ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2014-15
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ202 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 2

Κύκλος, Έλλειψη, Υπερβολή, Παραβολή

Άσκηση 1 Στις σελίδες 110 – 111 της Αναλυτικής Γεωμετρίας (Ανδρεαδάκη), Ασκήσεις 1, 2, 3, 6, 7, 10 – 13, 15, 16, 18, 20.

Άσκηση 2 Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων ακτίνας $\frac{15}{4}$ που εφάπτονται στις ευθείες $4y \pm 3x = 0$.

Άσκηση 3 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων από τα οποία οι εφαπτόμενες προς τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ τέμνονται ορθογώνια.

Άσκηση 4 Να βρείτε την κανονική εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ της έλλειψης όταν η απόσταση μεταξύ των εστιών της είναι 6 και ο μεγάλος ημιάξονας a είναι 10.

Άσκηση 5 Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης εάν η απόσταση μεταξύ δύο κορυφών της που ανήκουν σε διαφορετικούς άξονες είναι διπλάσια της απόστασης μεταξύ των εστιών.

Άσκηση 6 Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης εάν η απόσταση μεταξύ των δύο εστιών είναι ο αριθμητικός μέσος των δύο ημιαξόνων.

Άσκηση 7 Να βρείτε την κανονική εξίσωση της έλλειψης εάν οι αποστάσεις της μίας εστίας από τις κορυφές της έλλειψης στον μεγάλο άξονα είναι 7 και 1.

Άσκηση 8 Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $F_1 : (1, 0)$ και $F_2 : (3, 0)$ και μεγάλο ημιάξονα $2\sqrt{2}$.

Άσκηση 9 Δίνεται η έλλειψη

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1\,.$$

Να βρείτε

α′. τις συντεταγμένες των κορυφών,

β′. τις συντεταγμένες των εστιών,

γ′. την εκκεντρότητα,

δ′. τις εξισώσεις των διευθετουσών.

Άσκηση 10 Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης της οποίας οι εξισώσεις των διευθετουσών είναι $y = 5$ και $y = -3$, και ο μεγάλος ημιάξονας είναι 2.

Άσκηση 11 Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης εάν η απόσταση μεταξύ των διευθετουσών είναι τετραπλάσια της απόστασης μεταξύ των εστιών.

Άσκηση 12 Στην έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

να βρείτε ένα σημείο του οποίου η απόσταση από τη μία εστία είναι τετραπλάσια της απόστασης από την άλλη ευθεία.

Άσκηση 13 Σχεδιάστε ένα πρόχειρο (δηλαδή χωρίς να χρησιμοποιήσετε υποχρεωτικά χάρακα και υποδεκάμετρο) αλλά προσεκτικά σχεδιασμένο σχήμα (δηλαδή οι θέσεις των σημείων και οι κλίσεις των ευθειών να είναι σωστές στα όρια ακριβείας του σχήματος) της έλλειψης με εξίσωση

$$x^2 + 4y^2 = 4\,.$$

Βρείτε τις εστίες της έλλειψης και σημειώστε τις στο σχήμα.
Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία της έλλειψης για τα οποία $x = 1$ και σχεδιάστε τις στο σχήμα.

Άσκηση 14 Δείξτε οτι $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y = -4$ είναι εξίσωση έλλειψης, και βρείτε τις εστίες της έλλειψης και την εξίσωση των εφαπτομένων από το σημείο $(1,\, 2)$.

Υπόδειξη: Συμπληρώνοντας τα τετράγωνα βρίσκουμε το κέντρο της έλλειψης. Εάν λάβουμε το κέντρο ως νέο σημείο αναφοράς, η εξίσωση της έλλειψης είναι η ίδια με αυτή της Άσκησης 13. Συνεχίζοντας με το νέο σύστημα αναφοράς και συντεταγμένες $(x',\, y')$, η συνθήκη $M^2 - LN = 0$ δίδει την εξίσωση του ζεύγους των εφαπτομένων από το σημείο X_1. Από το σχήμα είναι προφανής η μία εφαπτομένη, και μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε για να βρούμε και την άλλη. Τέλος ξαναγράφουμε τις εξισώσεις ως προς το αρχικό σύστημα αναφοράς.

Άσκηση 15 Στις σελίδες 137 – 138 της Αναλυτικής Γεωμετρίας (Ανδρεαδάκη), Ασκήσεις 1 – 8.

Άσκηση 16 Να βρείτε την κανονική εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ της υπερβολής όταν η εκκεντρότητα είναι $\frac{13}{2}$ και ο πραγματικός ημιάξονας a είναι 48.

Άσκηση 17 Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής όταν ο πραγματικός ημιάξονας είναι 16 και η γωνία φ μεταξύ του άξονα Ox και μίας ασύμπτωτης της υπερβολής ικανοποιεί $\tan\varphi = \frac{3}{4}$.

Άσκηση 18 Η ισοσκελής υπερβολή είναι η υπερβολή για την οποία $a = b$. Βρείτε την εκκεντρότητα της ισοσκελούς υπερβολής.

Άσκηση 19 Να βρείτε την κανονική εξίσωση της υπερβολής όταν η απόσταση μεταξύ των διευθετουσών είναι $\frac{32}{5}$ και η εκκεντρότητα είναι $e = \frac{5}{4}$.

Άσκηση 20 Να βρείτε την κανονική εξίσωση της υπερβολής όταν η γωνία μεταξύ των ασυμπτώτων είναι $\frac{\pi}{3}$ και $c = 2\sqrt{3}$.

Άσκηση 21 Να βρείτε τους ημιάξονες a και b της υπερβολής

α΄. εάν η απόσταση μεταξύ των εστιών είναι 8 και η απόσταση μεταξύ των διευθετουσών είναι 6,

β΄. Εάν οι διευθετούσες ορίζονται από τις εξισώσεις $x = \pm 3\sqrt{2}$ και η γωνία μεταξύ των ασυμπτώτων είναι $\frac{\pi}{2}$.

γ΄. εάν οι ασύμπτωτες ορίζονται από τις εξισώσεις $y = \pm 2x$ και $c = 10$.

δ΄. εάν οι ασύμπτωτες ορίζονται από τις εξισώσεις $3y = \pm 5x$ η υπερβολή περνάει από το σημείο $X : (6,\, 9)$.

Άσκηση 22 Βρείτε τη γωνία μεταξύ των ασυμπτώτων της υπερβολής

α΄. όταν η εκκεντρότητα είναι $e = 2$,

β΄. όταν η απόσταση μεταξύ των εστιών είναι διπλάσια της απόστασης μεταξύ των διευθετουσών.

Άσκηση 23 Βρείτε τις εξισώσεις των υπερβολών που έχουν ασύμπτωτες τις ευθείες $\varepsilon_1 : 4y = x$ και $\varepsilon_2 : -4y = x$.

Υπόδειξη: Η κλίση των ασυμπτώτων δίδει το λόγο των δύο παραμέτρων a και b της υπερβολής. Μην ξεχάσετε και τις συζυγείς υπερβολές, που έχουν τις ίδιες ασύμπτωτες. Έτσι έχουμε δύο άπειρες οικογένειες υπερβολών.

Άσκηση 24 Για να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο αλλά προσεκτικά σχεδιασμένο σχήμα της υπερβολής με εξίσωση

$$x^2 - 2y^2 = 4\,,$$

πρώτα βρείτε τις εστίες της υπερβολής και σημειώστε τις στο σχήμα.
Κατόπιν βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων προς την υπερβολή, και σχεδιάστε τις στο σχήμα.
Τώρα σχεδιάστε τους δύο κλάδους της υπερβολής.
Βρείτε την εξίσωση των εφαπτομένων στην υπερβολή από το σημείο $(-1,\, 2)$. Κατόπιν βρείτε την εξίσωση κάθε μίας από τις δύο εφαπτόμενες από το $(x_1,\, y_1)$ και σχεδιάστε τις στο σχήμα.
Το ίδιο για το σημείο $(x_2,\, y_2) = (1,\, \frac{1}{2})$.

Άσκηση 25 Στις σελίδες 149 – 150 της Αναλυτικής Γεωμετρίας (Ανδρεαδάκη), Ασκήσεις 1 – 4 και 6 – 9.

Άσκηση 26 Βρείτε την εξίσωση της παραβολής με εστία $F : (3,\, 0)$ και διευθετούσα $x = -1$.

Άσκηση 27 Βρείτε την εξίσωση της παραβολής με εστία $F : (0,\, 3)$ και διευθετούσα $y = 9$.

Άσκηση 28 Βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής με εξίσωση $x + \frac{1}{2}y^2 = 2$ και σχεδιάστε την παραβολή.
Βρείτε την εφαπτομένη στην παραβολή που είναι παράλληλη στην ευθεία $x - 2y = 0$.

Υπόδειξη: Παρατηρούμε οτι το σημείο αναφοράς δεν είναι η κορυφή της παραβολής, και χρησιμοποιούμε τη μεταβλητή $x' = x - 2$ αντί της κανονικής μορφής των εξισώσεων για την παραβολή και την εφαπτομένη της παραβολής σε σημείο X_1.
Συγκρίνοντας την εξίσωση της εφαπτομένης σε σημείο X_1 με την εξίσωση $x - 2y = c$, βρίσκουμε το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη με την ευθεία $x - 2y = 0$.

Άσκηση 29 Στη σελίδα 170 της Αναλυτικής Γεωμετρίας (Ανδρεαδάκη), Ασκήσεις 4, 5, 7, 13, 14.