

## M1113 ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΧΩΡΟΣ

### Εργαστήριο Προβλημάτων 5

Τρίτη, 12/11/2014

**Άσκηση 5.1** Προσδιορίστε το  $x$  ώστε τα διανύσματα  $\vec{a} = (x + 1, 2, -x^2 + 5)$  και  $\vec{b} = (x + 1, 3x, 1)$  να είναι κάθετα.

**Άσκηση 5.2** Βρείτε το εξωτερικό γινόμενο  $\vec{v} \times \vec{u}$  των διανυσμάτων  $\vec{v} = (1, 2, 1)$ ,  $\vec{u} = (3, 1, 2)$ .

Εξετάστε αν τα διανύσματα  $\vec{v}$ ,  $\vec{u}$  και  $\vec{w} = (4, 5, 0)$  είναι συνεπίπεδα.

**Άσκηση 5.3** Δείξτε ότι τα σημεία  $A : (6, -4, 1)$ ,  $B : (5, 3, 1)$ ,  $C : (-2, 2, 1)$ ,  $D : (-1, -5, 1)$  είναι κορυφές τετραγώνου.

**Άσκηση 5.4** Δίνεται ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  στο χώρο. Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα  $\vec{a} = \vec{i}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Να εξετασθούν ως προς την ανεξαρτησία τους και τα διανύσματα  $\vec{a} - \vec{b}$ ,  $\vec{a} - \vec{c}$ ,  $\vec{b} - \vec{c}$ .

**Άσκηση 5.5** Για την πράξη του πολλαπλασιασμού αριθμών, γνωρίζουμε ότι εάν  $x \neq 0$  τότε

$$xy = xz \Rightarrow y = z$$

Ισχύει το ανάλογο αποτέλεσμα για την πράξη του εξωτερικού γινομένου; Με άλλα λόγια, ισχύει ότι, αν  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$  είναι τυχαία διανύσματα στο χώρο με  $\vec{x} \neq \vec{0}$ , τότε

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{x} \times \vec{z} \Rightarrow \vec{y} = \vec{z};$$

Υπόδειξη: Θεωρείστε την εξίσωση  $\vec{x} \times (\vec{y} - \vec{z}) = \vec{0}$ .

**Άσκηση 5.6** Δείξτε ότι, για τυχαία διανύσματα  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$  στο χώρο,

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + \vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y}) + \vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{x}) = \vec{0} \quad (\text{ταυτότητα του Jacobi}).$$

**Άσκηση 5.7** Για δική σας ‘διασκέδαση’ μπορείτε να σκεφτείτε το εξής πρόβλημα που έχει να κάνει με αποστάσεις στο επίπεδο:

Όλα τα σημεία του επιπέδου είναι χρωματισμένα άσπρα ή κόκκινα ή μαύρα. Δείξτε ότι υπάρχουν 2 σημεία με απόσταση 1 που έχουν το ίδιο χρώμα.