ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2013-14
Διδάσκοντες: Χρήστος Κουρουνιώτης
Θανάσης Φειδάς

Μ1113 ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΧΩΡΟΣ

Εργαστήριο Προβλημάτων 4

Τρίτη, 5/11/2014

***Άσκηση* 4.1** Ολοκληρώστε όσες ασκήσεις από προηγούμενα φυλλάδια δεν έχετε τελειώσει.

***Άσκηση* 4.2** Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα De Moivre για να γράψετε τα $\cos(4\vartheta)$, $\sin(4\vartheta)$ ως πολυώνυμα στα $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$.

Υπόδειξη: Για αυτή και την επόμενη άσκηση, δείτε τις σημειώσεις, όπου υπάρχουν παρόμοια παραδείγματα.

***Άσκηση* 4.3** Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα De Moivre για να γράψετε το $\cos^7\vartheta$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\cos\vartheta$, $\cos(3\vartheta), \cos(5\vartheta), \cos(7\vartheta)$.

***Άσκηση* 4.4** Βρείτε και χαρακτηρίστε γεωμετρικά την εικόνα της ευθείας $x = 2$ μέσω της συνάρτησης $f(z) = e^z$, όπου $z = x + \mathrm{i}y$. Το ίδιο για την ευθεία $y = \pi/2$.

Υπόδειξη: Θα βρείτε έναν κύκλο και μία ημιευθεία.

***Άσκηση* 4.5** Βρείτε και χαρακτηρίστε γεωμετρικά την εικόνα της ευθείας $y - x = 1$ μέσω της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{z}$, όπου $z = x + \mathrm{i}y$.

Υπόδειξη: Γνωρίζουμε από τη θεωρία οτι η εικόνα μέσω της $f(z) = \frac{1}{z}$ μίας ευθείας που δεν διέρχεται από το 0 είναι ένας κύκλος που διέρχεται από το μηδέν. Αν βρούμε άλλα δύο σημεία του κύκλου, μπορούμε να τον προσδιορίσουμε, δηλαδή να βρούμε το κέντρο και την ακτίνα του.

Εάν θέλουμε να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα, μπορούμε να υπολογίσουμε το $w = 1/z$, για z στην ευθεία, συναρτήσει του x, και μετά να δείξουμε οτι αυτά τα σημεία απέχουν σταθερή απόσταση από το κέντρο του κύκλου.

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μιγαδικό συμβολισμό z, $\bar{z}$, w, $\bar{w}$ αντί των x, y, για να γράψουμε την εξίσωση της ευθείας στη μορφή $\kappa z + \bar{\kappa}\bar{z} = 1$, στη συνέχεια να αντικαταστήσουμε το z με $1/w$, για να καταλήξουμε στην εξίσωση ενός κύκλου.