ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ **Χειμερινό Εξάμηνο 2013-14**
Τμήμα Μαθηματικών **Διδάσκοντες: Χρήστος Κουρουνιώτης**
Θανάσης Φειδάς

M1113 ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΧΩΡΟΣ

Εργαστήριο Προβλημάτων 2

Τρίτη, 22/10/2014

Άσκηση 2.1 Αποδείξτε ότι γιά κάθε τρίγωνο ABC ισχύει: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$.
Αν γιά τα διανύσματα $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ ισχύει οτι $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = 0$, τότε αποδείξτε οτι υπάρχει τρίγωνο ABC τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{CA} \sim \overrightarrow{w}$.

Υπόδειξη: Για το πρώτο, θεωρείστε τρίγωνο ABC και σημείο αναφοράς O. Τότε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, κλπ. Για το δεύτερο, επιλέξτε ένα σημείο A του επιπέδου, και σημείο B τέτοιο ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ να είναι ισοδύναμο με το $\overrightarrow{u}$. Κατόπιν σημείο C τέτοιο ώστε $\overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{v}$. Τώρα πρέπει να αποδείξετε οτι το διάνυσμα $\overrightarrow{CA}$ είναι ισοδύναμο με το $\overrightarrow{w}$.

Άσκηση 2.2 Αποδείξτε με χρήση διανυσμάτων (δηλαδή χωρίς να χρησιμοπποιήσετε συντεταγμένες ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς!) οτι η ευθεία που ενώνει τα μέσα M, N των πλευρών AB και AC ενός τριγώνου ABC είναι παράλληλη προς την πλευρά BC και έχει μήκος το μισό της BC.

Άσκηση 2.3 Θεωρείστε τις ευθείες ε_1 και ε_2 των οποίων το γενικό σημείο P_1 και P_2 ικανοποιεί τις σχέσεις $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{u_1} + t\,\overrightarrow{v_1}$ και $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{u_2} + s\,\overrightarrow{v_2}$ αντίστοιχα. Αποδείξτε οτι αν τα $\overrightarrow{v_1}$ και $\overrightarrow{v_2}$ δεν είναι παράλληλα, τότε οι δύο ευθειες έχουν ένα μοναδικό σημείο τομής. Τι γίνεται αν τα $\overrightarrow{v_1}$ και $\overrightarrow{v_2}$ είναι παράλληλα; Εξηγείστε γεωμετρικά τις παρατηρήσεις σας.

Υπόδειξη: Τα σημεία της ευθείας ε_1 ικανοποιούν τη σχέση $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{u_1} + t\,\overrightarrow{v_1}$ για κάποιο t και τα σημεία της ευθείας ε_2 ικανοποιούν τη σχέση $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{u_2} + s\,\overrightarrow{v_2}$ για κάποιο s. Για να βρίσκεται ένα σημείο και στις δύο ευθείες πρέπει να υπάρχουν αριθμοί t και s τέτοιοι ώστε $\overrightarrow{u_1} + t\,\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{u_2} + s\,\overrightarrow{v_2}$. Αποδείξτε οτι αν τα $\overrightarrow{v_1}$ και $\overrightarrow{v_2}$ δεν είναι παράλληλα πράγματι υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί.

Άσκηση 2.4 Θεωρείστε ένα σύστημα με δύο εξισώσεις και δύο αγνώστους (μεταβλητές), x και y,

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2\,. \end{aligned}$$

Θέλουμε να βρούμε τις λύσεις του συστήματος, δηλαδή τα ζεύγη (x, y) για τα οποία ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι δεδομένες εξισώσεις. Παρατηρείστε οτι, ως προς ένα ορθογώνιο σύστημα αναφοράς, το σύνολο των σημείων με συντεταγμένες (x, y) οι οποίες ικανοποιούν την πρώτη εξίσωση, είναι μία ευθεία. Βρείτε $\overrightarrow{u_1}$ και $\overrightarrow{v_1}$ έτσι ώστε η ευθεία αυτή να δίδεται από μία έκφραση όπως στην Άσκηση 2.3. Παρομοίως γιά την άλλη ευθεία. Πώς εκφράζεται η συνθήκη της 'μη παραλληλίας' των $\overrightarrow{v_1}$ και $\overrightarrow{v_2}$ συναρτήσει των a_1, a_2, b_1, b_2;

Άσκηση 2.5 Μία βάρκα κινείται με σταθερή ταχύτητα $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta)$. Ένα ρεύμα νερού την παρασύρει με επιπρόσθετη ταχύτητα $\overrightarrow{u} = (\gamma, \delta)$. Καθένα από τα α, β, γ, δ μετράται σε 'ναυτικά μίλια ανά ώρα'. Να βρεθούν

α΄. Η ολική τελική ταχύτητα της βάρκας.

β΄. Η γωνία κατά την οποία πρέπει να στρίψει η βάρκα έτσι ώστε να κινείται παράλληλα με την αρχική της διεύθυνση.

γ΄. Η θέση της βάρκας σε $2,5$ ώρες, αν η αρχική της θέση είναι το σημείο $(1, 2)$.

Υπόδειξη: Για το δεύτερο, πρέπει να βρείτε γωνία ϑ τέτοια ώστε αν στο διάνυσμα που έχει ίσο μέτρο με το $\overrightarrow{v}$ αλλά σχηματίζει γωνία ϑ με αυτό, προσθέσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{u}$ να πάρετε ένα διάνυσμα παράλληλο και ομόρροπο με το $\overrightarrow{v}$. Θα χρειαστείτε την προβολή $\mathrm{pr}_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u}$.

Άσκηση 2.6 Έστω M το μέσο της υποτείνουσας AC του ορθογωνίου τριγώνου ABC. Χρησιμοποιήστε το εσωτερικό γινόμενο για να δείξετε ότι $|\overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{CM}|$.

Υπόδειξη: Εκφράστε το διάνυσμα $\overrightarrow{BM}$ με δύο διαφορετικούς τρόπους, και υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BM}$.

Άσκηση 2.7 Αν τα $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ είναι κάθετα και έχουν ίδιο μήκος, δείξετε ότι και τα $2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$, $6\overrightarrow{u} - 4\overrightarrow{v}$ είναι κάθετα.

Άσκηση 2.8 Αν το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο, a είναι το μήκος της πλευράς του, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, και $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$, υπολογίστε το μήκος του $\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$ ως συνάρτηση του a.