

## MEM202 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

### Παρατηρήσεις

1. Διαβάστε προσεκτικά τα θέματα πριν αρχίσετε να απαντάτε. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι σαφείς, σύντομες και αιτιολογημένες.
2. Γράψτε σε διαφορετική σελίδα την απάντηση κάθε θέματος. Συνιστάται να γράφετε τις απαντήσεις μόνο στη δεξιά σελίδα, και να χρησιμοποιείτε την αριστερή για πρόχειρους υπολογισμούς (ή το αντίθετο αν είστε αριστερόχειρες).
3. Πρέπει να παραδώσετε όλες τις κόλλες που χρησιμοποιήσατε.
4. Η εξέταση διαρκεί 2 ώρες. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ ΝΑ ΕΧΕΤΕ ΚΙΝΗΤΑ ΤΗΛΕΦΩΝΑ ΜΕΣΑ ΣΤΗΝ ΑΙΘΟΥΣΑ. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ Η ΕΞΟΔΟΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΙΘΟΥΣΑ σε όλη τη διάρκεια της εξέτασης. Την πρώτη μισή ώρα της εξέτασης απαγορεύεται η έξοδος ή η αποχώρηση από την εξέταση.
5. Οι βαθμοί δίδονται σε παρένθεση. Ο μέγιστος βαθμός είναι 100.

### ΘΕΜΑ 1.

Δίδονται τα σημεία  $A, B, C$ , και διανύσματα  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$ , τέτοια ώστε  $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = 0$  και  $|\vec{w}| = 2|\vec{u}|$ . Είναι οι ακόλουθες σχέσεις αληθείς ή ψευδείς; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

α'.  $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{w}$

β'.  $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$

γ'.  $|2\vec{u} + \vec{w}| > |\vec{w}|$ .

### ΘΕΜΑ 2.

Δίδονται τα σημεία

$$A : (0, 1, -1), \quad B : (1, -1, -2), \quad C : (3, 5, 1), \quad D : (4, 6, 3)$$

και τα διανύσματα

$$\vec{u} = (1, 2, -1), \quad \vec{w} = (1, -2, -1).$$

Θεωρούμε το επίπεδο  $\Pi$  που περιέχει το  $A$  και είναι κάθετο στο  $\vec{u}$ , το επίπεδο  $\Sigma$  που περιέχει το  $B$  και είναι κάθετο στο  $\vec{w}$ , την ευθεία  $\delta$  στην οποία τέμνονται τα  $\Pi$  και  $\Sigma$ , και την ευθεία  $\varepsilon$  που περιέχει τα  $C$  και  $D$ .

α'. Βρείτε την παραμετρική έκφραση της ευθείας  $\delta$ .

β'. Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των ευθειών  $\varepsilon$  και  $\delta$ .

### ΘΕΜΑ 3.

1. Δείξτε ότι εάν η ευθεία με εξίσωση  $y = \lambda x + \kappa$  εφάπτεται στην έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

τότε

$$\kappa = \pm \sqrt{a^2 \lambda^2 + b^2}.$$

2. Βρείτε τις εφαπτόμενες στην έλλειψη  $2x^2 + y^2 = 6$ , οι οποίες είναι κάθετες στην εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

### ΘΕΜΑ 4.

Δείξτε ότι το γινόμενο των αποστάσεων ενός σημείου της υπερβολής με εξίσωση  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  από τις ασύμπτωτες είναι  $\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$ .

### ΘΕΜΑ 5.

Δίδεται η εξίσωση

$$4x^2 - y^2 - 8x + 4y + 4z = 0.$$

α'. Συμπληρώστε τα τετράγωνα για να προσδιορίσετε την επιφάνεια που παριστάνει η εξίσωση.

β'. Βρείτε τις εξισώσεις της τομής της επιφάνειας με το  $(y, z)$ -επίπεδο, και προσδιορίστε τι είδος καμπύλης είναι η τομή.