ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2014-15
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ202 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 2

Κύκλος, Έλλειψη, Υπερβολή, Παραβολή

Άσκηση 1 Στις σελίδες 110 – 111 της Αναλυτικής Γεωμετρίας (Ανδρεαδάκη), Ασκήσεις 2, 3, 4, 6, 7, 10 – 13, 15, 16, 18, 20.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Άσκηση 2. Τα σημεία ικανοποιούν την εξίσωση $(x-4)^2+(y-5)^2 = 4((x+2)^2+(y-3)^2)$. Αναπτύσσουμε την παράσταση, συγκεντρώνουμε όμοιους όρους και διαιρούμε με το συντελεστή του x^2, οπότε έχουμε $x^2 + 8x + y^2 - \frac{14}{3}y + \frac{11}{3} = 0$. Συμπληρώνουμε τα τετράγωνα και βρίσκουμε την εξίσωση κύκλου με κέντρο $(-4, \frac{7}{3})$ και ακτίνα $\sqrt{16 + \frac{16}{9}} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$.

Άσκηση 3. Θεωρούμε τρία σημεία A, B, C τέτοια ώστε το B βρίσκεται στον κύκλο με διάμετρο AC. Θέλουμε να δείξουμε οτι $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}$. Έστω K το κέντρο του κύκλου. Τότε $|\overrightarrow{KA}| = |\overrightarrow{KB}| = |\overrightarrow{KC}|$ και $\overrightarrow{KA} = -\overrightarrow{KC}$ αφού τα A, C είναι αντιδιαμετρικά. Εξετάζουμε τη γωνία ϑ μεταξύ των $\overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{BC}$:

$$\cos\vartheta = \cos\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\,|\overrightarrow{BC}|}.$$

Αλλά $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB})\cdot(\overrightarrow{KC} - \overrightarrow{KB}) = 0$ αφού $\overrightarrow{KA} = -\overrightarrow{KC}$ και $|\overrightarrow{KA}| = |\overrightarrow{KB}|$. Άρα $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

Άσκηση 4. Ο περιγεγραμμένος κύκλος έχει εξίσωση (σελ. 100)

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 1 \\ 41 & 5 & -4 & 1 \\ 25 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου. Ένα σημείο $X : (x, y)$ στη διχοτόμο της $\widehat{ABC}$ έχει παραμετρική παράσταση

$$\overrightarrow{BX} = \mu\left(\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} + \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}\right).$$

Άρα το κέντρο $K : (a,\, b)$ του εγγεγραμμένου κύκλου έχει παράσταση

$$(a-5,\, b+4) = \mu \left(\frac{(-4,\, 2)}{\sqrt{20}} + \frac{(-1,1)}{\sqrt{2}} \right) .$$

Απαλοίφουμε την παράμετρο μ και έχουμε την εξίσωση $(a-5)(2+\sqrt{10}) = (b+4)(-4-\sqrt{10})$. Παρόμοια, από τη διχοτόμο της $\widehat{BAC}$ βρίσκουμε την εξίσωση $-(a-1)(2+\sqrt{2}) = (b+2)(4+3\sqrt{2})$. Αφού προσδιορίσουμε το κέντρο $(a,\, b)$, υπολογίζουμε την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου, που ειναι ίση με την απόσταση του κέντρου από την πλευρά AB.

Άσκηση 7.
α′) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = \lambda^2$.
β′) Το κέντρο είναι $(\lambda,\, 2\lambda)$ και η ακτίνα λ: $(x-\lambda)^2 + (y-2\lambda)^2 = \lambda^2$.
γ′) Το κέντρο είναι $(\lambda,\, 0)$ και η ακτίνα $\sqrt{\lambda^2+2^2}$: $(x-\lambda)^2 + y^2 = \lambda^2 + 2^2$. Εναλλακτικά, ως δέσμη κύκλων $\mu((x-1)^2 + y^2 - 5) + (1-\mu)((x+1)^2 + y^2 - 5) = 0$.
δ′) Το κέντρο είναι $(0,\, \lambda)$ και η ακτίνα λ: $x^2 + (y-\lambda)^2 = \lambda^2$. Εναλλακτικά, ως δέσμη κύκλων $\mu(x^2 + (y-1)^2 - 1) + (1-\mu)(x^2 + (y+1)^2 - 1) = 0$.

Άσκηση 10. Λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων βρίσκουμε τα σημεία τομής των δύο κύκλων, $(5,\, -1)$ και $(-3,\, 7)$. Κατόπιν υπολογίζουμε την εξίσωση του κύκλου.
Εναλλακτικά, παρατηρούμε οτι ο ζητούμενος κύκλος ανήκει στη δέσμη $\lambda(x^2+y^2-4y-30) + (1-\lambda)(x^2+y^2+4x-46) = 0$, και έχει την ελάχιστη ακτίνα από όλους τους κύκλους αυτής της δέσμης. Συγκεντρώνουμε τους όμοιους όρους, συμπληρώνουμε τα τετράγωνα, και βρίσκουμε την ακτίνα του κύκλου με παράμετρο λ: $r^2 = 8\lambda^2 - 24\lambda + 50$. Το τριώνυμο λαμβάνει την ελάχιστη τιμή όταν $\lambda = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$. Άρα ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση

$$\frac{3}{2}\left(x^2+y^2-4y-30\right) - \frac{1}{2})\left(x^2+y^2+4x-46\right) = x^2+y^2-2x-6y-22 = 0\,.$$

Άσκηση 11. Ο κύκλος $S_1 = x^2+y^2-10x+20 = 0$ έχει κέντρο $(5,\, 0)$ και ακτίνα $\sqrt{5}$. Ο κύκλος $S_2 = x^2+y^2-20y+20 = 0$ έχει κέντρο $(0,\, 10)$ και ακτίνα $\sqrt{80}$. Η απόσταση μεταξύ των δύο κέντρων είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων, άρα οι δύο κύκλοι εφάπτονται, και η κοινή εφαπτομένη είναι ο ριζικός άξονας της δέσμης που ορίζουν οι δύο κύκλοι. Αυτός έχει εξίσωση $S_1 = S_2$, δηλαδή $x = 2y$. Ο κύκλος $S_3 = x^2+y^2-8x-4y+20 = 0$ ανήκει στη δέσμη, αφού $S_3 = \frac{4}{5}S_1 + \frac{1}{5}S_2$, και συνεπώς εφάπτεται στο ριζικό άξονα της δέσμης.

Άσκηση 12. Ο πόλος της ευθείας $\varepsilon :\ Ax+By+C = 0$ ως προς τον κύκλο $x^2+y^2 = R^2$ είναι το σημείο $-\frac{R^2}{C}(A,\, B)$. Η πολική ευθεία του σημείου $x_1,\, y_1)$ είναι η ευθεία $\pi :\ x_1x+y_1y = R^2$. Ελέγχουμε οτι εάν $(x_1,\, y_1)$ ανήκει στην ε, τότε $-\frac{R^2}{C}(A,\, B)$ ανήκει στην π.

Άσκηση 16. Τα κέντρα $(x_0,\, y_0)$ αυτών των κύκλων ικανοποιούν τις εξισώσεις $y_0^2 = (x_0-2)^2 + (y_0-3)^2$ και $y_0^2 = (x_0+1)^2 + (y_0-6)^2$.

Άσκηση 18. Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο τομής της μεσοκαθέτου των σημείων $(0,\, 0)$ και $(2,\, 1)$ και της ευθείας που είναι κάθετος προς την $3x-y = 5$ στο σημείο $(2,\, 1)$.

Άσκηση 2 Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων ακτίνας $\frac{15}{4}$ που εφάπτονται στις ευθείες $4y \pm 3x = 0$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Ο κύκλος με κέντρο στο $(x, 0)$ εφάπτεται στις ευθείες $4y \pm 3x = 0$ όταν έχει ακτίνα $r = s\sqrt{(-3)^2 + 4^2}$ τέτοια ώστε $t(4, 3) + s(-3, 4) = (x, 0)$. Όταν $r = \frac{15}{4}$, $s = \pm\frac{3}{4}$ και $t = \mp 1$. Άρα το κέντρο των ζητούμενων κύκλων είναι $(\pm\frac{25}{4}, 0)$.

Άσκηση 3 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων από τα οποία οι εφαπτόμενες προς τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ τέμνονται ορθογώνια.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Παρατηρούμε οτι οι εφαπτόμενες στο $(0, 1)$ και στο $(1, 0)$ τέμνονται ορθογώνια στο $(1, 1)$. Από τη συμμετρία του κύκλου ως προς περιστροφές, συμπεραίνουμε οτι από όλα τα σημεία του κύκλου $x^2 + y^2 = 2$ οι εφαπτόμενες προς τον $x^2 + y^2 = 1$ τέμνονται ορθογώνια. Ελέγχουμε οτι αυτό δεν ισχύει για κανένα άλλο σημείο.

Άσκηση 4 Να βρείτε την κανονική εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ της έλλειψης όταν η απόσταση μεταξύ των εστιών της είναι 6 και ο μεγάλος ημιάξονας a είναι 10.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{81} = 1$.

Άσκηση 5 Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης εάν η απόσταση μεταξύ δύο κορυφών της που ανήκουν σε διαφορετικούς άξονες είναι διπλάσια της απόστασης μεταξύ των εστιών.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Η εκκεντρότητα είναι $e = \frac{c}{a}$. Από τα δεδομένα έχουμε τη σχέση $a^2 + b^2 = 16c^2$, ενώ γνωρίζουμε οτι $b^2 = a^2 - c^2$. Άρα $2a^2 = 17c^2$ και $e = \sqrt{\frac{2}{17}}$.

Άσκηση 6 Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης εάν η απόσταση μεταξύ των δύο εστιών είναι ο αριθμητικός μέσος των δύο ημιαξόνων.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$2c = \frac{a+b}{2}$. $e = \frac{8}{17}$.

Άσκηση 7 Να βρείτε την κανονική εξίσωση της έλλειψης εάν οι αποστάσεις της μίας εστίας από τις κορυφές της έλλειψης στον μεγάλο άξονα είναι 7 και 1.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

Άσκηση 8 Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $F_1 : (1, 0)$ και $F_2 : (3, 0)$ και μεγάλο ημιάξονα $2\sqrt{2}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$\frac{(x-2)^2}{8} + \frac{y^2}{7} = 1$.

Άσκηση 9 Δίνεται η έλλειψη
$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1\,.$$
Να βρείτε

α΄. τις συντεταγμένες των κορυφών,

β΄. τις συντεταγμένες των εστιών,

γ΄. την εκκεντρότητα,

δ΄. τις εξισώσεις των διευθετουσών.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α΄. Οι συντεταγμένες των κορυφών, $(6,\,0)$, $(-6,\,0)$, $(0,\,\sqrt{20})$, $(0,\,-\sqrt{20})$.

β΄. Οι συντεταγμένες των εστιών, $(2,\,0)$, $(-2,\,0)$.

γ΄. Η εκκεντρότητα, $e = \frac{1}{3}$.

δ΄. Οι εξισώσεις των διευθετουσών, $x = \pm 18$.

Άσκηση 10 Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης της οποίας οι εξισώσεις των διευθετουσών είναι $y = 5$ και $y = -3$, και ο μεγάλος ημιάξονας είναι 2.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Αφού οι διευθετούσες είναι παράλληλες με τον άξονα Ox, ο μεγάλος άξονας της έλλειψης είναι ο άξονας Oy, και το κέντρο συμμετρίας της έλλειψης είναι το σημείο $(0,\,1)$. Η εξίσωση είναι $\frac{x^2}{3} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$.

Άσκηση 11 Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης εάν η απόσταση μεταξύ των διευθετουσών είναι τετραπλάσια της απόστασης μεταξύ των εστιών.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$e = \frac{1}{2}$.

Άσκηση 12 Στην έλλειψη με εξίσωση
$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$
να βρείτε ένα σημείο του οποίου η απόσταση από τη δεξιά εστία είναι τετραπλάσια της απόστασης από την άλλη εστία.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Έχουμε $a = 10$, $b = 6$, $c = 8$ και τη σχέση $(x-8)^2+y^2 = 16((x+8)^2+y^2)$. Αντικαθιστούμε το y^2 από την εξίσωση της έλλειψης, και καταλήγουμε στην εξίσωση $\frac{960}{100}x^2+272x+1500 = 0$,

η οποία έχει μία ρίζα στο διάστημα $[-10, 10]$, $x = -\frac{15}{2}$. Τα ζητούμενα σημεία είναι τα $(-\frac{15}{2}, \pm\frac{3\sqrt{7}}{2})$.

Άσκηση 13 Σχεδιάστε ένα πρόχειρο (δηλαδή χωρίς να χρησιμοποιήσετε υποχρεωτικά χάρακα και υποδεκάμετρο) αλλά προσεκτικά σχεδιασμένο σχήμα (δηλαδή οι θέσεις των σημείων και οι κλίσεις των ευθειών να είναι σωστές στα όρια ακριβείας του σχήματος) της έλλειψης με εξίσωση

$$x^2 + 4y^2 = 4\,.$$

Βρείτε τις εστίες της έλλειψης και σημειώστε τις στο σχήμα.
Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία της έλλειψης για τα οποία $x = 1$ και σχεδιάστε τις στο σχήμα.

Άσκηση 14 Δείξτε οτι $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y = -4$ είναι εξίσωση έλλειψης, και βρείτε τις εστίες της έλλειψης και την εξίσωση των εφαπτομένων από το σημείο $(1, 2)$.

Υπόδειξη: Συμπληρώνοντας τα τετράγωνα βρίσκουμε το κέντρο της έλλειψης. Εάν λάβουμε το κέντρο ως νέο σημείο αναφοράς, η εξίσωση της έλλειψης είναι η ίδια με αυτή της Άσκησης 13. Συνεχίζοντας με το νέο σύστημα αναφοράς και συντεταγμένες (x', y'), η συνθήκη $M^2 - LN = 0$ δίδει την εξίσωση του ζεύγους των εφαπτομένων από το σημείο X_1. Από το σχήμα είναι προφανής η μία εφαπτομένη, και μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε για να βρούμε και την άλλη. Τέλος ξαναγράφουμε τις εξισώσεις ως προς το αρχικό σύστημα αναφοράς.

Άσκηση 15 Στις σελίδες 137 – 138 της Αναλυτικής Γεωμετρίας (Ανδρεαδάκη), Ασκήσεις 1 – 8.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Άσκηση 1. β′) Το άθροισμα των αποστάσεων μίας κορυφής στον μεγάλο άξονα από τις εστίες είναι $(a - c) + (a + c) = 2a$. Συνεπώς $c = 6$, $a = 8$ και $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{28}$. Άρα η εξίσωση είναι $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$.
δ′) $c = 6$, $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$. Άρα $a^2 = 36$, $b^2 = 20$.

Άσκηση 2. $\frac{(x-3)^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$.

Άσκηση 3. Η εφαπτομένη στο σημείο (x_0, y_0) έχει εξίσωση $\frac{x_0 x}{4} + \frac{y_0 y}{9} = 1$. Για να είναι παράλληλη προς την $x = y$ πρέπει να ισχύει $\frac{x_0}{4} = -\frac{y_0}{9}$. Αντικαθιστώντας αυτή τη σχέση στην εξίσωση της έλλειψης βρίσκουμε $x_0 = \pm\frac{4}{\sqrt{13}}$, $y_0 = \mp\frac{9}{\sqrt{13}}$. Οι εξισώσεις των εφαπτομένων είναι $x - y = \pm\sqrt{13}$.

Άσκηση 4. α′) $a = 2\sqrt{3}$, $b = 3$, $c = \sqrt{3}$. Εστίες: $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$. Εκκεντρότητα: $e = \frac{1}{2}$.
β′) $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$. Εστίες: $(3, 0)$, $(-3, 0)$. Εκκεντρότητα: $e = \frac{3}{5}$.

Άσκηση 5. Οι συντεταγμένες των εστιών είναι $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$. Άρα οι εξισώσεις των πολικών ευθειών των εστιών είναι $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}x + 0y = 1$.

Άσκηση 8. Έστω $P : (x_0, y_0)$. Τότε $Q : \left(\frac{a^2}{c}, (1 - \frac{x_0}{c})\frac{b^2}{y_0}\right)$. Ελέγχουμε οτι $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ} = 0$.

Άσκηση 16 Να βρείτε την κανονική εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ της υπερβολής όταν η εκκεντρότητα είναι $\frac{13}{2}$ και ο πραγματικός ημιάξονας a είναι 48.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Έχουμε $e = \frac{c}{a} = \frac{13}{2}$ και $a = 48$. Τότε $b^2 = c^2 - a^2 = 165 \cdot 24^2$ και η εξίσωση της υπερβολής είναι $\frac{x^2}{48^2} - \frac{y^2}{165 \cdot 24^2} = 1$.

Άσκηση 17 Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής όταν ο πραγματικός ημιάξονας είναι 16 και η γωνία φ μεταξύ του άξονα Ox και μίας ασύμπτωτης της υπερβολής ικανοποιεί $\tan\varphi = \frac{3}{4}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$a = 16$, $b = 12$.

Άσκηση 18 Η ισοσκελής υπερβολή είναι η υπερβολή για την οποία $a = b$. Βρείτε την εκκεντρότητα της ισοσκελούς υπερβολής.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$\sqrt{2}$.

Άσκηση 19 Να βρείτε την κανονική εξίσωση της υπερβολής όταν η απόσταση μεταξύ των διευθετουσών είναι $\frac{32}{5}$ και η εκκεντρότητα είναι $e = \frac{5}{4}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Η απόσταση μεταξύ των διευθετουσών είναι $\frac{2a^2}{c} = \frac{32}{5}$ και η εκκεντρότητα είναι $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$. Συμπεραίνουμε οτι $a = 4$, $c = 5$ και $b = 3$.

Άσκηση 20 Να βρείτε την κανονική εξίσωση της υπερβολής όταν η γωνία μεταξύ των ασυμπτώτων είναι $\frac{\pi}{3}$ και $c = 2\sqrt{3}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$\frac{b}{a} = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ και $c = 2\sqrt{3}$. Συμπεραίνουμε οτι $a^2 = 9$ και $b^2 = 3$.

Άσκηση 21 Να βρείτε τους ημιάξονες a και b της υπερβολής

α'. εάν η απόσταση μεταξύ των εστιών είναι 8 και η απόσταση μεταξύ των διευθετουσών είναι 6,

β'. Εάν οι διευθετούσες ορίζονται από τις εξισώσεις $x = \pm 3\sqrt{2}$ και η γωνία μεταξύ των ασυμπτώτων είναι $\frac{\pi}{2}$.

γ'. εάν οι ασύμπτωτες ορίζονται από τις εξισώσεις $y = \pm 2x$ και $c = 10$.

δ'. εάν οι ασύμπτωτες ορίζονται από τις εξισώσεις $3y = \pm 5x$ και η υπερβολή περνάει από το σημείο $X : (6, 9)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α'. Έχουμε $c = 4$, $2\frac{a^2}{c} = 6$, άρα $a^2 = 12$, $b^2 = c^2 - a^2 = 4$.

β'. Έχουμε $\frac{a^2}{c} = 3\sqrt{2}$. Επίσης $\frac{b}{a} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$, συνεπώς $a = b$ και $c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2$. Άρα $a^4 = 18(2a^2)$. Συνεπώς $a = 6 = b$.

γ'. Τότε η κλίση των ασυμπτώτων είναι $\frac{b}{a} = 2$. Άρα $b^2 = 4a^2$ και $100 = c^2 - a^2 + b^2 = 5a^2$. Συνεπώς $a = \sqrt{20}$, $b = \sqrt{80}$.

δ'. Έχουμε $3b = 5a$ και $\frac{36}{a^2} - \frac{81}{b^2} = 1$. Άρα $36 \cdot 25 - 81 \cdot 9 = 25a^2$, και $a = \frac{3\sqrt{19}}{5}$, $b = \sqrt{19}$.

Άσκηση 22 Βρείτε τη γωνία μεταξύ των ασυμπτώτων της υπερβολής

α'. όταν η εκκεντρότητα είναι $e = 2$,

β'. όταν η απόσταση μεταξύ των εστιών είναι διπλάσια της απόστασης μεταξύ των διευθετουσών.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α'. Έχουμε $e = \frac{c}{a} = 2$, άρα $\frac{a^2+b^2}{a^2} = 4$ και $b^2 = 3a^2$, δηλαδή $\tan\frac{\vartheta}{2} = \frac{b}{a} = \sqrt{3}$. Συνεπώς $\vartheta = \frac{2\pi}{3}$.

β'. $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

Άσκηση 23 Βρείτε τις εξισώσεις των υπερβολών που έχουν ασύμπτωτες τις ευθείες $\varepsilon_1 : 4y = x$ και $\varepsilon_2 : -4y = x$.

Υπόδειξη: Η κλίση των ασυμπτώτων δίδει το λόγο των δύο παραμέτρων a και b της υπερβολής. Μην ξεχάσετε και τις συζυγείς υπερβολές, που έχουν τις ίδιες ασύμπτωτες. Έτσι έχουμε δύο άπειρες οικογένειες υπερβολών.

Άσκηση 24 Για να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο αλλά προσεκτικά σχεδιασμένο σχήμα της υπερβολής με εξίσωση

$$x^2 - 2y^2 = 4\,,$$

πρώτα βρείτε τις εστίες της υπερβολής και σημειώστε τις στο σχήμα.
Κατόπιν βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων προς την υπερβολή, και σχεδιάστε τις στο σχήμα.
Τώρα σχεδιάστε τους δύο κλάδους της υπερβολής.
Βρείτε την εξίσωση των εφαπτομένων στην υπερβολή από το σημείο $(-1, 2)$. Κατόπιν βρείτε την εξίσωση κάθε μίας από τις δύο εφαπτόμενες από το (x_1, y_1) και σχεδιάστε τις στο σχήμα.
Το ίδιο για το σημείο $(x_2, y_2) = (1, \frac{1}{2})$.

Άσκηση 25 Στις σελίδες $149 - 150$ της Αναλυτικής Γεωμετρίας (Ανδρεαδάκη), Ασκήσεις $1 - 4$ και $6 - 9$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Άσκηση 1. $e = \sqrt{\frac{61}{6}}$, διευθετούσες $x = \pm\frac{36}{\sqrt{61}}$.

Άσκηση 2. Ασύμπτωτες $y = \pm\frac{b}{a}x$. Αποστάσεις του $P : (x_0, y_0)$ από ασύμπτωτες είναι $\frac{|ay_0 \mp bx_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Γινόμενο $\frac{b^2x_0^2 - a^2y_0^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

Άσκηση 3. Σχεδιάστε το σχήμα! $\frac{KF}{OK} = \tan\frac{\vartheta}{2} = \frac{b}{a}$. $KF^2 + OK^2 = OF^2 = c^2$, άρα $KF = b$, $OK = a$. Εάν $K : (x_1, y_1)$, τότε $x_1^2 + y_1^2 = a^2$ και $y_1 = \frac{b}{a}x_1$, άρα $x_1 = \frac{a^2}{c}$.

Άσκηση 26 Βρείτε την εξίσωση της παραβολής με εστία $F:(3,\,0)$ και διευθετούσα $x=-1$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$y^2=8(x-1)$.

Άσκηση 27 Βρείτε την εξίσωση της παραβολής με εστία $F:(0,\,3)$ και διευθετούσα $y=9$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$-x^2=12(y-6)$.

Άσκηση 28 Βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής με εξίσωση $x+\frac{1}{2}y^2=2$ και σχεδιάστε την παραβολή.
Βρείτε την εφαπτομένη στην παραβολή που είναι παράλληλη στην ευθεία $x-2y=0$.

Υπόδειξη: Παρατηρούμε οτι το σημείο αναφοράς δεν είναι η κορυφή της παραβολής, και χρησιμοποιούμε τη μεταβλητή $x'=x-2$ αντί της κανονικής μορφής των εξισώσεων για την παραβολή και την εφαπτομένη της παραβολής σε σημείο X_1.
Συγκρίνοντας την εξίσωση της εφαπτομένης σε σημείο X_1 με την εξίσωση $x-2y=c$, βρίσκουμε το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη με την ευθεία $x-2y=0$.

Άσκηση 29 Στη σελίδα 170 της Αναλυτικής Γεωμετρίας (Ανδρεαδάκη), Ασκήσεις 4, 5, 7, 13, 14.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Άσκηση 4. Η εξίσωση της εφαπτομενης της παραβολής $y^2=2px$ στο σημείο $P_0:\,(x_0,\,y_0)$ είναι $y_0y=p(x+x_0)$. Όταν $y=0$, $x=-x_0$.

Άσκηση 5. Η εφαπτομένη στο $2p,\,-2p)$ είναι $-2py=p(x+2p)$, δηλαδή $y=-\frac{x}{2}-p$. Η κάθετη είναι $y=2x-6p$. Άρα ζητούμε το σημείο $(x_1,\,y_1)$ στο οποίο η εφαπτομένη έχει κλίση 2. Η κλίση της εφαπτομένης είναι $\frac{p}{y_1}$. Άρα $y_1=\frac{p}{2}$ και $x_1=\frac{p}{8}$.