ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2013-14
Διδάσκοντες: Χρήστος Κουρουνιώτης
Θανάσης Φειδάς

M1113 ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΧΩΡΟΣ

Εργαστήριο Προβλημάτων 3

Τρίτη, 29/10/2014

Άσκηση 3.1 Γράψτε σε τριγωνομετρική και σε εκθετική μορφή τους αριθμούς

α΄. -10	β΄. $10\mathrm{i}$
γ΄. $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$	δ΄. $-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$

Άσκηση 3.2 Υπολογίστε τους αριθμούς

α΄. $\dfrac{7(\cos 130^\circ + \mathrm{i}\sin 130^\circ)}{14(\cos(-20^\circ)+\mathrm{i}\sin(-20^\circ))}$

β΄. $\left[3\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)\right]^8$

γ΄. $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^{2013}$

Υπόδειξη: Για το (α΄), εκτελέστε τις πράξεις σε τριγωνομετρική μορφή, και θα καταλήξετε σε γωνίες των οποίων γνωρίζετε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Για το (γ΄) θα χρειαστείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του 2013 με το 6.

Άσκηση 3.3 α΄. Αν z είναι οποιοσδήποτε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός, δείξτε ότι $z^{-1}=\overline{z}$ εάν και μόνον εάν $|z|=1$.
β΄. Βρείτε τον αριθμό z εάν $z^2=\overline{z}$

Υπόδειξη: Για το (β΄) βρείτε πρώτα ποιές τιμές μπορεί να πάρει το $|z|$.

Άσκηση 3.4 Περιγράψτε γεωμετρικά τα υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου

α΄. $\{z\in\mathbb{C} : \|z-1\|\le 1\}$	β΄. $\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z\}$
γ΄. $\mathcal{H}=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z>0\}$	δ΄. $\{z\in\mathbb{C} : z+\overline{z}=0\}$

Άσκηση 3.5 α΄. Εάν $\alpha=a+\mathrm{i}b\in\mathbb{C}$, εκφράστε με μιγαδικούς όρους, χρησιμοποιώντας τα α, $\overline{\alpha}$, z και $\overline{z}$ την εξίσωση που ικανοποιούν τα σημεία $z=x+\mathrm{i}y$ για τα οποία $ax+by=0$.
β΄. Δίδονται μιγαδικοί αριθμοί $\alpha=a+\mathrm{i}b$ και $\gamma=c+\mathrm{i}d$. Δείξτε οτι τα σημεία του μιγαδικού

επιπέδου $z = x + \mathrm{i}y$ που ικανοποιούν την εξίσωση $\alpha(\overline{z} - \overline{\gamma}) - \overline{\alpha}(z - \gamma) = 0$ βρίσκονται στην ευθεία που περνάει από το σημείο $(c,\, d)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $(a,\, b)$.

Υπόδειξη: Για το (α′) εκφράστε τα x και y συναρτήσει των z και $\bar{z}$, και αντικαταστείστε τα στην εξίσωση. Για το (β′) δείτε τις συμπληρωματικές σημειώσεις.

Άσκηση 3.6 Λύστε τις εξισώσεις

α′. $z^8 = 1$ β′. $z^3 = -\mathrm{i}$

γ′. $z^3 = 2 + 2\mathrm{i}$ δ′. $z^3 + 3z^2 + 4z = 8$

Υπόδειξη: Για το (δ′) παρατηρείστε οτι μία ρίζα είναι το 1. Για να βρείτε τις άλλες δύο μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον τύπο των ριζών της εξίσωσης δευτέρου βαθμού.

Άσκηση 3.7 Δείξτε ότι οι δυνάμεις οποιασδήποτε πέμπτης ρίζας της μονάδας διαφορετικής από το 1, παράγουν και τις 5 πέμπτες ρίζες.
Δείξτε ότι αυτό δεν ισχύει για τις 6 έκτες ρίζες: βρείτε δύο έκτες ρίζες τις μονάδας τέτοιες ώστε καμία δύναμη της μίας να μην είναι ίση με την άλλη.

Υπόδειξη: Πρέπει να δείξετε οτι κάθε μία ρίζα παράγει όλες τις άλλες. Αν μία δύναμη της ρίζας ω_k είναι ίση με μία άλλη ρίζα για την οποία έχετε δείξει οτι παράγει όλες τις άλλες, τότε το ίδιο ισχύει για την ω_k.

Άσκηση 3.8 Βρείτε και χαρακτηρίστε γεωμετρικά το σύνολο των λύσεων των εξισώσεων:

α′. $|z - 2 + 3i| = 2$,

β′. $\mathrm{Re}\,(\bar{z} + i) = 1$.

Υπόδειξη: Το (α′) είναι ένας κύκλος. Ποιό είναι το κέντρο και ποιά η ακτίνα του; Προσπαθήστε να μην αντικαταστήσετε $z = x + \mathrm{i}y$, αλλά να εργαστείτε με τα z. Για το (β′) ίσως είναι προτιμότερο να αντικαταστήσετε $z = x + \mathrm{i}y$.