ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2013-14
Διδάσκοντες: Χρήστος Κουρουνιώτης
Θανάσης Φειδάς

M1113 ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΧΩΡΟΣ

Εργαστήριο Προβλημάτων 6

Τρίτη, 19/11/2013

Άσκηση 6.1 Θεωρήστε τα σημεία A : (1, 0, 1), B : (2, 1, 1), D : (1, 1, 2), E : (3, 4, 5). Έστω σημείο C, τέτοιο ώστε το $ABCD$ να είναι παραλληλόγραμο. Υπολογίστε το εμβαδόν του $ABCD$, καθώς και τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με ακμές AB, AD, AE.

Υπόδειξη: Ποιά διανύσματα παριστάνουν τις πλευρές AB και AD του παραλληλογράμμου; Πώς συνδέεται το εμβαδόν του με αυτά τα διανύσματα; Πώς συνδέεται ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με τα διανύσματα που αντιστοιχούν σε τρεις ακμές του;

Άσκηση 6.2 Θεωρούμε τρία σημεία A, B, C, και τα διανύσματα

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{CA} \text{ και } \overrightarrow{c} = \overrightarrow{AB}.$$

α′. Δείξτε ότι $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}$.

β′. Εάν α, β, γ είναι οι εσωτερικές γωνίες του τριγώνου ABC χρησιμοποιήστε το α′ για να αποδείξετε το νόμο των ημιτόνων:

$$\frac{|\overrightarrow{b}|}{\sin\beta} = \frac{|\overrightarrow{c}|}{\sin\gamma}.$$

Υπόδειξη: Ποιά σχέση ικανοποιούν τα διανύσματα που αποτελούν τις πλευρές ενός τριγώνου; Για το β′, πώς σχετίζεται το ημίτονο της εσωτερικής γωνίας τριγώνου με το εμβαδόν του;

Άσκηση 6.3 Εάν $\overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{b}$ είναι δεδομένα διανύσματα με $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$, βρείτε τα διανύσματα $\overrightarrow{u}$ τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$$

Υπόδειξη: Από τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου μπορούμε να δείξουμε οτι το διάνυσμα $\overrightarrow{u}$ βρίσκεται σε κάποιο συγκεκριμένο ημιεπίπεδο. Ποιό; Για να βρούμε πού σε αυτό το ημιεπίπεδο πρέπει να βρίσκεται το πέρας του $\overrightarrow{u}$, χρησιμοποιούμε την ισότητα του μέτρου του $\overrightarrow{b}$ με το μέτρο του $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{a}$, δηλαδή το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές $\overrightarrow{u}$ και $\overrightarrow{a}$.

Άσκηση 6.4 Δίδεται το διάνυσμα $\overrightarrow{a}$ με συντεταγμένες $(1, 2, 3)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Βρείτε τις συντεταγμένες του $\overrightarrow{a}$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, όπου

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}), \quad \overrightarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}), \quad \overrightarrow{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\,\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})\,.$$

Άσκηση 6.5 Περιγράψτε γεωμετρικά τα ακόλουθα σύνολα στο επίπεδο

α′. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x - 3y + \sqrt{2} = 0\}$

β′. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = -1\}$

γ′. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (y - 1)(2x - y) = 0\}$

δ′. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0\}$

ε′. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 2xy\}$

Άσκηση 6.6 Περιγράψτε γεωμετρικά τα ακόλουθα σύνολα στο χώρο

α′. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2 = 0\}$

β′. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2 = 0\}$

γ′. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x - 3y = 0\}$

δ′. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y = -1\}$

ε′. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (y - 1)(x^2 + z^2 - 1) = 0\}$

Άσκηση 6.7 Βρείτε μία αναλυτική περιγραφή του κύκλου στο επίπεδο E^2 που έχει κέντρο στο σημείο με συντεταγμένες $(-1, 2)$ και ακτίνα 2.

Βρείτε μία αναλυτική περιγραφή του κύκλου στο χώρο E^3 που βρίσκεται στο Oxz-επίπεδο (δηλαδή το επίπεδο που περιέχει το σημείο αναφοράς O και εφάπτεται στα διανύσματα $\overrightarrow{i}$ και $\overrightarrow{k}$), έχει κέντρο στο σημείο με συντεταγμένες $(-1, 0, 2)$ και ακτίνα 2.

Άσκηση 6.8 Βρείτε μια αναλυτική περιγραφή του υποσυνόλου του χώρου με παραμετρική περιγραφή

$$(x, y, z) = (3 + 2\cos t,\, 4 + 2\sin t,\, s), \quad 0 < t \leq 2\pi,\, s \in \mathbb{R}\,.$$

Περιγράψτε γεωμετρικά το σύνολο.