ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Περίοδος Σεπτεμβρίου 2008
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

M100
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Παρατηρήσεις

1. Διαβάστε προσεκτικά τα θέματα πριν αρχίσετε να απαντάτε. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι σαφείς, σύντομες και αιτιολογημένες.
2. Γράψτε σε διαφορετική σελίδα την απάντηση κάθε θέματος. Συνιστάται να γράφετε τις απαντήσεις μόνο στη δεξιά σελίδα, και να χρησιμοποιείτε την αριστερή για πρόχειρους υπολογισμούς (ή το αντίθετο αν είστε αριστερόχειρες).
3. Πρέπει να παραδόσετε όλες τις κόλλες που χρησιμοποιήσατε.
4. Η εξέταση διαρκεί 2 ώρες. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ Η ΕΞΟΔΟΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΙΘΟΥΣΑ, παρά μόνο μετά από άδεια του διδάσκοντος (όχι του επιτηρητή). Την πρώτη ώρα της εξέτασης απαγορεύεται η έξοδος ή η αποχώρηση από την εξέταση.
5. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ ΤΟ ΚΑΠΝΙΣΜΑ μέσα στις αίθουσες της εξέτασης.
6. Οι βαθμοί δίδονται σε παρένθεση. Ο μέγιστος βαθμός είναι 80.

ΘΕΜΑ 1. (20)

1. Δίδονται τα σημεία P, Q, R, και διανύσματα $\vec{x} = \overrightarrow{PQ}$, $\vec{y} = \overrightarrow{QR}$, τέτοια ώστε $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{x} = 0$ και $|\vec{x}| = |\vec{y}|/2$. Εάν $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου P, εκφράστε συναρτήσει των $\vec{p}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, τα διανύσματα θέσης των σημείων Q, R, και του σημείου S με απλό λόγο

$$(PRS) = \frac{(\overrightarrow{PS})}{(\overrightarrow{SR})} = \frac{1}{2}\,.$$

2. Περιγράψτε γεωμετρικά τα παρακάτω σύνολα στο μιγαδικό επίπεδο:

α′. $B_1 = \{z \,:\, |3z - 6 + 2i| = |2z - 4|\}$

β′. $B_2 = \{z \,:\, 2|z + i| > |2z - 4|\}$

γ′. $B_3 = \{z \,:\, z^6 = 16i\}$.

ΘΕΜΑ 2. (20)
Δίδεται η ευθεία δ του $\mathbb{E}^3$, η οποία είναι η τομή των επιπέδων Π_1 και Π_2 με εξισώσεις

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: x + y + 2z - 4 = 0 \\ \Pi_2 &: -2x + y - z + 5 = 0. \end{aligned}$$

Εάν γνωρίζετε οτι το σημείο $(2,\, 0,\, 1)$ βρίσκεται στην ευθεία δ, βρείτε

α'. Την παραμετρική έκφραση της ευθείας δ.

β'. Την απόσταση της δ από την ευθεία

$$\varepsilon = \{(1 + 2t,\, 2 + t,\, 2 - t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}\,.$$

ΘΕΜΑ 3. (20)
1. Δείξτε οτι εάν η ευθεία με εξίσωση $y = rx + s$ εφάπτεται στην έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

τότε

$$s = \pm\sqrt{a^2r^2 + b^2}\,.$$

2. Βρείτε τις εφαπτόμενες στην έλλειψη $2x^2 + y^2 = 6$, οι οποίες είναι κάθετες στην εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο $(\sqrt{2},\, \sqrt{2})$.

ΘΕΜΑ 4. (20)
Βρείτε την εξίσωση του γεωμετρικού τόπου των σημείων στο χώρο των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από το σημείο $A : (0,\, a,\, 0)$ και $A' : (0,\, 2a,\, 0)$ είναι σταθερό και ίσο με $d > |a|$. Τί είδους επιφάνεια είναι αυτός ο γεωμετρικός τόπος; Πόσα επίπεδα συμμετρίας αυτής της επιφάνειας μπορείτε να βρείτε;