

M1113 ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΧΩΡΟΣ

Εργαστήριο Προβλημάτων 6

Τρίτη, 19/11/2013

Άσκηση 6.1 Θεωρήστε τα σημεία $A : (1, 0, 1)$, $B : (2, 1, 1)$, $D : (1, 1, 2)$, $E : (3, 4, 5)$. Έστω σημείο C , τέτοιο ώστε το $ABCD$ να είναι παραλληλόγραμο. Υπολογίστε το εμβαδόν του $ABCD$, καθώς και τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με ακμές AB, AD, AE .

Άσκηση 6.2 Θεωρούμε τρία σημεία A, B, C , και τα διανύσματα

$$\vec{a} = \overrightarrow{BC}, \vec{b} = \overrightarrow{CA} \text{ και } \vec{c} = \overrightarrow{AB}.$$

α'. Δείξτε ότι $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}$.

β'. Εάν α, β, γ είναι οι εσωτερικές γωνίες του τριγώνου ABC χρησιμοποιήστε το α' για να αποδείξετε το νόμο των ημιτόνων:

$$\frac{|\vec{b}|}{\sin \beta} = \frac{|\vec{c}|}{\sin \gamma}.$$

Άσκηση 6.3 Εάν \vec{a} και \vec{b} είναι δεδομένα διανύσματα με $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, βρείτε τα διανύσματα \vec{u} τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση

$$\vec{u} \times \vec{a} = \vec{b}$$

Άσκηση 6.4 Δίδεται το διάνυσμα \vec{a} με συντεταγμένες $(1, 2, 3)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Βρείτε τις συντεταγμένες του \vec{a} ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, όπου

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}), \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} + \vec{k}), \quad \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}).$$

Άσκηση 6.5 Περιγράψτε γεωμετρικά τα ακόλουθα σύνολα στο επίπεδο

α'. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y + \sqrt{2} = 0\}$

$$\beta'. \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1\}$$

$$\gamma'. \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y - 1)(2x - y) = 0\}$$

$$\delta'. \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0\}$$

$$\epsilon'. \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2xy\}$$

Άσκηση 6.6 Περιγράψτε γεωμετρικά τα ακόλουθα σύνολα στο χώρο

$$\alpha'. \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2 = 0\}$$

$$\beta'. \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2 = 0\}$$

$$\gamma'. \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y = 0\}$$

$$\delta'. \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = -1\}$$

$$\epsilon'. \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y - 1)(x^2 + z^2 - 1) = 0\}$$

Άσκηση 6.7 Βρείτε μία αναλυτική περιγραφή του κύκλου στο επίπεδο E^2 που έχει κέντρο στο σημείο με συντεταγμένες $(-1, 2)$ και ακτίνα 2.

Βρείτε μία αναλυτική περιγραφή του κύκλου στο χώρο E^3 που βρίσκεται στο Oxz -επίπεδο (δηλαδή το επίπεδο που περιέχει το σημείο αναφοράς O και εφάπτεται στα διανύσματα \vec{i} και \vec{k}), έχει κέντρο στο σημείο με συντεταγμένες $(-1, 0, 2)$ και ακτίνα 2.

Άσκηση 6.8 Βρείτε μια αναλυτική περιγραφή του υποσυνόλου του χώρου με παραμετρική περιγραφή

$$(x, y, z) = (3 + 2 \cos t, 4 + 2 \sin t, s), \quad 0 < t \leq 2\pi, s \in \mathbb{R}.$$

Περιγράψτε γεωμετρικά το σύνολο.