ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2014-15
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ202 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 3

Επιφάνειες στο Χώρο

Άσκηση 1 Μία ευθεία είναι εφαπτομένη μίας σφαίρας όταν έχει μόνον ένα κοινό σημείο με τη σφαίρα. Θεωρήστε την ευθεία από το σημείο $P_1 : (x_1,\, y_1,\, z_1)$ με διάνυσμα διεύθυνσης $(u,\, v,\, w)$. Βρείτε την εξίσωση της σφαίρας με κέντρο στο σημείο $(a,\, b,\, c)$ που εφάπτεται στην ευθεία και τις συντεταγμένες του σημείου επαφής.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Η ακτίνα της σφαίρας είναι ίση με την απόσταση του κέντρου $K : (a,\, b,\, c)$ απο την ευθεία ε η οποία έχει παραμετρική παράσταση $(x_1,\, y_1,\, z_1) + t(u,\, v,\, w)$. Αυτή είναι ίση με το 'ύψος' του παραλληλογράμμου με πλευρές $\overrightarrow{P_1K}$ και $\vec{u} = (u,\, v,\, w)$. Δηλαδή $r = \dfrac{|\overrightarrow{P_1K} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$. Το σημείο επαφής είναι η προβολή του K στην ευθεία ε, δηλαδή το σημείο με διάνυσμα θέσης

$$OP_1 + \mathrm{pr}_{\vec{u}}\overrightarrow{P_1K} = (x_1,\, y_1,\, z_1) + \frac{(x_1 - a,\, y_1 - b,\, z_1 - c)\cdot(u,\, v,\, w)}{u^2 + v^2 + w^2}(u,\, v,\, w)\,.$$

Άσκηση 2 Βρείτε την εξίσωση της οικογένειας σφαιρών που έχουν κέντρα στον άξονα Ox και εφάπτονται στην ευθεία με εξισώσεις $x = y,\ y = z$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Η ακτίνα της σφαίρας είναι ίση με την απόσταση του κέντρου $K : (x_0,\, 0,\, 0)$ απο την ευθεία ε η οποία έχει παραμετρική παράσταση $t(1,\, 1,\, 1)$. Δηλαδή $r = \frac{|(x_0,0,0)\times(1,1,1)|}{|(1,1,1)|} = \sqrt{\frac{2}{3}}x_0$. Η εξίσωση των σφαιρών είναι $(x - x_0)^2 + y^2 + z^2 = \frac{2}{3}x_0^2$, για $x_0 \neq 0$.

Άσκηση 3 Βρείτε την εξίσωση της οικογένειας σφαιρών που έχουν κέντρο στο σημείο $(2,\, 1,\, -2)$.

Άσκηση 4 Βρείτε την εξίσωση της οικογένειας σφαιρών που έχουν κέντρο στην ευθεία $y = 2x,\ z = 3y$ και εφάπτονται στο επίπεδο $z = 0$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Το διάνυσμα διεύθυνσης της ευθείας είναι $(-2,\, 1,\, 0) \times (0,\, 3,\, 1) = (1,\, 2,\, 6)$. Άρα τα κέντρα των σφαιρών της οικογένειας είναι $(x_0,\, 2x_0,\, 6x_0)$, και οι σφαίρες εφάπτονται στο επίπεδο $z = 0$, άρα η ακτίνα είναι $r = |z| = 6|x_0|$.

Άσκηση 5 Βρείτε τον πόλο του επιπέδου $Ax + By + Cz + D = 0$ ως προς τη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Το πολικό επίπεδο του σημείου (x_1, y_1, z_1) έχει εξίσωση $x_1x + y_1y + z_1z - r^2 = 0$. Αυτό συμπίπτει με το επίπεδο $Ax + By + Cz + D = 0$ εάν $(x_1, y_1, z_1, -r^2) = \mu(A, B, C, D)$. Συνεπώς $\mu = -\frac{r^2}{D}$, και ο πόλος του επιπέδου $Ax + By + Cz + D = 0$ είναι το σημείο $\left(-\frac{AD}{r^2}, -\frac{BD}{r^2}, -\frac{CD}{r^2}\right)$.

Άσκηση 6 Βρείτε την εξίσωση της επιφάνειας που παράγεται κατά την περιστροφή των παρακάτω επίπεδων καμπυλών γύρω από τον άξονα που δίνεται.

α′. $x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0, \qquad$ άξονας Ox,

β′. $x^2 + (y - 1)^2 = 9, \quad z = 0, \qquad$ άξονας Oy,

γ′. $y^2 = 4x, \quad z = 0 \qquad$ άξονας Ox,

δ′. $xz = 2, \quad y = 0, \qquad$ άξονας Oz,

ε′. $x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0, \qquad$ άξονας $x = 6,\ z = 0$,

ϛ′. $z = \log x, \quad y = 0, \qquad$ άξονας Oz.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α′. $x^2 + y^2z^2 + = 4$, σφαίρα με κέντρο $(0, 0, 0)$, ακτίνα 2,

β′. $x^2 + z^2 + (y - 1)^2 = 9$, σφαίρα με κέντρο $(0, 1, 0)$, ακτίνα 3,

γ′. $y^2 + z^2 = 4x$, παραβολοειδές εκ περιστροφής,

δ′. $\sqrt{x^2 + y^2}z = 2$, η δίχωνη επιφάνεια που προκύπτει από περιστροφή του γραφήματος της συνάρτησης $z = \frac{2}{x}$,

ε′. $(\sqrt{(x - 6)^2 + z^2} + 6)^2 + y^2 = 4$, σπείρα. (Χρησιμοποιήστε τη μεταβλητή $x' = x - 6$.)

Άσκηση 7 Βρείτε παραμετρική περιγραφή του ελλειψοειδούς, χρησιμοποιώντας δύο παραμέτρους ϑ και φ, και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις sin, cos, με τρόπο ανάλογο με την παραμέτρηση της σφαίρας από το γεωγραφικό πλάτος και το γεωγραφικό μήκος.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$(x, y, z) = (a \cos\vartheta \cos\varphi,\ b \cos\vartheta \sin\varphi,\ c \sin\vartheta)$, για $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Άσκηση 8 Βρείτε παραμετρική περιγραφή του μονόχωνου υπερβολοειδούς, χρησιμοποιώντας δύο παραμέτρους u και φ, τις τριγωνομετρικές και τις υπερβολικές συναρτήσεις.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$(x, y, z) = (a \cosh t \cos\varphi,\ b \cosh t \sin\varphi,\ c \sinh t)$.

Άσκηση 9 Βρείτε παραμετρική περιγραφή του δίχωνου υπερβολοειδούς, χρησιμοποιώντας δύο παραμέτρους u και φ.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$(x, y, z) = (a \sinh t \cos \varphi, ?\ ?\ ?, ?\ ?\ ?)$.

Άσκηση 10 Βρείτε παραμετρική περιγραφή του ελλειπτικού παραβολοειδούς, χρησιμοποιώντας δύο παραμέτρους u και φ.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$(x, y, z) = (au \cos \varphi, bu \sin \varphi, \frac{u^2}{2c})$.

Άσκηση 11 Βρείτε παραμετρική περιγραφή του υπερβολικού παραβολοειδούς, χρησιμοποιώντας δύο παραμέτρους u και t.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$(x, y, z) = (au \cosh t, ?\ ?\ ?, ?\ ?\ ?)$.

Άσκηση 12 Για τις ακόλουθες εξισώσεις,

α΄. ονομάστε την επιφάνεια την οποία παριστάνουν

β΄. βρείτε τις εξισώσεις των τομών της επιφάνειας με τα επίπεδα (x, y), (x, z), (y, z).

γ΄. βρείτε τις εξισώσεις των τομών της επιφάνειας με τα επίπεδα $x = 4$, $y = 4$ και $z = 4$.

i. $9x^2 + 4z^2 = 36y$

ii. $4y^2 + 4z^2 - x^2 = 0$

iii. $x^2 + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{25} = 1$

iv. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{4} = 1$

Απάντηση - Υπόδειξη.

i. Ελλειπτικό παραβολοειδές.

ii. Κώνος εκ περιστροφής.

iii. Ελλειψοειδές.

iv. Μονόχωνο υπερβολοειδές

Άσκηση 13 Φέρετε τις ακόλουθες εξισώσεις σε κανονική μορφή συμπληρώνοντας τα τετράγωνα, και ονομάστε τις επιφάνειες που παριστάνουν:

α′. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8 = 0$

β′. $2x^2 + y^2 - 4z^2 + 4z - 6y - 2 = 0$

γ′. $y^2 + x^2 - 4z^2 = 2x + 8z$

δ′. $x^2 + z^2 - 4x - y - 5 = 0$

Απάντηση - Υπόδειξη.

α′. $(x-3)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 21$, σφαίρα.

β′. $2x^2 + (y-3)^2 - 4(z-\frac{1}{2})^2 = 10$, ελλειψοειδές.

γ′. δίχωνο υπερβολοειδές, εκ περιστροφής.

δ′. παραβολοειδές, εκ περιστροφής.