ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2013-14
Διδάσκοντες: Χρήστος Κουρουνιώτης
Θανάσης Φειδάς

M1113 ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΧΩΡΟΣ

Εργαστήριο Προβλημάτων 3

Τρίτη, 29/10/2014

Άσκηση 3.1 Γράψτε σε τριγωνομετρική και σε εκθετική μορφή τους αριθμούς

α′. -10 β′. $10\mathrm{i}$
γ′. $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ δ′. $-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$

Άσκηση 3.2 Υπολογίστε τους αριθμούς

α′. $\dfrac{7(\cos 130^\circ + \mathrm{i}\sin 130^\circ)}{14(\cos(-20^\circ) + \mathrm{i}\sin(-20^\circ))}$

β′. $\left[3\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)\right]^8$

γ′. $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^{2013}$

Άσκηση 3.3 α′. Αν z είναι οποιοσδήποτε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός, δείξτε ότι $z^{-1} = \overline{z}$ εάν και μόνον εάν $|z| = 1$.
β′. Βρείτε τον αριθμό z εάν $z^2 = \overline{z}$

Άσκηση 3.4 Περιγράψτε γεωμετρικά τα υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου

α′. $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 1\}$ β′. $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z\}$

γ′. $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ δ′. $\{z \in \mathbb{C} : z + \overline{z} = 0\}$

Άσκηση 3.5 α′. Εάν $\alpha = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$, εκφράστε με μιγαδικούς όρους, χρησιμοποιώντας τα α, $\overline{\alpha}$, z και $\overline{z}$ την εξίσωση που ικανοποιούν τα σημεία $z = x + \mathrm{i}y$ για τα οποία $ax + by = 0$.
β′. Δίδονται μιγαδικοί αριθμοί $\alpha = a + \mathrm{i}b$ και $\gamma = c + \mathrm{i}d$. Δείξτε οτι τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου $z = x + \mathrm{i}y$ που ικανοποιούν την εξίσωση $\alpha(\overline{z} - \overline{\gamma}) - \overline{\alpha}(z - \gamma) = 0$ βρίσκονται στην ευθεία που περνάει από το σημείο (c, d) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα (a, b).

Άσκηση 3.6 Λύστε τις εξισώσεις

α΄. $z^8 = 1$	β΄. $z^3 = -\mathrm{i}$
γ΄. $z^3 = 2 + 2\mathrm{i}$	δ΄. $z^3 + 3z^2 + 4z = 8$

Άσκηση 3.7 Δείξτε ότι οι δυνάμεις οποιασδήποτε πέμπτης ρίζας της μονάδας διαφορετικής από το 1, παράγουν και τις 5 πέμπτες ρίζες.

Δείξτε ότι αυτό δεν ισχύει για τις 6 έκτες ρίζες: βρείτε δύο έκτες ρίζες τις μονάδας τέτοιες ώστε καμία δύναμη της μίας να μην είναι ίση με την άλλη.

Άσκηση 3.8 Βρείτε και χαρακτηρίστε γεωμετρικά το σύνολο των λύσεων των εξισώσεων:

α΄. $|z - 2 + 3i| = 2$,

β΄. $\mathrm{Re}\,(\bar{z} + i) = 1$.