

M1113 ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΧΩΡΟΣ

Εργαστήριο Προβλημάτων 10

Τρίτη, 17/12/2013

Άσκηση 10.1 Βρείτε τον τύπο που δίνει την απόσταση δύο σημείων $A(r, \vartheta), B(r', \vartheta')$ σε πολικές συντεταγμένες.

Υπόδειξη: Στον τύπο για την απόσταση μεταξύ δύο σημείων σε καρτεσιανές συντεταγμένες, αντικαθιστούμε την έκφραση των x και y συναρτήσει των r και θ .

Άσκηση 10.2 Ξεκινώντας από την εξίσωση της ευθείας $ax + by + c = 0$ και εκφράζοντας τα x, y με πολικές συντεταγμένες βρείτε την εξίσωση ευθείας σε πολικές συντεταγμένες. Πράξετε τα ανάλογα για τον κύκλο ξεκινώντας από την εξίσωσή του σε καρτεσιανές συντεταγμένες $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$.

Άσκηση 10.3 Βρείτε τους διάφορους τόπους που προκύπτουν όταν δύο εκ των τριών σφαιρικών συντεταγμένων τεθούν ίσες με αντίστοιχες σταθερές. Το ανάλογο πρόβλημα για κυλινδρικές συντεταγμένες.

Υπόδειξη: Σε σφαιρικές συντεταγμένες, όταν r και θ είναι σταθερά έχουμε ένα ημικύκλιο. Ποιό;

Όταν r και φ είναι σταθερά έχουμε ένα κύκλο ή ένα σημείο. Ποιό;

Όταν θ και φ είναι σταθερά έχουμε μία ημιευθεία. Ποιά;

Άσκηση 10.4 Βρείτε τις αναλυτικές εκφράσεις σε σφαιρικές συντεταγμένες των τόπων των οποίων οι αναλυτικές εκφράσεις σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι:

α'. $x^2 + y^2 = 5,$

β'. $3x - 4y + 5z - 1 = 0,$

γ'. $4x^2 - y^2 = 1,$

δ'. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0,$

ε'. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ και $x \geq 0.$

Υπόδειξη: Αφού μιλάμε για σφαιρικές συντεταγμένες, βρισκόμαστε σε τρεις διαστάσεις. Το α' δεν είναι κύκλος! Είναι κύλινδρος.

Σε κάθε περίπτωση αντικαθιστούμε τα x, y και z από τις εκφράσεις τους σε σφαιρικές συντεταγμένες και απλοποιούμε την παράσταση που προκύπτει.