

M1113 ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΧΩΡΟΣ

Εργαστήριο Προβλημάτων 5

Τρίτη, 12/11/2014

Άσκηση 5.1 Προσδιορίστε το x ώστε τα διανύσματα $\vec{a} = (x + 1, 2, -x^2 + 5)$ και $\vec{b} = (x + 1, 3x, 1)$ να είναι κάθετα.

Άσκηση 5.2 Βρείτε το εξωτερικό γινόμενο $\vec{v} \times \vec{u}$ των διανυσμάτων $\vec{v} = (1, 2, 1)$, $\vec{u} = (3, 1, 2)$.

Εξετάστε αν τα διανύσματα \vec{v} , \vec{u} και $\vec{w} = (4, 5, 0)$ είναι συνεπίεδα.

Άσκηση 5.3 Δείξτε ότι τα σημεία $A : (6, -4, 1)$, $B : (5, 3, 1)$, $C : (-2, 2, 1)$, $D : (-1, -5, 1)$ είναι κορυφές τετραγώνου.

Άσκηση 5.4 Δίνεται ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ στο χώρο. Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Να εξετασθούν ως προς την ανεξαρτησία τους και τα διανύσματα $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{c}$, $\vec{b} - \vec{c}$.

Υπόδειξη: Δεν χρειάζεται να εξετάσετε εάν κάποιο διάνυσμα είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων δύο. Για τρία διανύσματα στο χώρο έχουμε δεί γεωμετρικό κριτήριο της γραμμικής ανεξαρτησίας, χρησιμοποιώντας το μικτό γινόμενο.

Άσκηση 5.5 Για την πράξη του πολλαπλασιασμού αριθμών, γνωρίζουμε ότι εάν $x \neq 0$ τότε

$$xy = xz \Rightarrow y = z$$

Ισχύει το ανάλογο αποτέλεσμα για την πράξη του εξωτερικού γινομένου; Με άλλα λόγια, ισχύει ότι, αν \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} είναι τυχαία διανύσματα στο χώρο με $\vec{x} \neq \vec{0}$, τότε

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{x} \times \vec{z} \Rightarrow \vec{y} = \vec{z};$$

Υπόδειξη: Θεωρείστε την εξίσωση $\vec{x} \times (\vec{y} - \vec{z}) = \vec{0}$. Πότε είναι το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων 0;

Άσκηση 5.6 Δείξτε ότι, για τυχαία διανύσματα \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} στο χώρο,

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + \vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y}) + \vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{x}) = \vec{0} \quad (\text{ταυτότητα του Jacobi}).$$

Υπόδειξη: Εδώ δεν υπάρχει εύκολη λύση. Πρέπει να κάνετε τον υπολογισμό με συντεταγμένες (ή να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα στις σημειώσεις, το οποίο πάλι με υπολογισμό προκύπτει).

Άσκηση 5.7 Για δική σας ‘διασκέδαση’ μπορείτε να σκεφτείτε το εξής πρόβλημα που έχει να κάνει με αποστάσεις στο επίπεδο:

Όλα τα σημεία του επιπέδου είναι χρωματισμένα άσπρα ή κόκκινα ή μαύρα. Δείξτε ότι υπάρχουν 2 σημεία με απόσταση 1 που έχουν το ίδιο χρώμα.