

## MEM202 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

### Φυλλάδιο Προβλημάτων 3

#### Επιφάνειες στο Χώρο

**Άσκηση 1** Μία ευθεία είναι εφαπτομένη μίας σφαίρας όταν έχει μόνον ένα κοινό σημείο με τη σφαίρα. Θεωρήστε την ευθεία από το σημείο  $P_1 : (x_1, y_1, z_1)$  με διάνυσμα διεύθυνσης  $(u, v, w)$ . Βρείτε την εξίσωση της σφαίρας με κέντρο στο σημείο  $(a, b, c)$  που εφάπτεται στην ευθεία και τις συντεταγμένες του σημείου επαφής.

**Άσκηση 2** Βρείτε την εξίσωση της οικογένειας σφαιρών που έχουν κέντρα στον άξονα  $Ox$  και εφάπτονται στην ευθεία με εξισώσεις  $x = y, y = z$ .

**Άσκηση 3** Βρείτε την εξίσωση της οικογένειας σφαιρών που έχουν κέντρο στο σημείο  $(2, 1, -2)$ .

**Άσκηση 4** Βρείτε την εξίσωση της οικογένειας σφαιρών που έχουν κέντρο στην ευθεία  $y = 2z, z = 3y$  και εφάπτονται στο επίπεδο  $z = 0$ .

**Άσκηση 5** Βρείτε τον πόλο του επιπέδου  $Ax + By + Cz + D = 0$  ως προς τη σφαίρα  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ .

**Άσκηση 6** Βρείτε την εξίσωση της επιφάνειας που παράγεται κατά την περιστροφή των παρακάτω επίπεδων καμπυλών γύρω από τον άξονα που δίνεται.

α'.  $x^2 + y^2 = 4, z = 0,$  άξονας  $Ox,$

β'.  $x^2 + (y - 1)^2 = 9, z = 0,$  άξονας  $Oy,$

γ'.  $y^2 = 4x, z = 0$  άξονας  $Ox,$

δ'.  $xz = 2, y = 0,$  άξονας  $Oz,$

ε'.  $x^2 + y^2 = 4, z = 0,$  άξονας  $x = 6, z = 0,$

ς'.  $z = \log x, y = 0,$  άξονας  $Oz.$

**Άσκηση 7** Βρείτε παραμετρική περιγραφή του ελλειψοειδούς, χρησιμοποιώντας δύο παραμέτρους  $\vartheta$  και  $\varphi$ , και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\sin, \cos$ , με τρόπο ανάλογο με την παραμέτρηση της σφαίρας από το γεωγραφικό πλάτος και το γεωγραφικό μήκος.

**Άσκηση 8** Βρείτε παραμετρική περιγραφή του μονόχωνου υπερβολοειδούς, χρησιμοποιώντας δύο παραμέτρους  $u$  και  $\varphi$ , τις τριγωνομετρικές και τις υπερβολικές συναρτήσεις.

**Άσκηση 9** Βρείτε παραμετρική περιγραφή του δίχωνου υπερβολοειδούς, χρησιμοποιώντας δύο παραμέτρους  $u$  και  $\varphi$ .

**Άσκηση 10** Βρείτε παραμετρική περιγραφή του ελλειπτικού παραβολοειδούς, χρησιμοποιώντας δύο παραμέτρους  $u$  και  $\varphi$ .

**Άσκηση 11** Βρείτε παραμετρική περιγραφή του υπερβολικού παραβολοειδούς, χρησιμοποιώντας δύο παραμέτρους  $u$  και  $\varphi$ .

**Άσκηση 12** Για τις ακόλουθες εξισώσεις,

α'. ονομάστε την επιφάνεια την οποία παριστάνουν

β'. βρείτε τις εξισώσεις των τομών της επιφάνειας με τα επίπεδα  $(x, y)$ ,  $(x, z)$ ,  $(y, z)$ .

γ'. βρείτε τις εξισώσεις των τομών της επιφάνειας με τα επίπεδα  $x = 4$ ,  $y = 4$  και  $z = 4$ .

i.  $9x^2 + 4z^2 = 36y$

ii.  $4y^2 + 4z^2 - x^2 = 0$

iii.  $x^2 + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$

iv.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$

**Άσκηση 13** Φέρετε τις ακόλουθες εξισώσεις σε κανονική μορφή συμπληρώνοντας τα τετράγωνα, και ονομάστε τις επιφάνειες που παριστάνουν:

α'.  $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8 = 0$

β'.  $2x^2 + y^2 - 4z^2 + 4z - 6y - 2 = 0$

γ'.  $y^2 + x^2 - 4z^2 = 2x + 8z$

δ'.  $x^2 + z^2 - 4x - y - 5 = 0$