόμορφος, τότε υπάρχει παραγοντοποίηση

$$PA = LDU\,. \tag{5.1}$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 5.2 και έχουμε

$$\det P \det A = \det L \det D \det U\,.$$

Αναστρέφοντας την 5.1, έχουμε

$$A^T P^T = U^T D^T L^T\,,$$

και συνεπώς

$$\det A^T \det P^T = \det U^T \det D^T \det L^T\,.$$

Αλλά οι πίνακες L, U, U^T και L^T είναι τριγωνικοί πίνακες με ένα στη διαγώνιο. Άρα οι ορίζουσές τους είναι ίσες με 1. Επίσης, για το διαγώνιο πίνακα D έχουμε $D^T = D$. Άρα το μόνο που μένει να δείξουμε είναι οτι $\det P^T = \det P$. Αλλά ο πίνακας P προκύπτει με εναλλαγές γραμμών από τον ταυτοτικό πίνακα I. Συνεπώς $\det P = \pm 1$. Επίσης, $PP^T = I$, και συνεπώς $\det P \det P^T = 1$. Συμπεραίνουμε οτι $\det P = \det P^T$. Έχουμε δείξει οτι

$$\det A = \det P^T \det L \det D \det U = \det P \det L^T \det D^T \det U^T = \det A^T\,.$$

□

Το Θεώρημα 5.3 αμέσως διπλασιάζει τον κατάλογο των ιδιοτήτων των οριζουσών: για κάθε ιδιότητα για τις γραμμές ενός πίνακα, ισχύει και η αντίστοιχη ιδιότητα για τις δτήλες του πίνακα.

Τελειώνουμε αυτή την παράγραφο με το Λήμμα που ολοκληρώνει την απόδειξη οτι η ορίζουσα είναι καλά ορισμένη.

Λήμμα 5.4 *Μία μετάθεση μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση άρτιου ή περιττού πλήθους εναλλαγών, αλλά όχι και τα δύο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μία μετάθεση $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. Ορίζουμε τον αριθμό N_σ να είναι το πλήθος των ζευγών (i, j) για τα οποία $i < j$ και $\sigma(i) > \sigma(j)$. Για παράδειγμα, για την ταυτοτική απεικόνιση στο $\{1, 2, 3\}$ αυτός ο αριθμός είναι $N_{\mathrm{id}} = 0$, ενώ για τη μετάθεση τ που εναλλάσσει τα 1 και 3, $N_\tau = 3$, αφού $\tau(1) > \tau(2)$, $\tau(1) > \tau(3)$ και $\tau(2) > \tau(3)$.

Θα δείξουμε οτι εάν τ είναι μία εναλλαγή δύο στοιχείων, η διαφορά $N_\sigma - N_{\sigma\circ\tau}$ είναι περιττός αριθμός. Έτσι, εάν N_σ είναι περιττός, απαιτείται περιττό πλήθος εναλλαγών τ_1, $\tau_2, \ldots, \tau_k$, έτσι ώστε $\sigma \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$ να είναι η ταυτοτική απεικόνιση, ενώ εάν N_σ είναι έρτιος, απαιτείται άρτιο πλήθος εναλλαγών.

Έστω α_i η μετάθεση που εναλλάσσει τους i και $i + 1$. Η σύνθεση $\sigma \circ \alpha_i$ έχει τις ίδιες τιμές με τη σ για $j \neq i, i + 1$, ενώ $\sigma \circ \alpha_i(i) = \sigma(i + 1)$ και $\sigma \circ \alpha_i(i + 1) = \sigma(i)$. Εάν $\sigma(i) < \sigma(i+1)$, τότε $N_{\sigma\circ\alpha_i} = N_\sigma + 1$, ενώ εάν $\sigma(i) > \sigma(i + 1)$, $N_{\sigma\circ\alpha_i} = N_\sigma - 1$.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θα δείξουμε οτι κάθε εναλλαγή τ είναι σύνθεση περιττού πλήθους εναλλαγών διαδοχικών αριθμών. Υποθέτουμε οτι τ εναλλάσσει τους αριθμούς k και $k+r$. Τότε χρειάζονται r εναλλαγές διαδοχικών αριθμών για να φέρουμε το k στη θέση $k+r$, $\alpha_{k+r-1}\circ\cdots\circ\alpha_{k+1}\circ\alpha_k$, και κατόπιν χρειάζονται $r-1$ εναλλαγές διαδοχικών αριθμών για να φέρουμε το $k + r$ στη θέση k, $\alpha_k \circ \cdots \circ \alpha_{k+r-2}$. Δηλαδή συνολικά ένας περιττός αριθμός $2r - 1$,

$$\tau = \alpha_k \circ \cdots \circ \alpha_{k+r-2} \circ \alpha_{k+r-1} \circ \alpha_{k+r-2} \circ \cdots \circ \alpha_{k+1} \circ \alpha_k\,.$$

□

Για τις μεταθέσεις μικρών συνόλων χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Έτσι, $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,2\,1\,3 \end{pmatrix}$ συμβολίζει τη μετάθεση που απεικονίζει το 1 στο 4, το 2 στο 2, το 3 στο 1 και το 4 στο 3.

Άσκηση 5.3 Εάν ένας 4×4 πίνακας A έχει ορίζουσα $\det A = \frac{1}{2}$, βρείτε τις ορίζουσες $\det(2A)$, $\det(-A)$, $\det(A^2)$ και $\det(A^{-1})$.

Άσκηση 5.4 Εάν ένας 3×3 πίνακας B έχει ορίζουσα $\det B = -1$, βρείτε τις ορίζουσες $\det(\frac{1}{2}B)$, $\det(-B)$, $\det(B^2)$ και $\det(B^{-1})$.

Άσκηση 5.5 Χρησιμοποιήστε απαλοιφή για να φέρετε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

σε άνω τριγωνική μορφή και να υπολογίσετε την ορίζουσα τους.

Εναλλάξτε τη δεύτερη και την τρίτη γραμμή του πίνακα B, και επαναλάβετε τη διαδικασία.

Άσκηση 5.6 Καταμετρήστε τις εναλλαγές γραμμών για να βρείτε τις ορίζουσες

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 5.7 Για κάθε n, πόσες εναλλαγές γραμμών απαιτούνται για να φέρουν τις γραμμές του πίνακα A στην αντίθεση διάταξη PA;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad PA = \begin{bmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}.$$

Βρείτε την όριζουσα του πίνακα P.

Άσκηση 5.8 Είναι οι ακόλουθες προτάσεις αληθείς ή ψευδείς· Δώστε αιτιολόγηση εάν είναι αληθείς, και αντιπαράδειγμα εάν είναι ψευδείς.

α′. Εάν οι πίνακες A και B είναι ίσοι, εκτός από το στοιχείο στη θέση $(1, 1)$, όπου $b_{11} = 2a_{11}$, τότε $\det B = 2 \det A$.

β′. Η ορίζουσα είναι το γινόμενο των οδηγών.

γ′. Εάν A είναι αντιστρέψιμος πίνακας και B ιδιόμορφος, τότε $A + B$ είναι αντιστρέψιμος.

δ′. Εάν A είναι αντιστρέψιμος πίνακας και B ιδιόμορφος, τότε AB είναι ιδιόμορφος.

ε′. Η ορίζουσα του πίνακα $AB - BA$ είναι μηδέν.

Άσκηση 5.9 Βρείτε τις ορίζουσες των

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}.$$

Για ποιές τιμές του λ είναι ο πίνακας $A - \lambda I$ ιδιόμορφος;

Άσκηση 5.10 Δείξτε οτι εάν το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του A είναι 0 τότε $\det A = 0$. Εάν το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του A είναι 1, τότε $\det(A - I) = 0$. Δείξτε με ένα παράδειγμα οτι αυτό δεν σημαίνει οτι $\det A = 1$.

Άσκηση 5.11 Υπενθυμίζουμε οτι αντισυμμετρικός ονομάζεται ένας πίνακας K εάν $K^T = -K$, όπως ο

$$K = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}.$$

α′. Εάν ο K είναι 3×3, δείξτε οτι $\det(-K) = (-1)^3 \det K$. Συμπεράνετε οτι η ορίζουσα ενός 3×3 αντισυμμετρικού πίνακα είναι 0.

β′. Βρείτε ένα παράδειγμα αντισυμμετρικού 4×4 πίνακα, με ορίζουσα $\det K \neq 0$.

Άσκηση 5.12 Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα A με απαλοιφή, και κατόπιν βρείτε τις ορίζουσες των πινάκων B, C, AB, A^TA και C^T.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 5.13 Επαληθεύστε οτι η 3×3 ορίζουσα Vandermonde είναι

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Άσκηση 5.14 Εάν ο $n \times n$ πίνακας A έχει στοιχεία $a_{ij} = ij$, δείξτε οτι $\det A = 0$, εκτός εάν $A = [1]$.

Άσκηση 5.15 Χρησιμοποιήστε απαλοιφή για να υπολογίσετε τις ορίζουσες

$$\begin{vmatrix} 101 & 201 & 301 \\ 102 & 202 & 302 \\ 103 & 203 & 303 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 1 & t^2 \\ t^2 & t & 1 \end{vmatrix}$$

Άσκηση 5.16 Εάν ο $n \times n$ πίνακας A έχει στοιχεία $a_{ij} = i + j$, δείξτε οτι $\det A = 0$, εκτός εάν $n = 1$ ή 2.

Άσκηση 5.17 Φέρτε τους πίνακες σε άνω τριγωνική μορφή και υπολογίστε την ορίζουσα.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 5.18 Εφαρμόστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss για να φέρετε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

σε τριγωνική μορφή και να υπολογίσετε την ορίζουσα.
(Καταγράφετε τυχόν εναλλαγές γραμμών για να προσδιορίσετε το πρόσημο.)

Άσκηση 5.19 Εάν γνωρίζετε οτι η ορίζουσα του A είναι 6, βρείτε την ορίζουσα του B, όπου οι γραμμές του A είναι a_1, a_2, a_3 και οι γραμμές του B είναι $a_1 + a_2$, $a_2 + a_3$, $a_3 + a_1$.

Άσκηση 5.20 Πως συνδέονται οι $\det(2A)$, $\det(-A)$ και $\det(A^2)$ με την $\det A$, όταν A είναι πίνακας n επί n;

Άσκηση 5.21 Προσδιορίστε εάν οι ακόλουθες μεταθέσεις είναι άρτιες ή περιττές

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,2\,1\,3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,1\,4\,2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,3\,2\,1 \end{pmatrix}.$$

Γράψτε τους 4×4 πίνακες που τις παριστάνουν, και υπολογίστε τις ορίζουσες.

Άσκηση 5.22 Υπολογίστε τις ορίζουσες α′. Του πίνακα τάξεως 1, $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

β′. Του άνω τριγωνικού πίνακα $U = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

γ′. Του πίνακα κάτω τριγωνικού πίνακα U^T.

δ′. Του πίνακα U^{-1}.

ε′. Του πίνακα $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}$, που προκύπτει από εναλλαγές γραμμών.

Άσκηση 5.23 Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα $\begin{bmatrix} a-mc & b-md \\ c-la & d-lb \end{bmatrix}$ χρησιμοποιώντας τη γραμμική εξάρτηση της ορίζουσας σε κάθε γραμμή.

Άσκηση 5.24 Εάν $B = M^{-1}AM$, γιατί ισχύει $\det B = \det A$; Δείξτε επίσης οτι $\det A^{-1}B = 1$.

Άσκηση 5.25 Εάν κάθε γραμμή του A έχει άθροισμα στοιχείων μηδέν, δείξτε οτι $\det A = 0$. Εάν κάθε γραμμή έχει άθροισμα στοιχείων 1, δείξτε οτι $\det(A-I) = 0$. Δείξτε με κάποιο παράδειγμα οτι το τελευταίο δεν σημαίνει $\det A = 1$.

Υπολογισμός της Ορίζουσας

Γνωρίζουμε οτι κάθε μη ιδιόμορφος $n \times n$ πίνακας παραγοντοποιήται με μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$A = P^{-1}\, L\, D\, U',$$

όπου P είναι πίνακας μεταθέσεως, L είναι κάτω τριγωνικός πίνακας με 1 στη διαγώνιο, D είναι διαγώνιος πίνακας με τους οδηγούς στη διαγώνιο, και U' είναι άνω τριγωνικός πίνακας με 1 στη διαγώνιο.

Από τα προηγούμενα έχουμε $\det P = \pm 1$, $\det L = \det U' = 1$ και $\det D$ ισούται με το γινόμενο των οδηγών. Άρα

$$\begin{aligned} \det A &= \det P^{-1} \det L \det D \det U' \\ &= \pm \text{ (γινόμενο των οδηγών) }. \end{aligned}$$

Αυτός είναι ο πρακτικότερος τρόπος υπολογισμού της ορίζουσας: χρησιμοποιούμε απαλοιφή για να φέρουμε τον πίνακα σε τριγωνική μορφή, η ορίζουσα είναι ίση με το γινόμενο των οδηγών πολλαπλασιασμένο με $(-1)^k$, όπου k είναι ο αριθμός των εναλλαγών γραμμών που χρησιμοποιήσαμε στην απαλοιφή.

Ο τύπος για την ορίζουσα

Από θεωρητική άποψη θα θέλαμε να γνωρίζουμε τον τρόπο εξάρτησης της ορίζουσας από κάθε στοιχείο του πίνακα, δηλαδή έναν τύπο για την ορίζουσα ανάλογο με το $\det A = ad-bc$ για 2×2 πίνακες. Ας δούμε πώς μπορούμε να αποδείξουμε αυτόν τον τύπο απο τις ιδιότητες της ορίζουσας:

Η πρώτη γραμμή του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός $[a\, b] = [a\, 0] + [0\, b]$, και συνεπώς

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} \\
&= 0 + ad + (-bc) + 0
\end{aligned}$$

Αν εφαρμόσουμε αυτή τη διαδικασία σε έναν $n\times n$ πίνακα, έχουμε, για την πρώτη γραμμή:

$$[a_{11} \, \ldots \, a_{1n}] = [a_{11}\, 0 \, \ldots \, 0] + [0\, a_{12}\, 0 \, \ldots \, 0] + \cdots + [0 \, \ldots \, 0\, a_{1n}]$$

άρα η ορίζουσα του πίνακα ισούται με το άθροισμα των οριζουσών n πινάκων, ο κάθε ένας από τους οποίους έχει το πολύ ένα μη μηδενικό στοιχείο στην πρώτη γραμμή. Επαναλαμβάνουμε αυτή την διαδικασία για τη δεύτερη γραμμή, και έχουμε το άθροισμα των οριζουσών n^2 πινάκων, ο κάθε ένας από τους οποίους έχει το πολύ ένα μη μηδενικό στοιχείο σε κάθε μία από τις δύο πρώτες γραμμές. Επαναλαμβάνουμε για όλες τις γραμμές του πίνακα, και καταλήγουμε με το άθροισμα των οριζουσών n^n πινάκων, ο κάθε ένα από τους οποίους έχει σε κάθε γραμμή μόνον ένα στοιχείο που μπορεί να μην είναι ίσο με 0. Υποθέτουμε οτι στην i γραμμή το στοιχείο που μπορεί να μην είναι 0 βρίσκεται στη j_i στήλη, είναι δηλαδή το στοιχείο a_{ij_i} .

Εξετάζουμε έναν απο αυτούς τους n^n πίνακες. Έχει το πολύ n μη μηδενικά στοιχεία. Εάν δύο απο τα μη μηδενικά στοιχεία βρίσκονται στην ίδια στήλη, τότε υπάρχει μία στήλη που περιέχει μόνο μηδέν, και συνεπώς η ορίζουσα του πίνακα είναι μηδέν. Συμπεραίνουμε οτι η ορίζουσα του πίνακα δεν μηδενίζεται μόνον όταν η αντιστοιχία $i \mapsto j_i$ είναι αμφιμονοσήμαντη, δηλαδή εάν είναι μετάθεση του συνόλου $\{1, \cdots, n\}$. Γνωρίζουμε οτι υπάρχουν $n!$ μεταθέσεις, και συνεπώς μόνο $n!$ απο τις n^n ορίζουσες μπορεί να μην είναι ίσες με μηδέν.

Ας εφαρμόσουμε αυτή τη διαδικασία σε ένα 3×3 πίνακα:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.
\end{aligned}$$

Αν συμβολίσουμε σ μία μετάθεση $\sigma : \{1,\, 2,\, 3\} \to \{1,\, 2,\, 3\}$, έχουμε

$$\det A = \sum_{\sigma} a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)} a_{3\,\sigma(3)} \, \det(P_\sigma)$$

όπου P_σ είναι ο πίνακας που προκύπτει εάν εφαρμόσουμε τη μετάθεση σ στις γραμμές του ταυτοτικού 3×3 πίνακα I. Τότε $\det P_\sigma$ είναι 1 εάν η μετάθεση είναι άρτια και -1 εάν η μετάθεση είναι περιττή.

Η προηγούμενη ανάλυση γενικεύεται σε $n \times n$ πίνακες, και δίδει τον ακόλουθο τύπο για την ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα.

Θεώρημα 5.5 *Εάν $A = (a_{ij})$ είναι $n \times n$ πίνακας,*

$$\det A = \sum_\sigma a_{1\,\sigma(1)} \ldots a_{n\,\sigma(n)} \det(P_\sigma) \tag{5.2}$$

όπου το άθροισμα λαμβάνεται πάνω απο το σύνολο όλων των μεταθέσεων n στοιχείων, και P_σ είναι ο πίνακας που προκύπτει εάν εφαρμόσουμε τη μετάθεση σ στις γραμμές του ταυτοτικού πίνακα.

Ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς μία γραμμή

Θεωρούμε τις μεταθέσεις σ για τις οποίες $\sigma(1) = 1$. Οι αντίστοιχοι όροι στο άθροισμα (5.2) περιέχουν τον παράγοντα a_{11}. Βγάζουμε το a_{11} ως κοινό παράγοντα αυτών των όρων, και συμβολίζουμε C_{11} το νέο άθροισμα:

$$\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=1}} a_{11}\, a_{2\,\sigma(2)} \,\ldots\, a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma = a_{11} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=1}} a_{2\,\sigma(2)} \,\ldots\, a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma \right) = a_{11} C_{11}\,.$$

Οι μεταθέσεις του $\{1, 2, \ldots, n\}$ για τις οποίες $\sigma(1) = 1$, αντιστοιχούν σε μεταθέσεις του $\{2, 3, \ldots, n\}$. Άρα το άθροισμα C_{11} είναι ακριβώς η ορίζουσα του πίνακα A_{11} που προκύπτει από τον A εάν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \sum_{\substack{\text{μετάθεση του } \{1,\,\ldots,\,n\} \\ \sigma(1)=1}} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma \\ &= \sum_{\text{μετάθεση του } \{2,\,\ldots,\,n\}} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma\,. \end{aligned}$$

Τώρα θεωρούμε τις μεταθέσεις σ για τις οποίες $\sigma(1) = 2$. Οι αντίστοιχοι όροι στο άθροισμα (5.2) περιέχουν τον παράγοντα a_{12}. Βγάζουμε το a_{12} ως κοινό παράγοντα αυτών των όρων, και συμβολίζουμε C_{12} το νέο άθροισμα:

$$\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=2}} a_{12}\, a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} \det P_\sigma \;=\; a_{12} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=2}} a_{2\,\sigma\,(2)} \cdots a_{n\,\sigma\,(n)} \det P_\sigma \right) \;=\; a_{12}\, C_{12}.$$

Κάθε μετάθεση σ του $\{1, 2, \ldots, n\}$ για την οποία $\sigma(1) = 2$, αντιστοιχεί σε μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση απο το $\{2, 3, \ldots, n\}$ στο $\{1, 3, 4, \ldots, n\}$, και το άθροισμα C_{12} διαφέρει μόνο ως προς το πρόσημο απο την ορίζουσα του πίνακα A_{12} που προκύπτει απο τον A εάν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και τη δεύτερη στήλη:

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \ldots & \times \\ a_{21} & \times & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \times & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$C_{12} \;=\; \sum_{\substack{\text{μετάθεση του}\{1,\,\dots,\,n\}\\ \sigma(1)=2}} a_{2\,\sigma(2)}\cdots a_{n\,\sigma(n)}\,\det P_\sigma\,.$$

Για να δούμε πώς διαφέρει το πρόσημο του C_{12} από αυτό της ορίζουσας $\det A_{12}$, εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό. Για $j = 1,\,\dots\,,n$ θεωρούμε τις αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις

$$\tau_j = \{1,\,\dots\,,n-1\} \to \{1,\,\dots\,,n\}\backslash\{j\}$$

που διατηρούν τη διάταξη των φυσικών αριθμών, και για κάθε μετάθεση σ του $\{1,\,\dots\,,n\}$, ορίζουμε τη μετάθεση $\sigma_i = \tau_{\sigma(i)}^{-1} \circ \sigma \circ \tau_i$ του $\{1,\,\dots\,,n-1\}$:

$$\{1,\,\dots\,,n-1\} \xrightarrow{\tau_i} \{1,\,\dots\,,n\}\backslash\{i\} \xrightarrow{\sigma} \{1,\,\dots\,,n\}\backslash\{\sigma(i)\} \xrightarrow{\tau_{\sigma(i)}^{-1}} \{1,\,\dots\,,n-1\}$$

για την οποία

$$\sigma_i(k) = \begin{cases} \sigma(k) & \text{εάν } k < i \text{ και } \sigma(k) < \sigma(i)\\ \sigma(k)-1 & \text{εάν } k < i \text{ και } \sigma(k) \geq \sigma(i)\\ \sigma(k+1) & \text{εάν } k \geq i \text{ και } \sigma(k+1) < \sigma(i)\\ \sigma(k+1)-1 & \text{εάν } k \geq i \text{ και } \sigma(k+1) \geq \sigma(i). \end{cases}$$

Λήμμα 5.6

$$\det P_\sigma = (-1)^{i+\sigma(i)}\,\det P_{\sigma_i}$$

Απόδειξη. Εάν $\sigma(n) = n$, είναι φανερό οτι

$$\det P_\sigma = \begin{vmatrix} P_{\sigma_n} & \\ & 1 \end{vmatrix} = \det P_{\sigma_n}\,,$$

εφόσον απαιτείται ο ίδιος αριθμός εναλλαγών γραμμών και στηλών για να καταλήξουμε στον ταυτοτικό πίνακα.

Στη γενική περίπτωση, για $i \in \{1,\,\dots\,,n\}$, ο πίνακας P_σ μετατρέπεται με $(n-i)$ εναλλαγές γραμμών και $(n-\sigma(i))$ εναλλαγές στηλών στον πίνακα $\begin{bmatrix} P_{\sigma_i} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$:

$$\begin{array}{cc} & \sigma(i) \\ i & \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & 1 & \\ & & \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{(n-i)\text{ εναλλαγές γραμμών}} \begin{array}{cc} & \sigma(i) \\ n & \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & 1 & \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{(n-\sigma(i))\text{ εναλλαγές στηλών}} \begin{array}{cc} & n \\ n & \left[\begin{array}{cc} P_{\sigma_i} & \\ & 1 \end{array}\right] \end{array}.$$

Συνεπώς

$$\det P_\sigma = (-1)^{(n-i)+(n-\sigma(i))}\,\det P_{\sigma_i} = (-1)^{i+\sigma(i)}\,\det P_{\sigma_i}$$

□

Με τον παραπάνω συμβολισμό,

$$\begin{aligned} C_{12} &= \sum_{\substack{\sigma\text{ μετάθεση του }\{1,\,\dots\,,n\}\\ \sigma(1)=2}} a_{\tau_1(1)\;\sigma\circ\tau_1(1)}\cdots a_{\tau_1(n-1)\;\sigma\circ\tau_1(n-1)}\,(-1)^{1+2}\,\det P_{\sigma_1}\\ &= -\sum_{\rho\text{ μετάθεση του }\{1,\,\dots\,,n-1\}} a_{\tau_1(1)\;\tau_2\circ\rho(1)}\cdots a_{\tau_1(n-1)\;\tau_2\circ\rho(n-1)}\,\det P_\rho\\ &= -\det A_{12}. \end{aligned}$$

Γενικότερα θεωρούμε τους όρους στο άθροισμα (5.2) που αντιστοιχούν σε μεταθέσεις σ για τις οποίες $\sigma(1) = j$:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=j}} a_{1j}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \det P_\sigma &= a_{1j} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=j}} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \det P_\sigma \right) \\ &= a_{1j}\, C_{1j}\end{aligned}$$

Το άθροισμα C_{1j} διαφέρει μόνο ως προς το πρόσημο απο την ορίζουσα του πίνακα A_{1j} που προκύπτει απο τον A εάν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και τη j στήλη.

$$A_{1j} = \begin{bmatrix} \times & \cdots & \times & \times & \times & \cdots & \times \\ a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & \times & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & \times & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

και

$$C_{1j} = (-1)^{1+j} \det(A_{1j})\,.$$

Θεωρούμε τώρα όλες τις μεταθέσεις σ του $\{1, \ldots, n\}$, ομαδοποιημένες ανάλογα με την τιμή του $\sigma(1)$ και έχουμε

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=j}} a_{1j}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \det P_\sigma \right) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(1)=j}} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \det P_\sigma \right),$$

δηλαδή

$$\det A = a_{11}\, C_{11} + a_{12}\, C_{12} + \cdots + a_{1n}\, C_{1n}\,.$$

Ορισμός. Εάν $A = (a_{ij})$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας, ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας ο οποίος προκύπτει απο το A εάν διαγράψουμε την i γραμμή και τη j στήλη, ονομάζεται **ελάσσων πίνακας** του στοιχείου a_{ij} του A.

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ο αριθμός $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ ονομάζεται **αλγεβρικό συμπλήρωμα** ή **συμπαράγοντας** του στοιχείου a_{ij}.

Η προηγούμενη μελέτη γενικεύεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.7 *1. Για κάθε $i = 1, \ldots, n$ ισχύει*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, C_{ij}$$

Η παραπάνω έκφραση είναι το ανάπτυγμα της ορίζουσας $\det A$ ως προς την i-γραμμή.

2. *Για κάθε* $j = 1, \ldots, n$ *ισχύει*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, C_{ij}$$

Η παραπάνω έκφραση είναι το ανάπτυγμα της ορίζουσας $\det A$ *ως προς τη* j*-στήλη.*

Παράδειγμα 5.1 Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα του τριδιαγώνιου πίνακα

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη γραμμή:

$$\det A_4 = 2(-1)^{1+1} \det(A_4)_{11} + (-1)(-1)^{1+2} \det(A_4)_{12}$$

όπου

$$(A_4)_{11} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = A_3$$

και

$$(A_4)_{12} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \ 0 \\ 0 & \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

ούτως ώστε $\det(A_4)_{12} = (-1)(-1)^{1+1} \det A_2$. Άρα

$$\det A_4 = 2 \det A_3 - \det A_2 \,.$$

Γενικά, για τον $n \times n$ τριδιαγώνιο πίνακα A_n με 2 στην κύρια διαγώνιο και (-1) στις άλλες δύο διαγωνίους ισχύει,

$$\det A_n = 2 \det A_{n-1} - \det A_{n-2}.$$

Άσκηση 5.26 Είναι οι ακόλουθες προτάσεις αληθείς ή ψευδείς·

α′. Η ορίζουσα του πίνακα $S^{-1}AS$ είναι ίση με την ορίζουσα του A.

β′. Εάν $\det A = 0$, τότε τουλάχιστον ένας από τους συμπαράγοντες είναι 0.

γ′. Ένας πίνακας με στοιχεία 0 και 1 έχει ορίζουσα 1, 0 ή -1.

Άσκηση 5.27 Εάν F_n είναι η ορίζουσα του $n \times n$ τριδιαγώνιου πίνακα με στοιχεία $1, 1, -1$,

$$F_n = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & 1 & 1 & -1 \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

δείξτε οτι $F_n = F_{n-1}+F_{n-2}$. Η ακολουθία F_n είναι η ακολουθία Fibonacci, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ….

Άσκηση 5.28 Για τους ακόλουθους πίνακες βρείτε τον μοναδικό μη μηδενικό όρο στον τύπο για την ορίζουσα.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Υπάρχει μόνον ένας τρόπος να επιλέξετε 4 μη μηδενικά στοιχεία από διαφορετικές γραμμές και στήλες. Υπολογίστε τις ορίζουσες $\det A$ και $\det B$.

Άσκηση 5.29 Για τους πίνακες της Άσκησης 5.28, αναπτύξτε τις ορίζουσες ως προς την πρώτη γραμμή. Υπολογίστε τους συμπαράγοντες (μη ξεχάσετε το πρόσημο $(-1)^{i+j}$) και τις ορίζουσες $\det A$ και $\det B$.

Άσκηση 5.30 Εξετάστε τους τριδιαγώνιους $n \times n$ πίνακες με 1 στις τρεις διαγωνίους:

$$A_1 = [1] \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \dots$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα D_n του A_n.

α΄. Αναπτύξτε την ορίζουσα σε συμπαράγοντες κατά μήκος της πρώτης γραμμής, και δείξτε οτι $D_n = D_{n-1} - D_{n-2}$.

β΄. Ξεκινώντας με $D_1 = 1$ και $D_2 = 0$, βρείτε τις D_3, D_4, …, D_8. Παρατηρήστε την περιοδικότητα στις τιμές της D_n, και βρείτε την D_{1000}.

Άσκηση 5.31

α΄. Βρείτε την παραγοντοποίηση LU, τους οδηγούς και την ορίζουσα του 4×4 πίνακα με στοιχεία $a_{ij} = \min\{i, j\}$.

β΄. Βρείτε την ορίζουσα του $A = (a_{ij})$, εάν $a_{ij} = \min\{n_i, n_j\}$ και $n_1 = 2$, $n_2 = 6$, $n_3 = 8$, $n_4 = 10$. Μπορείτε να βρείτε γενικό κανόνα για οποιουσδήποτε αριθμούς $n_1 \le n_2 \le n_3 \le n_4$;

Άσκηση 5.32 Τι πρόσημο έχει ο όρος $a_{15}\,a_{24}\,a_{33}\,a_{42}\,a_{51}$ στον τύπο για την ορίζουσα ενός 5×5 πίνακα. Δηλαδή είναι η μετάθεση $\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ περιττή ή άρτια;

Άσκηση 5.33 Χρησιμοποιήστε τον τύπο της ορίζουσας για να υπολογίσετε τις ορίζουσες των πινάκων:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Είναι οι στήλες αυτών των πινάκων γραμμικά ανεξάρτητες;

Άσκηση 5.34 Τοποθετήστε τον ελάχιστο αριθμό από 0 σε ένα 4×4 πίνακα, που εξασφαλίζουν οτι η ορίζουσα είναι 0. Τοποθετήστε όσο το δυνατόν περισσότερα μηδενικά, που να επιτρέπουν στην ορίζουσα να είναι διαφορετική από 0.

Άσκηση 5.35 Εάν $\det A \neq 0$, τουλάχιστον ένας από τους $n!$ όρους του τύπου της ορίζουσας δεν είναι 0. Συμπεράνετε οτι υπάρχει κάποια μετάθεση P των γραμμών του A τέτοια ώστε να μην υπάρχουν 0 στη διαγώνιο του PA.

Άσκηση 5.36 Βρείτε τους συμπαράγοντες και τον συζυγή πίνακα. Κατόπιν πολλαπλασιάστε με τον αρχικό πίνακα. Τι παρατηρήτε;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad B == \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 5.37 Ο πίνακας B_n είναι ίσος με τον -1, 2, -1 τριδιαγώνιο πίνακα A_n (δες Παράδειγμα 5.1) με τη διαφορά οτι στη θέση 1, 1 έχει $b_{11} = 1$ αντί για $a_{11} = 2$. Χρησιμοποιήστε συμπαράγοντες ως προς την τελευταία γραμμή, για να δείξετε οτι

$$|B_4| = 2|B_3| - |B_2| = 1\,.$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Η αναδρομική σχέση $|B_n| = 2|B_{n-1}| - |B_{n-2}|$ είναι ίδια με αυτή των A_n. Αλλάζουν όμως οι αρχικές τιμές. Μπορείτε να βρείτε τους οδηγούς του πίνακα B_n;

Άσκηση 5.38 Υπολογίστε τις ορίζουσες των 1, 3, 1 τριδιαγώνιων πινάκων

$$C_1 = [3], \quad C_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Μπορείτε να μαντέψετε την $\det C_4$; (Θυμηθείτε τους αριθμούς Fibonacci).

Χρησιμοποιήστε ανάπτυγμα σε συμπαράγοντες για να δείξετε την αναδρομική σχέση

$$\det C_n = 3 \det C_{n-1} - \det C_{n-2}\,.$$

Δείξτε οτι $\det C_n$ είναι ο αριθμός F_{2n+2} της ακολουθίας Fibonacci (Πρώτα δείξτε οτι $F_{2n+2} = 3F_{2n} - F_{2n-2}$)

Άσκηση 5.39 Εξηγήστε γιατί, εάν A και D είναι τετραγωνικοί πίνακες,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = |A|\;|D|\,.$$

Βρείτε ένα παράδειγμα με 2×2 πίνακες για να δείξετε οτι

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq |A|\,|D| - |C|\,|B|.$$

Άσκηση 5.40 Υποθέστε οτι $CD = -DC$ και βρείτε το λάθος στον επόμενο συλλογισμό: Παίρνοντας τις ορίζουσες, έχουμε $(\det C)(\det D) = -(\det D)\,(\det C)$, άρα ένας από τους C και D έχει μηδενική ορίζουσα. Συνεπώς, η $CD = -DC$ είναι δυνατή μόνον όταν ο C ή ο D είναι ιδιόμορφος.

Άσκηση 5.41 Βρείτε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -3 & -1-\lambda & 3 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Γιά ποιές τιμές του λ είναι ο πίνακας A αντιστρέψιμος;

Άσκηση 5.42 Έστω

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

α′. Χρησιμοποιήστε κατάλληλη πράξη μεταξύ των γραμμών του B για να έχετε μια γραμμή με δύο μηδενικά, και χρησιμοποιήστε το ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς τη γραμμή, για να υπολογίσετε την ορίζουσα του B.

β′. Υπολογίστε όλους τους συμπαράγοντες του πίνακα B. Χρησιμοποιήστε τους πίνακες συμπαραγόντων για να υπολογίσετε τον αντίστροφο του B.

Εφαρμογές των Οριζουσών

Υπολογισμός του αντιστρόφου

Ορισμός. Θεωρούμε τον πίνακα συμπαραγόντων $C = (C_{ij})$ που έχει ως στοιχείο στη θέση $(i,\, j)$ τον συμπαράγοντα του στοιχείου a_{ij} του A. Ο **ανάστροφος** αυτού του πίνακα, C^T, ονομάζεται **προσαρτημένος πίνακας** ή **συζυγής πίνακας** του A, και συμβολίζεται $\operatorname{adj} A$,

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Λήμμα 5.8 *Εάν $A = (a_{ij})$ είναι $n \times n$ πίνακας, C_{ij} ο συμπαράγων του στοιχείου a_{ij}, και $b = (b_1,\, \ldots,\, b_n)$ διάνυσμα, τότε*

$$b_1\, C_{i1} + b_2\, C_{i2} + \cdots + b_n\, C_{in}$$

είναι η ορίζουσα του πίνακα B^i που προκύπτει εάν αντικαταστήσουμε το b στην i γραμμή του πίνακα A,

$$B^i = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)\,n} \\ b_1 & \cdots & b_n \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,n} \end{bmatrix}$$

και

$$b_1\,C_{1\,j} + b_2\,C_{2\,j} + \,\cdots\, + b_n\,C_{n\,j}$$

είναι η ορίζουσα του πίνακα B_j που προκύπτει εάν αντικαταστήσουμε το b στην j στήλη του πίνακα A,

$$B_j = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,(j-1)} & b_1 & a_{1\,(j+1)} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,(j-1)} & b_n & a_{n\,(j+1)} & \cdots & a_{n\,n} \end{bmatrix}.$$

Απόδειξη. Τα στοιχεία της j στήλης του πίνακα A δεν εμφανίζονται στους συμπαράγοντες $C_{1\,j}, \cdots, C_{n\,j}$. Συνεπώς αυτοί οι συμπαράγοντες του A είναι ίσοι με τους συμπαράγοντες του πίνακα B_j. Το ανάπτυγμα της ορίζουσας του B_j ως προς τη j-στήλη είναι

$$\det B_j = b_1 C_{1\,j} + b_2 C_{2\,j} + \,\cdots\, + b_n C_{n\,j}\,.$$

Το αποτέλεσμα για τους πίνακες B^i αποδεικνύεται ανάλογα.

□

Πρόταση 5.9 *Εάν A είναι $n \times n$ πίνακας,*

$$A\,(\mathrm{adj}\ A) = (\mathrm{adj}\ A)\,A = \det A\,\cdot\,I_n\,.$$

Απόδειξη. Το στοιχείο στη θέση $(i\,,\,j)$ του γινομένου $A\,(\mathrm{adj}\ A)$ είναι

$$a_{i\,1}C_{j\,1} + a_{i\,2}C_{j\,2} + \,\cdots\, + a_{i\,n}C_{j\,n}.$$

Προσέξτε τη θέση των δεικτών, υπενθυμίζουμε οτι $\mathrm{adj}\,A = (C_{i\,j})^T$. Εάν $i = j$, το άθροισμα είναι ακριβώς το ανάπτυγμα της $\det A$ ως προς την i-γραμμή. Εάν $i \neq j$ το άθροισμα δίδει την ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει εάν αντικαταστήσουμε την i-γραμμή του A στη j-γραμμή του A. Αλλά αυτός ο πίνακας έχει δύο γραμμές ίσες, και συνεπώς η ορίζουσα του είναι μηδέν.
Άρα

$$A\,(\mathrm{adj}\ A) = \begin{bmatrix} \det A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det A \end{bmatrix}.$$

Η απόδειξη για το $(\mathrm{adj}\ A)\,A$ είναι ανάλογη.

□

Θεώρημα 5.10 *Εάν* $\det A \neq 0$ *τότε*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\mathrm{adj}\,A)\,.$$

Παρατήρηση. Αυτός ο τύπος για το αντίστροφο ενός $n \times n$ πίνακα έχει θεωρητικό ενδιαφέρον, αλλά δεν αποτελεί πρακτικό τρόπο υπολογισμού του αντιστρόφου, καθώς απαιτεί πολύ περισσότερες πράξεις απ΄ οτι η μέθοδος Gauss - Jordan.

Η λύση της εξίσωσης $Ax = b$

Θεώρημα 5.11 (Κανόνας του Cramer) *Εάν $\det A \neq 0$, η λύση της εξίσωσης*

$$A\,x = b$$

είναι το διάνυσμα $x = (x_1,\, x_2,\, \ldots\, , x_n)$, όπου

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A}$$

και B_j είναι ο πίνακας που προκύπτει εάν αντικαταστήσουμε το b στη j στήλη του A.

Απόδειξη. Εφόσον $\det A \neq 0$, ο A είναι μη ιδιόμορφος, και

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det A}(\operatorname{adj} A)\, b$$

Άρα

$$x_j = \frac{1}{\det A}\,(C_{1\,j}\, b_1 + \,\cdots\, + C_{n\,j}\, b_n) = \frac{\det B_j}{\det A}.$$

□

Παρατηρούμε οτι ο κανόνας του Cramer δεν αποτελεί πρακτικό τρόπο υπολογισμού της λύσης της εξίσωσης $Ax = b$, καθώς απαιτεί πολύ περισσότερες πράξεις απο τη μέθοδο της απαλοιφής Gauss.

Παράδειγμα 5.2 Για να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 3\ x_2 & = & 0 \\ 2\ x_1 & + & 4\ x_2 & = & 6 \end{array}$$

αντικαθιστούμε το διάνυσμα $(0,\, 6)$ στην πρώτη στήλη του πίνακα για να υπολογίσουμε το x_1, και στη δεύτερη στήλη του πίνακα για να υπολογίσουμε το x_2:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-18}{-2} = 9, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{6}{-2} = -3\,.$$

Ο όγκος του n-διάστατου παραλληλεπίπεδου

Εάν τα n διανύσματα $u_1,\, \ldots,\, u_n$ που αποτελούν τις ακμές ενός παραλληλεπιπέδου είναι ορθογώνια, τότε ο όγκος του παραλληλεπιπέδου είναι το γινόμενο των μηκών των διανυσμάτων,

$$V = ||u_1||\, ||u_2|| \cdots ||u_n||\,.$$

Υποθέτουμε οτι τα $u_1, \ldots, u_n$ είναι οι στήλες του πίνακα A. Αφού αυτά είναι ορθογώνια $u_i^T u_j = 0$ εάν $i \neq j$ και έχουμε

$$A^T A = \begin{bmatrix} u_1^T u_1 & \cdots & u_1^T u_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_n^T u_1 & \cdots & u_n^T u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ||u_1||^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & ||u_n||^2 \end{bmatrix}.$$

Άρα

$$V^2 = ||u_1||^2 \cdots ||u_n||^2 = \det(A^T A) = (\det A)^2,$$

και ο όγκος είναι ίσος με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας,

$$V = |\det A|.$$

Το πρόσημο της ορίζουσας εξαρτάται από τη διάταξη των διανυσμάτων $u_1, \ldots, u_n$. Λέμε οτι τα $u_1, \ldots, u_n$ αποτελούν *''δεξιόστροφο σύστημα''* εάν $\det A > 0$ και *''αριστερόστροφο σύστημα''* εάν $\det A < 0$.

Εάν τα διανύσματα δεν είναι ορθογώνια, τότε ο όγκος δεν είναι ίσος με το γινόμενο των μηκών των πλευρών. Σε δύο διαστάσεις, το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου με πλευρές w_1 και w_2 είναι ίσο με το μήκος της πλευράς w_1 επί το ''ύψος''. Εάν κάνετε ένα πρόχειρο σχήμα, θα δείτε οτι το ''ύψος'' είναι ακριβώς το μήκος του ορθογωνίου διανύσματος που παίρνουμε στο πρώτο βήμα της διαδικασίας Gram-Schmidt: το διάνυσμα $w_2' = w_2 - s w_1$ το οποίο είναι ορθογώνιο στο w_1. Αλλά η ορίζουσα του πίνακα με στήλες w_1 και w_2' είναι ίση με την ορίζουσα του πίνακα με στήλες w_1 και w_2. Άρα πάλι έχουμε

$$V = |\det A|$$

όπου A είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα w_1 και w_2.

Σε n διαστάσεις, ισχύει οτι όταν αφαιρέσουμε πολλαπλάσια των διανυσμάτων $w_1, \ldots, w_{k-1}$ από το διάνυσμα w_k, δεν αλλάζει ούτε ο όγκος του n-διάστατου παραλληλεπίπεδου που αντιστοιχεί σε αυτά τα διανύσματα, ούτε η ορίζουσα του πίνακα. Αφού μπορούμε, επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία να κατασκευάσουμε ορθογώνια διανύσματα $w_1', w_2', \ldots, w_n'$, για τα οποία γνωρίζουμε οτι ο όγκος είναι ίσος με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας, έχουμε και στη γενική περίπτωση

$$V = |\det A|.$$

Ο τύπος για τους οδηγούς

Τώρα μπορούμε να δώσουμε ένα κριτήριο για το πότε είναι δυνατόν να ολοκληρωθεί η απαλοιφή Gauss χωρίς εναλλαγές γραμμών, και σε αυτήν την περίπτωση να εκφράσουμε τους οδηγούς μέσω οριζουσών. Η βασική παρατήρηση είναι οτι, εάν δεν απαιτούνται εναλλαγές γραμμών, οι k πρώτοι οδηγοί καθορίζονται από τον $k \times k$ υποπίνακα A_k στο άνω αριστερό μέρος του πίνακα A. Για παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & b & e \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & \frac{af-ec}{a} \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Ο πρώτος οδηγός προφανώς εξαρτάται μόνον από τον $A_1 = [a]$. Ο δεύτερος οδηγός εξαρτάται από τα στοιχεία a, b, c, d που αποτελούν τον υποπίνακα $A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Μετά το πρώτο βήμα της απαλοιφής, ο υποπίνακας A_2 έχει γίνει άνω τριγωνικός, και δεν μεταβάλεται από τα επόμενα βήματα της απαλοιφής.

Γενικότερα, για ένα $n \times n$ τετραγωνικό πίνακα A_1 και $k \leq n$, έχουμε, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό των μπλόκ,

$$\begin{aligned} A = LU &= \begin{bmatrix} L_k & O \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k & F \\ 0 & G \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_k U_k & L_k F \\ B U_k & BF + CG \end{bmatrix} \end{aligned}$$

και συνεπώς $A_k = L_k U_k$. Αλλά L_k είναι κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο, συνεπώς $\det L_k = 1$, ενώ U_k είναι άνω τριγωνικός με τους k πρώτους οδηγούς $d_1, \ldots, d_k$ στη διαγώνιο. Άρα

$$\det A_k = \det U_k = d_1 \ldots d_k.$$

Αφού $\det A_{k-1} = d_1 \ldots d_{k-1}$, μπορούμε να εκφράσουμε τον οδηγό d_k ως το πηλίκο

$$d_k = \frac{\det A_k}{\det A_{k-1}}.$$

Συμβατικά, θέτουμε $\det A_0 = 1$, έτσι ώστε αυτός ο τύπος να ισχύει και για $k = 1$. Καταγράφουμε αυτό το αποτέλεσμα στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.12 *Η απαλοιφή Gauss σε έναν τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα A ολοκληρώνεται χωρίς εναλλαγές γραμμών εάν και μόνον εάν όλοι οι άνω αριστερά τετραγωνικοί υποπίνακες $A_1, \ldots, A_n$ είναι μή ιδιόμορφοι. Τότε οι οδηγοί $d_1, \ldots, d_n$ δίδονται από τα πηλίκα*

$$d_k = \frac{\det A_k}{\det A_{k-1}}.$$

Άσκηση 5.43 Βρείτε τους συμπαράγοντες και την ορίζουσα του τριγωνικού πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Σχηματίστε τον ανάστροφο του πίνακα συμπαραγόντων C, και επαληθεύστε οτι $AC^T = (\det A)I$.

Άσκηση 5.44 Υπολογίστε τους συμπαράγοντες C_{11}, C_{21}, C_{23} και C_{33} του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 5.45 Υπολογίστε τους συμπαράγοντες C_{12}, C_{24}, C_{33} και C_{43} του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -5 \\ 8 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 5.46

α′. Σχεδιάστε το τρίγωνο με κορυφές $A = (2, 2)$, $B = (-1, 3)$ και $C = (0, 0)$. Θεωρήστε το ως το μισό ενός παραλληλογράμμου, και εξηγήστε γιατί το εμβαδόν του είναι

$$\text{εμβαδόν}(ABC) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

β′. Τώρα θεωρήστε το τρίγωνο με κορυφές A, B και $D = (1, -4)$, και εξηγήστε γιατί το εμβαδόν του είναι

$$\text{εμβαδόν}(ABD) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

(Αφαιρέστε μία γραμμή από τις άλλες δύο).

Άσκηση 5.47 Χρησιμοποιήστε ορίζουσες για να υπολογίσετε τους οδηγούς των πινάκων

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Εφαρμόστε τη διαδικασία απαλοιφής για να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα σας.

Άσκηση 5.48 Χρησιμοποιήστε τον κανόνα Cramer για να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & 1 \\ cx & + & dy & = & 0 \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & & & + & 3z & = & 0 \end{array}$$

Άσκηση 5.49 Θεωρήστε τον πίνακα M που προκύπτει όταν ένα διάνυσμα $x = (x_1, \ldots, x_n)$ αντικαθιστά τη στήλη j του ταυτοτικού πίνακα.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & x_1 & & \\ & 1 & \cdot & & \\ & & x_j & & \\ & & \cdot & 1 & \\ & & x_n & & 1 \end{bmatrix}$$

α′. Βρείτε την ορίζουσα του M.

β′. Εάν $Ax = b$, δείξτε οτι AM είναι ο πίνακας B_j της εξίσωσης,

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A}, \text{ όπου } B_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & a_{nn} \end{bmatrix},$$

και η δεξιά πλευρά b εμφανίζεται στην j-οστή στήλη.

γ′. Συμπεράνετε τον κανόνα του Cramer, παίρνοντας ορίζουσες στην $AM = B_j$.

Άσκηση 5.50 Εξηγήστε γιατί εάν όλοι οι συμπαράγοντες είναι 0, ο πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος. Εάν όλοι οι συμπαράγοντες είναι διαφορετικοί από το 0, είναι ο πίνακας αντιστρέψιμος;

Άσκηση 5.51 Εάν οι στήλες ενός 4×4 πίνακα έχουν μήκος ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 και ℓ_4, ποιά είναι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή για την ορίζουσα του πίνακα. Εάν όλα τα στοιχεία του πίνακα είναι 1 ή -1, ποιά είναι η μεγαλύτερη τιμή της ορίζουσας.

Κεφάλαιο 6

Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα.

Στο πρώτο μέρος του μαθήματος, το βασικό αντικείμενο που μελετήσαμε ήταν η εξίσωση

$$Ax = b\,.$$

Από τη μελέτη αυτής της εξίσωσης κατασκευάσαμε μία πλούσια θεωρία, που περιγράφει, μεταξύ άλλων, τη γραμμική απεικόνιση $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax$. Η L_A απεικονίζει τα στοιχεία του $\mathcal{N}(A)$ στο 0, ενώ απεικονίζει τα στοιχεία του χώρου γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$ αμφιμονοσήμαντα στα στοιχεία του χώρου στηλών $\mathcal{R}(A)$.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε, για έναν τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα A, την εξίσωση

$$Ax = \lambda x\,, \tag{6.1}$$

όπου οι άγνωστοι είναι ο αριθμός λ και το διάνυσμα x. Δηλαδή αναζητούμε διανύσματα στα οποία η απεικόνιση L_A δρα με τον πιο απλό τρόπο: τα πολλαπλασιάζει με έναν αριθμό λ, χωρίς να αλλάζει τη διεύθυνσή τους.

Παράδειγμα 6.1 Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ αλλάζει τη διεύθυνση του διανύσματος $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ενώ το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ απλώς το πολλαπλασιάζει με τον αριθμό 3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 6.2 Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ και τα διανύσματα $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Παρατηρούμε οτι

$$Ax = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4x$$

και

$$Ay = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix} = 6y\,.$$

Εάν γράψουμε οποιοδήποτε διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^2$ ως γραμμικό συνδυασμό των x και y, εύκολα βρίσκουμε τη δράση του A σε αυτό: εάν $u = cx + dy$, τότε

$$\begin{aligned} Au &= cAx + dAy \\ &= 4cx + 6dy. \end{aligned}$$

Τα διανύσματα x που ικανοποιούν την εξίσωση $Ax = \lambda x$ για κάποιο αριθμό λ είναι, κατά κάποιο τρόπο, ειδικά διανύσματα του πίνακα A: αυτά πάνω στα οποία ο πολλαπλασιασμός με τον A δρα με τον απλούστερο τρόπο. Γι' αυτό ονομάζονται **ιδιοδιανύσματα** του πίνακα (στα αγγλικά eigenvectors, έχει διατηρηθεί ο γερμανικός όρος ως πρώτο συνθετικό). Εκτός από το θεωρητικό ενδιαφέρον, για να κατανοήσουμε καλύτερα τη δράση του πίνακα, τα ιδιοδιανύσματα παρουσιάζουν αμέτρητες εφαρμογές, σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών και άλλων επιστημών.

Πώς θα βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης $Ax = \lambda x$; Παρατηρούμε οτι για οποιοδήποτε λ, το διάνυσμα 0 είναι πάντα μία λύση. Μας ενδιαφέρουν οι μή μηδενικές λύσεις.

Γράφουμε την εξίσωση 6.1 στη μορφή

$$Ax - \lambda x = 0$$

και εισάγουμε τον ταυτοτικό πίνακα I,

$$Ax - \lambda I x = 0$$

για να καταλήξουμε στην εξίσωση

$$(A - \lambda I)x = 0\,.$$

Βλέπουμε οτι τα x που αναζητούμε βρίσκονται στον μηδενοχώρο του πίνακα $A - \lambda I$. Συνεπώς, το πρώτο βήμα είναι να προσδιορίσουμε τους αριθμούς λ για τους οποίους ο πίνακας $A - \lambda I$ έχει μη τετριμμένο μηδενοχώρο, δηλαδή είναι ιδιόμορφος. Η ορίζουσα του πίνακα μας δίδει το κατάλληλο κριτήριο: ο $A - \lambda I$ είναι ιδιόμορφος εάν και μόνον εάν $\det(A - \lambda I) = 0$.

Ορισμός. Οι **ιδιοτιμές** του $n \times n$ πίνακα A είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$\det(A - \lambda I) = 0\,.$$

Εάν λ_i είναι μία λύση, τότε $A - \lambda_i I$ έχει μη τετριμμένο μηδενοχώρο. Τα *μη μηδενικά διανύσματα* του μηδενοχώρου του $A - \lambda_i I$ είναι τα **ιδιοδιανύσματα** του A για την ιδιοτιμή λ_i. Όλος ο μηδενοχώρος του $A - \lambda_i I$ ονομάζεται **ιδιοχώρος** του A για την ιδιοτιμή λ_i.

Η ορίζουσα $\det(A - \lambda I)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n με μεταβλητή λ. Ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πίνακα A. Συνεπώς οι ιδιοτιμές είναι οι *ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.*

Παράδειγμα 6.3 Θεωρούμε τον 2×2 πίνακα A,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Για να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές, θεωρούμε την ορίζουσα

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(4-\lambda)(3+\lambda) + 10 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2 \end{aligned}$$

Οι ρίζες του πολυωνύμου $\lambda^2 - \lambda - 2$ είναι -1 και 2.

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = 2\,.$$

Τα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$, είναι οι μη μηδενικές λύσεις της ομογενούς εξίσωσης

$$(A - \lambda_1 I)x = 0\,,$$

δηλαδή της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Ένα *ιδιοδιάνυσμα* είναι το $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, ενώ ο *ιδιόχωρος* του A για την ιδιοτομή $\lambda_1 = -1$ είναι ο μηδενοχώρος του πίνακα $A - \lambda_1 I$, δηλαδή ο υπόχωρος

$$X_{\lambda_1} = \{t(1,\,1) \mid t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ έχουμε, ανάλογα,

$$(A - \lambda_2 I)x = 0$$

ή

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Ένα ιδιοδιάνυσμα είναι το $x = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, και ο ιδιόχωρος του A για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ είναι ο υπόχωρος

$$X_2 = \{t(5,\,2) \mid t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Παράδειγμα 6.4 Θεωρούμε τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του πολυωνύμου

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(3-\lambda) + 8 + 4(1-\lambda) - 4(3-\lambda) \\ &= (1-\lambda)^2(3-\lambda)\,. \end{aligned}$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 3$.

Τα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ είναι οι μη μηδενικές λύσεις της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Φέρνουμε τον πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, και έχουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Μία λύση της εξίσωσης είναι η $x = (1,\,1,\,1)$. Άρα ένα ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ είναι το $x = (1,\,1,\,1)$. Ο ιδιόχωρος του A για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ είναι ο χώρος λύσεων της εξίσωσης,

$$X_1 = \{t(1,\,1,\,1) \mid t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Τα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ είναι λύσεις της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Ένα ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ είναι το $x = (0,\,1,\,1)$. Ο ιδιόχωρος του A για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ είναι

$$X_2 = \{t(0,\,1,\,1) \mid t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Παρατηρούμε οτι σε αυτό το παράδειγμα, παρ' όλο που το χαρακτηριστικό πολυώνυμο παραγοντοποιείται πλήρως σε διώνυμα, ο 3×3 πίνακας έχει μόνο δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Λέμε οτι η ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ έχει *αλγεβρική πολλαπλότητα* 2, αλλά *γεωμετρική πολλαπλότητα* 1. Γενικότερα, **αλγεβρική πολλαπλότητα** μίας ιδιοτιμής είναι η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής ως ρίζας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, ενώ **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής είναι η διάσταση του ιδιόχωρου που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή.

Παράδειγμα 6.5 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda^2 - 8\lambda + 25)(2-\lambda)\,. \end{aligned}$$

Το πολυώνυμο έχει μία πραγματική ρίζα, $\lambda_1 = 2$. Οι άλλες δύο ρίζες είναι μιγαδικές,

$$\lambda_2 = 4 + 3\mathrm{i} \quad \text{και} \quad \lambda_3 = 4 - 3\mathrm{i}\,.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ έχουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

από την οποία βρίσκουμε οτι ένα ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ είναι το $x = (0,\, 1,\, 0)$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4 + 3\mathrm{i}$ έχουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} -3\mathrm{i} & 0 & 3 \\ 0 & -2-3\mathrm{i} & 0 \\ -3 & 0 & -3\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Φέρνουμε τον πίνακα σε κλιμακωτή μορφή και έχουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} -3\mathrm{i} & 0 & 3 \\ 0 & -2-3\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

από την οποία βρίσκουμε οτι ένα ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4 + 3\mathrm{i}$ είναι το $x = (-\mathrm{i},\, 0,\, 1)$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 4 - 3\mathrm{i}$ έχουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 3\mathrm{i} & 0 & 3 \\ 0 & -2+3\mathrm{i} & 0 \\ -3 & 0 & 3\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

από την οποία βρίσκουμε οτι ένα ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 4 - 3\mathrm{i}$ είναι το $x = (\mathrm{i},\, 0,\, 1)$.

Εάν θεωρήσουμε τον πίνακα A πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς, αυτός έχει μόνο μία ιδιοτιμή, $\lambda_1 = 2$, και ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι ο

$$X_1 = \{t(0,\, 1,\, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Εάν θεωρήσουμε τον πίνακα A πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς τότε ο ιδιόχωρος για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ είναι ο

$$X_1 = \{t(0,\, 1,\, 0) \mid t \in \mathbb{C}\}\,,$$

ο ιδιόχωρος για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4 + 3\mathrm{i}$ είναι ο

$$X_2 = \{t(-\mathrm{i},\, 0,\, 1) \mid t \in \mathbb{C}\}$$

και ο ιδιόχωρος για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 4 - 3i$ είναι ο

$$X_3 = \{t(\mathrm{i},\, 0,\, 1) \mid t \in \mathbb{C}\}\,.$$

Ανακεφαλαιώνουμε τη διαδικασία για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων ενός $n \times n$ πίνακα

1. Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα $A - \lambda I$. Αυτή είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n ως προς τη μεταβλητή λ, το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* του A.

2. Βρίσκουμε τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυώνυμου. Αυτές είναι οι *ιδιοτιμές* του A.

3. Για κάθε ιδιοτιμή λ_i, βρίσκουμε τις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης

   $$(A - \lambda_i I)x = 0\,.$$

   Κάθε μη μηδενική λύση είναι ένα *ιδιοδιάνυσμα* του πίνακα A για την ιδιοτιμή λ_i, ενώ το σύνολο όλων των λύσεων είναι ο *ιδιόχωρος* του A για την ιδιοτιμή λ_i.

Εν αντιθέσει με την περίπτωση της λύσης του συστήματος $Ax = b$ με απαλοιφή Gauss, η διαδικασία που περιγράφουμε εδώ δεν δίδει έναν αλγόριθμο για τον αναλυτικό υπολογισμό των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων. Το πρόβλημα βρίσκεται στο βήμα 2. Ενώ γνωρίζουμε οτι κάθε πολυώνυμο βαθμού n έχει n ρίζες (στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών), για πολυώνυμα βαθμού $n \geq 5$ δεν είναι δυνατόν να βρεθεί αναλυτικός τύπος για τον υπολογισμό τους (όπως ο τύπος των ριζών της δευτεροβάθμιας εξίσωσης)[1].

Παρ' όλο που δεν υπάρχει αναλυτικός τύπος που να δίδει τις ρίζες στη γενική περίπτωση, σε πολλές ειδικές περιπτώσεις μπορούμε να τις προσδιορίσουμε αναλυτικά, ή μπορούμε να τις προσεγγίσουμε αριθμητικά. Μπορούμε όμως να έχουμε κάποια πληροφορία για τις ιδιοτιμές ακόμα και χωρίς να τις βρούμε.

Το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων ενός πίνακα ονομάζεται **ίχνος** του πίνακα (trace) και συμβολίζεται $\operatorname{tr} A$.

Πρόταση 6.1 *Θεωρούμε έναν $n \times n$ πίνακα A πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς. Μετρώντας την αλγεβρική πολλαπλότητα, ο πίνακας έχει n ιδιοτιμές, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, όχι υποχρεωτικά όλες διαφορετικές.*

1. *Το άθροισμα των ιδιοτιμών του A είναι ίσο με το ίχνος του πίνακα,*

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr} A$$

2. *Το γινόμενο των ιδιοτιμών του A είναι ίσο με την ορίζουσα του πίνακα,*

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det A\,.$$

Απόδειξη.

1. Εάν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A, έχουμε

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)\,.$$

Συγκρίνουμε τους όρους τάξεως $n-1$ στα δύο πολυώνυμα. Οι όροι στους οποίους το λ εμφανίζεται στη δύναμη $n-1$ στην ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

πρέπει να προέρχονται από όρους της ορίζουσας που είναι γινόμενο τουλάχιστον $n-1$ στοιχείων στη διαγώνιο του πίνακα. Αλλά ένας όρος της ορίζουσας δεν μπορεί να περιέχει περισσότερα από ένα στοιχείο από κάθε στήλη και από κάθε γραμμή του πίνακα. Συνεπώς, ο μοναδικός όρος που περιέχει το γινόμενο $n-1$ διαγώνιων στοιχείων, είναι το γινόμενο όλων των διαγώνιων στοιχείων,

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)\,.$$

Ο όρος τάξεως $n-1$ αυτού του πολυωνύμου είναι

$$a_{11}\lambda^{n-1} + a_{22}\lambda^{n-1} + \cdots + a_{nn}\lambda^{n-1} = (a_{11} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1}\,.$$

[1]Αυτό είναι το περιεχόμενο της θεωρίας Galois (την οποία μπορείτε να μελετήσετε στο μάθημα Θεωρία Σωμάτων), μίας πολύ ενδιαφέρουσας θεωρίας που δημιούργησε ένας ακόμη πιο ενδιαφέρων άνθρωπος.

Από την άλλη πλευρά ο όρος τάξεως $n-1$ του πολυωνύμου $(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$ είναι

$$(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}.$$

Συμπεραίνουμε οτι

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn} = \operatorname{tr} A.$$

2. Εξετάζουμε του σταθερούς όρους των πολυωνύμων

$$\det(A-\lambda I) = (\lambda_1-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda).$$

Στη δεξιά πλευρά, ο σταθερός όρος είναι $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$. Στην αριστερή πλευρά ο σταθερός όρος είναι η τιμή του πολυωνύμου για $\lambda=0$, δηλαδή $\det A$. Άρα

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \det A.$$

□

Άσκηση 6.1 Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Επαληθεύστε οτι το άθροισμα των ιδιοτιμών είναι ίσο με το ίχνος του πίνακα, και το γινόμενο των ιδιοτιμών είναι ίσο με την ορίζουσα του πίνακα.

Άσκηση 6.2 Εάν $B = A - 7I$, όπου A είναι ο πίνακας της Άσκησης 6.2, βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του B. Πως σχετίζονται με αυτά του A;

Άσκηση 6.3 Δώστε ένα παράδειγμα για να δείξετε οτι οι ιδιοτιμές αλλάζουν όταν αφαιρέσουμε πολλαπλάσιο μίας γραμμής από μία άλλη. Εξηγήστε γιατί εάν το 0 είναι μία από τις ιδιοτιμές, αυτή δεν αλλάζει.

Άσκηση 6.4 Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ελέγξτε οτι το άθροισμα των ιδιοτιμών είναι ίσο με το ίχνος και το γινόμενο με την ορίζουσα.

Άσκηση 6.5 Υποθέτουμε οτι λ είναι ιδιοτιμή του αντιστρέψιμου πίνακα A, και x είναι ιδιοδιάνυσμα: $Ax = \lambda x$. Δείξτε οτι x είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του αντιστρόφου A^{-1}, και βρείτε την αντίστοιχη ιδιοτιμή.

Άσκηση 6.6 Δείξτε οτι οι ιδιοτιμές του ανάστροφου πίνακα A^T είναι ίσες με τις ιδιοτιμές του A.

Άσκηση 6.7 Κατασκευάστε 2×2 πίνακες A και B, τέτοιους ώστε οι ιδιοτιμές του AB δεν είναι ίσες με τα γινόμενα των ιδιοτιμών του A και του B, και οι ιδιοτιμές του $A+B$ δεν είναι ίσες με τα αθροίσματα των ιδιοτιμών.

Άσκηση 6.8 Υποθέτουμε οτι ο 3×3 πίνακας A έχει ιδιοτιμές 0, 3, 5 με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα u, v, w.

α′. Βρείτε μία βάση του μηδενοχώρου του A, και μία βάση του χώρου στηλών του A.

β′. Βρείτε μία λύση της εξίσωσης $Ax = v + w$. Βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης.

γ′. Δείξτε οτι η εξίσωση $Ax = u$ δεν έχει λύσεις.

Άσκηση 6.9 Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 6.10 Κάθε πίνακας μετάθεσης αφήνει το διάνυσμα $x = (1, 1, \ldots, 1)$ αμετάβλητο. Άρα έχει μία ιδιοτιμή $\lambda = 1$. Βρείτε άλλες δύο ιδιοτιμές για τους πίνακες

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Διαγωνιοποίηση

Στο Παράδειγμα 6.2 παρατηρήσαμε οτι εάν γράψουμε ένα διάνυσμα ως γραμμικό συνδυασμό ιδιοδιανυσμάτων του A, τότε μπορούμε εύκολα να περιγράψουμε τη δράση του A σε αυτό το διάνυσμα. Το ακόλουθο θεώρημα δίδει μια πιο ακριβή διατύπωση αυτής της ιδέας.

Θεώρημα 6.2 *Υποθέτουμε οτι ο $n \times n$ πίνακας A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $x_1, \ldots, x_n$. Θεωρούμε το πίνακα R, ο οποίος έχει ως στήλες τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_n$. Τότε ο πίνακας $R^{-1}AR$ είναι διαγώνιος, και τα στοιχεία στη διαγώνιο είναι οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ του A, δηλαδή*

$$A = RDR^{-1} = \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}^{-1}.$$

Απόδειξη. Η j-στήλη του πίνακα AR είναι το διάνυσμα $Ax_j = \lambda_j x_j$. Άρα

$$AR = \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 x_1 & \cdots & \lambda_n x_n \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}.$$

Η j-στήλη του $R^{-1}(AR)$ είναι η j-στήλη του AR πολλαπλασιασμένη με τον πίνακα R^{-1}. Αλλά η j-στήλη του AR είναι η j-στήλη του R πολλαπλασιασμένη επί λ_j. Άρα η j-στήλη του $R^{-1}(AR)$ είναι $\lambda_j \times$ (j-στήλη του $R^{-1}R$), δηλαδή $\lambda_j e_j$. Συμπεραίνουμε οτι

$$R^{-1}AR = \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 e_1 & \cdots & \lambda_n e_n \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix},$$

δηλαδή ο διαγώνιος πίνακας με τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ στη διαγώνιο.

□

Ένας πίνακας A για τον οποίο υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας R τέτοιος ώστε ο $R^{-1}AR$ να είναι διαγώνιος ονομάζεται **διαγωνιοποιήσιμος**. Θα δείξουμε οτι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αυτό συνεπάγεται οτι εάν ένας $n \times n$ πίνακας έχει n *διαφορετικές* ιδιοτιμές, τότε έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, και συνεπώς είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Λήμμα 6.3 *Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη. Εάν $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ είναι οι διαφορετικές ιδιοτιμές του A, και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $v_1, \ldots, v_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε υπάρχει k, με $1 < k \leq m$, τέτοιο ώστε $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αλλά $v_1, \ldots, v_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα και μπορούμε να γράψουμε

$$v_k = a_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} v_{k-1}\,. \tag{6.2}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο πλευρές της 6.2 με A έχουμε

$$A v_k = a_1 A v_1 + \cdots + a_{k-1} A v_{k-1}$$

και αφού v_i είναι ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή λ_i

$$\lambda_k v_k = a_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} \tag{6.3}$$

Πολλαπλασιάζουμε την 6.2 με λ_k, και την αφαιρούμε από την 6.3:

$$0 = a_1(\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \cdots + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1}\,.$$

Εφ' όσον τα $v_1, \ldots, v_{k-1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, $a_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, k-1$, αλλά $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$, και συνεπώς $a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$. Αλλά τότε, από την 6.2, $v_k = 0$, άτοπο. Συμπεραίνουμε οτι το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

□

Άσκηση 6.11 Διαγωνιοποιήστε τους ακόλουθους πίνακες (δηλαδή βρείτε R τέτοιους ώστε $R^{-1}AR$ είναι διαγώνιος πίνακας):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 6.12 Εάν $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, διαγωνοποιήστε τον A και υπολογίστε τον πίνακα A^{100}.

Άσκηση 6.13 Βρείτε όλες τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και γράψτε δύο διαφορετικούς πίνακες R που διαγωνιοποιούν τον A.

Άσκηση 6.14 Ποιοί από τους ακόλουθους πίνακες δεν μπορούν να διαγωνιοποιηθούν;

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 6.15 Παραγοντοποιήστε τους ακόλουθους πίνακες στη μορφή $A = RDR^{-1}$, όπου D είναι διαγώνιος πίνακας.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ευρετήριο