ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2014-15
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ202 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 1

Διανύσματα στο Επίπεδο και στο Χώρο

Άσκηση 1 Έστω $ABCD$ παραλληλόγραμμο, E σημείο επί της πλευράς AB και F σημείο επί της πλευράς CD τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC}$. Έστω, επίσης σημείο G επί της πλευράς AD και H σημείο επί της BC, τέτοια ώστε $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{HC}$. Αποδείξτε ότι το $EGFH$ είναι παραλληλόγραμμο.

Άσκηση 2 Έστω $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ σύστημα αναφοράς, και διανύσματα $\overrightarrow{w}$ και $\overrightarrow{z}$, με συντεταγμένες ως προς το $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, (a, b) και (c, d) αντίστοιχα. Δείξτε οτι $\overrightarrow{w} \parallel \overrightarrow{z}$ εάν και μόνον εάν $a/b = c/d$.

Άσκηση 3 Δίδεται σύστημα αναφοράς $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, και σημεία A και B με συντεταγμένες ως προς το $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $(2, -1)$ και $(4, 1)$ αντίστοιχα. Έστω C σημείο στην ευθεία AB, τέτοιο ώστε $\frac{(CA)}{(CB)} = -\frac{3}{5}$. Υπολογίστε τις συντεταγμένες του C.

Άσκηση 4 Δίδονται σημεία O, A και B στο επίπεδο. Δείξτε οτι το σημείο C βρίσκεται στην ευθεία AB εάν και μόνον εάν υπάρχει πραγματικός αριθμός t τέτοιος ώστε

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= (1-t)\,\overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{OB} \\ &= \overrightarrow{OA} + t\,(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})\,. \end{aligned}$$

Άσκηση 5 Αποδείξτε ότι γιά κάθε τρίγωνο ABC ισχύει: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$.
Αν γιά τα διανύσματα $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ ισχύει οτι $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = 0$, τότε αποδείξτε οτι υπάρχει τρίγωνο ABC τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{CA} \sim \overrightarrow{w}$.

Υπόδειξη: Για το πρώτο, θεωρείστε τρίγωνο ABC και σημείο αναφοράς O. Τότε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, κλπ. Για το δεύτερο, επιλέξτε ένα σημείο A του επιπέδου, και σημείο B τέτοιο ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ να είναι ισοδύναμο με το $\overrightarrow{u}$. Κατόπιν σημείο C τέτοιο ώστε $\overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{v}$. Τώρα πρέπει να αποδείξετε οτι το διάνυσμα $\overrightarrow{CA}$ είναι ισοδύναμο με το $\overrightarrow{w}$.

Άσκηση 6 Αποδείξτε με χρήση διανυσμάτων (δηλαδή χωρίς να χρησιμοπποιήσετε συντεταγμένες ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς!) οτι η ευθεία που ενώνει τα μέσα M, N των πλευρών AB και AC ενός τριγώνου ABC είναι παράλληλη προς την πλευρά BC και έχει μήκος το μισό της BC.

Άσκηση 7 Θεωρείστε τις ευθείες ε_1 και ε_2 των οποίων το γενικό σημείο P_1 και P_2 ικανοποιεί τις σχέσεις $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{u_1} + t\,\overrightarrow{v_1}$ και $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{u_2} + s\,\overrightarrow{v_2}$ αντίστοιχα. Αποδείξτε οτι αν τα $\overrightarrow{v_1}$ και $\overrightarrow{v_2}$ δεν είναι παράλληλα, τότε οι δύο ευθειες έχουν ένα μοναδικό σημείο τομής. Τι γίνεται αν τα $\overrightarrow{v_1}$ και $\overrightarrow{v_2}$ είναι παράλληλα; Εξηγείστε γεωμετρικά τις παρατηρήσεις σας.

Υπόδειξη: Τα σημεία της ευθείας ε_1 ικανοποιούν τη σχέση $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{u_1} + t\,\overrightarrow{v_1}$ για κάποιο t και τα σημεία της ευθείας ε_2 ικανοποιούν τη σχέση $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{u_2} + s\,\overrightarrow{v_2}$ για κάποιο s. Για να βρίσκεται ένα σημείο και στις δύο ευθείες πρέπει να υπάρχουν αριθμοί t και s τέτοιοι ώστε $\overrightarrow{u_1} + t\,\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{u_2} + s\,\overrightarrow{v_2}$. Αποδείξτε οτι αν τα $\overrightarrow{v_1}$ και $\overrightarrow{v_2}$ δεν είναι παράλληλα πράγματι υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί.

Άσκηση 8 Θεωρείστε ένα σύστημα με δύο εξισώσεις και δύο αγνώστους (μεταβλητές), x και y,

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2\,. \end{aligned}$$

Θέλουμε να βρούμε τις λύσεις του συστήματος, δηλαδή τα ζεύγη (x, y) για τα οποία ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι δεδομένες εξισώσεις. Παρατηρείστε οτι, ως προς ένα ορθογώνιο σύστημα αναφοράς, το σύνολο των σημείων με συντεταγμένες (x, y) οι οποίες ικανοποιούν την πρώτη εξίσωση, είναι μία ευθεία. Βρείτε $\overrightarrow{u_1}$ και $\overrightarrow{v_1}$ έτσι ώστε η ευθεία αυτή να δίδεται από μία έκφραση όπως στην Άσκηση 7. Παρομοίως γιά την άλλη ευθεία. Πώς εκφράζεται η συνθήκη της 'μη παραλληλίας' των $\overrightarrow{v_1}$ και $\overrightarrow{v_2}$ συναρτήσει των a_1, a_2, b_1, b_2;

Άσκηση 9 Μία βάρκα κινείται με σταθερή ταχύτητα $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta)$. Ένα ρεύμα νερού την παρασύρει με επιπρόσθετη ταχύτητα $\overrightarrow{u} = (\gamma, \delta)$. Καθένα από τα α, β, γ, δ μετράται σε 'ναυτικά μίλια ανά ώρα'. Να βρεθούν

α΄. Η ολική τελική ταχύτητα της βάρκας.

β΄. Η γωνία κατά την οποία πρέπει να στρίψει η βάρκα έτσι ώστε να κινείται παράλληλα με την αρχική της διεύθυνση.

γ΄. Η θέση της βάρκας σε $2,5$ ώρες, αν η αρχική της θέση είναι το σημείο $(1, 2)$.

Υπόδειξη: Για το δεύτερο, πρέπει να βρείτε γωνία ϑ τέτοια ώστε αν στο διάνυσμα που έχει ίσο μέτρο με το $\overrightarrow{v}$ αλλά σχηματίζει γωνία ϑ με αυτό, προσθέσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{u}$ να πάρετε ένα διάνυσμα παράλληλο και ομόρροπο με το $\overrightarrow{v}$. Θα χρειαστείτε την προβολή $\mathrm{pr}_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u}$.

Άσκηση 10 Έστω M το μέσο της υποτείνουσας AC του ορθογωνίου τριγώνου ABC. Χρησιμοποιήστε το εσωτερικό γινόμενο για να δείξετε ότι $|\overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{CM}|$.

Υπόδειξη: Εκφράστε το διάνυσμα $\overrightarrow{BM}$ με δύο διαφορετικούς τρόπους, και υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BM}$.

Άσκηση 11 Αν τα $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ είναι κάθετα και έχουν ίδιο μήκος, δείξετε ότι και τα $2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$, $6\overrightarrow{u} - 4\overrightarrow{v}$ είναι κάθετα.

Άσκηση 12 Αν το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο, a είναι το μήκος της πλευράς του, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, και $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$, υπολογίστε το μήκος του $\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$ ως συνάρτηση του a.

Άσκηση 13 Προσδιορίστε το x ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{a} = (x+1,\, 2\,, -x^2+5)$ και $\overrightarrow{b} = (x+1,\, 3x,\, 1)$ να είναι κάθετα.

Άσκηση 14 Βρείτε το εξωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$ των διανυσμάτων $\overrightarrow{v} = (1,\, 2,\, 1)$, $\overrightarrow{u} = (3,\, 1,\, 2)$.

Εξετάστε αν τα διανύσματα $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}$ και $\overrightarrow{w} = (4,\, 5,\, 0)$ είναι συνεπίπεδα.

Άσκηση 15 Δείξτε ότι τα σημεία $A : (6,\, -4,\, 1)$, $B : (5,\, 3,\, 1), C : (-2,\, 2,\, 1), D : (-1,\, -5,\, 1)$ είναι κορυφές τετραγώνου.

Άσκηση 16 Δίνεται ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O,\, \overrightarrow{i},\, \overrightarrow{j},\, \overrightarrow{k})$ στο χώρο. Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Να εξετασθούν ως προς την ανεξαρτησία τους και τα διανύσματα $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$.

Άσκηση 17 Για την πράξη του πολλαπλασιασμού αριθμών, γνωρίζουμε οτι εάν $x \neq 0$ τότε

$$xy = xz \quad \Rightarrow \quad y = z$$

Ισχύει το ανάλογο αποτέλεσμα για την πράξη του εξωτερικού γινομένου; Με άλλα λόγια, ισχύει ότι, αν $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}$ είναι τυχαία διανύσματα στο χώρο με $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$, τότε

$$\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{z} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{y} = \overrightarrow{z};$$

Υπόδειξη: Θεωρείστε την εξίσωση $\overrightarrow{x} \times (\overrightarrow{y} - \overrightarrow{z}) = \overrightarrow{0}$.

Άσκηση 18 Δείξτε ότι, για τυχαία διανύσματα $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}$ στο χώρο,

$$\overrightarrow{x} \times (\overrightarrow{y} \times \overrightarrow{z}) + \overrightarrow{z} \times (\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{y} \times (\overrightarrow{z} \times \overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \quad \text{(ταυτότητα του Jacobi)}.$$

Άσκηση 19 Θεωρήστε τα σημεία $A : (1,\, 0,\, 1)$, $B : (2,\, 1,\, 1)$, $D : (1,\, 1,\, 2)$, $E : (3,\, 4,\, 5)$. Έστω σημείο C, τέτοιο ώστε το $ABCD$ να είναι παραλληλόγραμο. Υπολογίστε το εμβαδόν του $ABCD$, καθώς και τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με ακμές AB, AD, AE.

Άσκηση 20 Θεωρούμε τρία σημεία A, B, C, και τα διανύσματα

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{CA} \text{ και } \overrightarrow{c} = \overrightarrow{AB}.$$

α'. Δείξτε ότι $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}$.

β'. Εάν α, β, γ είναι οι εσωτερικές γωνίες του τριγώνου ABC χρησιμοποιήστε το α' για να αποδείξετε το νόμο των ημιτόνων:

$$\frac{|\overrightarrow{b}|}{\sin\beta} = \frac{|\overrightarrow{c}|}{\sin\gamma}.$$

Άσκηση 21 Εάν $\overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{b}$ είναι δεδομένα διανύσματα με $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$, βρείτε τα διανύσματα $\overrightarrow{u}$ τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$$

Άσκηση 22 Δίδεται το διάνυσμα $\overrightarrow{a}$ με συντεταγμένες $(1,\, 2,\, 3)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O,\, \overrightarrow{i},\, \overrightarrow{j},\, \overrightarrow{k})$. Βρείτε τις συντεταγμένες του $\overrightarrow{a}$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O,\, \overrightarrow{u},\, \overrightarrow{v},\, \overrightarrow{w})$, όπου

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}), \quad \overrightarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}), \quad \overrightarrow{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})\,.$$

Άσκηση 23 Έστω ε η ευθεία με παραμετρική περιγραφή $(1+t, 1+2t)$.

α΄. Βρείτε μια αναλυτική περιγραφή της ε

β΄. Θεωρήστε τις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ με παραμετρική περιγραφή

$(x,y) \in \varepsilon_1 \Leftrightarrow (x,y) = (1,2) + t(2,4)$

$(x,y) \in \varepsilon_2 \Leftrightarrow (x,y) = (0,-1) - t(2,4)$

$(x,y) \in \varepsilon_3 \Leftrightarrow (x,y) = (1,3) + t(2,-4)$

Για $n = 1,2,3$ να εξετάσετε αν οι $\varepsilon, \varepsilon_n$ ταυτίζονται, αν είναι παράλληλες χωρίς κοινά σημεία, ή αν τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο. Στήν τρίτη περίπτωση, να υπολογίσετε το σημείο τομής.

Άσκηση 24 Έστω ε η ευθεία με παραμετρική περιγραφή $(2+2t, 2, 2-2t)$. Θεωρήστε τις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ με παραμετρική περιγραφή

$(x,y,z) \in \varepsilon_1 \Leftrightarrow (x,y,z) = (1,-1,0) + t(1,1,0)$

$(x,y,z) \in \varepsilon_2 \Leftrightarrow (x,y,z) = (1,-1,1) - t(1,1,0)$

$(x,y,z) \in \varepsilon_3 \Leftrightarrow (x,y,z) = (1,-1,1) + t(-4,0,4)$

Για $n = 1,2,3$ να εξετάσετε αν οι $\varepsilon, \varepsilon_n$ έχουν κοινά σημεία. Αν ναι, να υπολογίσετε τα κοινά σημεία των $\varepsilon, \varepsilon_n$. Αν όχι, να εξετάσετε αν οι $\varepsilon, \varepsilon_n$ είναι ασύμβατες.

Άσκηση 25 Θεωρήστε τα επίπεδα Π, Π_1, Π_2 με αναλυτική περιγραφή

$(x,y,z) \in \Pi \Leftrightarrow 2x + 3y + z + 1 = 0$

$(x,y,z) \in \Pi_1 \Leftrightarrow x + y + z + 1 = 0$

$(x,y,z) \in \Pi_2 \Leftrightarrow -4x - 6y - 2z - 2 = 0$

Για $n = 1,2$ να δώσετε μια παραμετρική περιγραφή του συνόλου των κοινών σημείων των Π, Π_n.

Άσκηση 26 Έστω Π το επίπεδο με παραμετρική περιγραφή $(1,0,1) + s(1,2,3) + t(1,1,1)$. Να δώσετε μια αναλυτική περιγραφή του Π.

Άσκηση 27 Δίδονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1,1,-1), \vec{b} = (1,0,-2), \vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$, και οι ευθείες σε παραμετρική μορφή:

1) $P(s) = (1,3,1) + s\vec{a}$,

2) $Q(t) = (1,0,1) + t\vec{b}$.

Δείξτε ότι η εξίσωση με τρεις αγνώστους (s,t,u)

$$Q(t) = P(s) + u\,\vec{n}$$

έχει μία λύση (s_0, t_0, u_0), και βρείτε την. Ποια είναι η γεωμετρική σημασία των σημείων $P(s_0), Q(t_0)$;

Άσκηση 28 Έστω ε_1 η ευθεία, που περνά από το $A(6,-1,3)$ και έχει διεύθυνση $\overrightarrow{u} = (2,-3,4)$, και ε_2 η ευθεία, που περνά από το $B(2,1,0)$ και έχει διεύθυνση $\overrightarrow{v} = (1,2,-3)$. Χωρίς να βρείτε τις εξισώσεις τους, αποδείξτε ότι οι ευθείες αυτές είναι ασύμβατες.