

M1113 ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΧΩΡΟΣ

Εργαστήριο Προβλημάτων 2

Τρίτη, 22/10/2014

Άσκηση 2.1 Αποδείξτε ότι για κάθε τρίγωνο ABC ισχύει: $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = 0$.
Αν για τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ισχύει ότι $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$, τότε αποδείξτε ότι υπάρχει τρίγωνο ABC τέτοιο ώστε $\vec{AB} \sim \vec{u}, \vec{BC} \sim \vec{v}, \vec{CA} \sim \vec{w}$.

Άσκηση 2.2 Αποδείξτε με χρήση διανυσμάτων (δηλαδή χωρίς να χρησιμοποιήσετε συντεταγμένες ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς!) ότι η ευθεία που ενώνει τα μέσα M, N των πλευρών AB και AC ενός τριγώνου ABC είναι παράλληλη προς την πλευρά BC και έχει μήκος το μισό της BC .

Άσκηση 2.3 Θεωρήστε τις ευθείες ε_1 και ε_2 των οποίων το γενικό σημείο P_1 και P_2 ικανοποιεί τις σχέσεις $\vec{OP}_1 = \vec{u}_1 + t\vec{v}_1$ και $\vec{OP}_2 = \vec{u}_2 + s\vec{v}_2$ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι αν τα \vec{v}_1 και \vec{v}_2 δεν είναι παράλληλα, τότε οι δύο ευθείες έχουν ένα μοναδικό σημείο τομής. Τι γίνεται αν τα \vec{v}_1 και \vec{v}_2 είναι παράλληλα; Εξηγήστε γεωμετρικά τις παρατηρήσεις σας.

Άσκηση 2.4 Θεωρήστε ένα σύστημα με δύο εξισώσεις και δύο αγνώστους (μεταβλητές), x και y ,

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2.\end{aligned}$$

Θέλουμε να βρούμε τις λύσεις του συστήματος, δηλ. τα ζεύγη (x, y) για τα οποία ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι δεδομένες εξισώσεις. Παρατηρήστε ότι, ως προς ένα ορθογώνιο σύστημα αναφοράς, το σύνολο των σημείων με συντεταγμένες (x, y) οι οποίες ικανοποιούν την πρώτη εξίσωση, είναι μία ευθεία. Βρείτε \vec{u}_1 και \vec{v}_1 έτσι ώστε η ευθεία αυτή να δίδεται από μία έκφραση όπως στην Άσκηση 2.3. Παρομοίως για την άλλη ευθεία. Πώς εκφράζεται η συνθήκη της 'μη παραλληλίας' των \vec{v}_1 και \vec{v}_2 συναρτήσει των a_1, a_2, b_1, b_2 ;

Άσκηση 2.5 Μία βάρκα κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v} = (\alpha, \beta)$. Ένα ρεύμα νερού την παρασύρει με επιπρόσθετη ταχύτητα $\vec{u} = (\gamma, \delta)$. Καθένα από τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ μετράται σε 'ναυτικά μίλια ανά ώρα'. Να βρεθούν

α'. Η ολική τελική ταχύτητα της βάρκας.

β'. Η γωνία κατά την οποία πρέπει να στρίψει η βάρκα έτσι ώστε να κινείται παράλληλα με την αρχική της διεύθυνση.

γ'. Η θέση της βάρκας σε 2,5 ώρες, αν η αρχική της θέση είναι το σημείο (1, 2).

Άσκηση 2.6 Έστω M το μέσο της υποτεινούσας AC του ορθογωνίου τριγώνου ABC . Χρησιμοποιήστε το εσωτερικό γινόμενο για να δείξετε ότι $|\overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{CM}|$.

Άσκηση 2.7 Αν τα \vec{u} , \vec{v} είναι κάθετα και έχουν ίδιο μήκος, δείξετε ότι και τα $2\vec{u} + 3\vec{v}$, $6\vec{u} - 4\vec{v}$ είναι κάθετα.

Άσκηση 2.8 Αν το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο, a είναι το μήκος της πλευράς του, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, και $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, υπολογίστε το μήκος του $\vec{u} + 3\vec{v}$ ως συνάρτηση του a .