ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2013-14
Διδάσκοντες: Χρήστος Κουρουνιώτης
Θανάσης Φειδάς

M1113 ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΧΩΡΟΣ

Εργαστήριο Προβλημάτων 7

Τρίτη, 26/11/2013

Άσκηση 7.1 Έστω ε η ευθεία με παραμετρική περιγραφή $(1+t, 1+2t)$.

α′. Βρείτε μια αναλυτική περιγραφή της ε

β′. Θεωρήστε τις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ με παραμετρική περιγραφή

$(x, y) \in \varepsilon_1 \Leftrightarrow (x, y) = (1, 2) + s(2, 4)$

$(x, y) \in \varepsilon_2 \Leftrightarrow (x, y) = (0, -1) - u(2, 4)$

$(x, y) \in \varepsilon_3 \Leftrightarrow (x, y) = (1, 3) + v(2, -4)$

Για $n = 1, 2, 3$ να εξετάσετε αν οι $\varepsilon, \varepsilon_n$ ταυτίζονται, αν είναι παράλληλες χωρίς κοινά σημεία, ή αν τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο. Στήν τρίτη περίπτωση, να υπολογίσετε το σημείο τομής.

Άσκηση 7.2 Έστω ε η ευθεία με παραμετρική περιγραφή $(2+2t, 2, 2-2t)$. Θεωρήστε τις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ με παραμετρική περιγραφή

$(x, y, z) \in \varepsilon_1 \Leftrightarrow (x, y, z) = (1, -1, 0) + s(1, 1, 0)$

$(x, y, z) \in \varepsilon_2 \Leftrightarrow (x, y, z) = (1, -1, 1) - u(1, 1, 0)$

$(x, y, z) \in \varepsilon_3 \Leftrightarrow (x, y, z) = (1, -1, 1) + v(-4, 0, 4)$

Για $n = 1, 2, 3$ να εξετάσετε αν οι $\varepsilon, \varepsilon_n$ έχουν κοινά σημεία. Αν ναι, να υπολογίσετε τα κοινά σημεία των $\varepsilon, \varepsilon_n$. Αν όχι, να εξετάσετε αν οι $\varepsilon, \varepsilon_n$ είναι ασύμβατες.

Υπόδειξη: Ας εξετάσουμε εάν οι ε και η ε_1 έχουν κοινό σημείο. Για να υπάρχει ένα σημείο που ανήκει στην ε και την ε_1 πρέπει να υπάρχουν t και s τέτοια ώστε

$$(2,\, 2,\, 2) + t(2,\, 0,\, -2) = (1,\, -1,\, 0) + s(1,\, 1,\, 0)\,.$$

Δηλαδή πρέπει να ικανοποιούνται οι 3 εξισώσεις $2+2t = 1-s$, $2 = -1+s$ και $2-2t = 0$. Χρησιμοποιούμε δύο από αυτές για να υπολογίσουμε τα t και s, και ελέγχουμε εάν οι τιμές που βρίσκουμε ικανοποιούν και την τρίτη εξίσωση.

Εάν δεν υπάρχει κοινό σημείο, οι ευθείες είτε είναι παράλληλες (εάν τα διανύσματα διεύθυνσης είναι συγγραμμικά) είτε είναι ασύμβατες (εάν τα διανύσματα διεύθυνσης είναι γραμμικά ανεξάρτητα).

Άσκηση 7.3 Θεωρήστε τα επίπεδα Π, Π_1, Π_2 με αναλυτική περιγραφή

$(x, y, z) \in \Pi \Leftrightarrow 2x + 3y + z + 1 = 0$

$(x, y, z) \in \Pi_1 \Leftrightarrow x + y + z + 1 = 0$

$(x, y, z) \in \Pi_2 \Leftrightarrow -4x - 6y - 2z - 2 = 0$

Για $n = 1, 2$ να δώσετε μια παραμετρική περιγραφή του συνόλου των κοινών σημείων των Π, Π_n.

Υπόδειξη: Ας εξετάσουμε τα κοινά σημεία των Π και Π_1. Αυτά είναι τα σημεία $(x,\, y,\, z)$ που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις εξισώσεις $2x + 3y + z + 1 = 0$ και $x + y + z + 1 = 0$. Αφαιρούμε τη δεύτερη από την πρώτη και βρίσκουμε $x = -2y$. Αντικαθιστούμε αυτή την τιμή στη δεύτερη εξίσωση και βρίσκουμε $z = y - 1$. Άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το y ως παράμετρο:

$$(x,\, y,\, z) = (-2y,\, y,\, -1 + y)\,.$$

Άσκηση 7.4 Έστω Π το επίπεδο με παραμετρική περιγραφή $(1, 0, 1) + s(1, 2, 3) + t(1, 1, 1)$. Να δώσετε μια αναλυτική περιγραφή του Π.

Υπόδειξη: Θα δούμε δύο προσεγγίσεις.

α΄. Το γενικό σημείο του επιπέδου έχει συντεταγμένες της μορφής

$$x = 1 + s + t\,, \quad y = 2s + t\,, \quad z = 1 + 3s + t\,.$$

Από τις δύο πρώτες απαλοίφουμε το t και βρίσκουμε $x - s - 1 = y - 2s$. Από τη δεύτερη και την τρίτη απαλοίφουμε το t και βρίσκουμε $z - 1 - 3s = y - 2s$. Από αυτές τις δύο εξισώσεις, που δεν περιέχουν το t, απαλοίφουμε το s, και βρίσκουμε την αναλυτική εξίσωση του επιπέδου, δηλαδή τη σχέση που ικανοποιούν οι συντεταγμένες x, y, z των σημείων του επιπέδου.

β΄. Τα διανύσματα $(1,\, 2,\, 3)$ και $(1,\, 1,\, 1)$ είναι εφαπτόμενα στο επίπεδο. Συνεπώς το εξωτερικό τους γινόμενο είναι κάθετο στο επίπεδο. Εάν x, y, $z)$ είναι τυχόν σημείο του επιπέδου, το διάνυσμα $(x - 1,\, y,\, z - 1)$ είναι επίσης εφαπτόμενο στο επίπεδο, και συνεπώς κάθετο στο προηγούμενο εξωτερικό γινόμενο, δηλαδή

$$(x - 1,\, y,\, z - 1) \cdot (1,\, 2,\, 3) \times (1,\, 1,\, 1) = 0\,.$$

Υπολογίζουμε το μικτό γινόμενο και έχουμε την εξίσωση του επιπέδου.

Άσκηση 7.5 Δίδονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 1, -1), \vec{b} = (1, 0, -2), \vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$, και οι ευθείες σε παραμετρική μορφή:

1) $P(s) = (1, 3, 1) + s\vec{a}$,

2) $Q(t) = (1, 0, 1) + t\vec{b}$.

Δείξτε ότι η εξίσωση με τρεις αγνώστους (s, t, u)

$$Q(t) = P(s) + u\,\vec{n}$$

έχει μία λύση (s_0, t_0, u_0), και βρείτε την. Ποια είναι η γεωμετρική σημασία των σημείων $P(s_0), Q(t_0)$;

Υπόδειξη: Αυτή η άσκηση είναι παρόμοια με το παράδειγμα στο τέλος του Κεφαλαίου 5 των σημειώσεων.

Άσκηση 7.6 Έστω ε_1 η ευθεία, που περνά από το $A(6, -1, 3)$ και έχει διεύθυνση $\overrightarrow{u} = (2, -3, 4)$, και ε_2 η ευθεία, που περνά από το $B(2, 1, 0)$ και έχει διεύθυνση $\overrightarrow{v} = (1, 2, -3)$. Χωρίς να βρείτε τις εξισώσεις τους, αποδείξτε ότι οι ευθείες αυτές είναι ασύμβατες.

Υπόδειξη: Πρέπει να ελέγξουμε οτι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{u}$ και $\overrightarrow{v}$ δεν περιέχονται στο ίδιο επίπεδο.

Άσκηση 7.7 Βρείτε μία αναλυτική περιγραφή του κυλίνδρου με ακτίνα 2 που έχει άξονα την ευθεία που είναι παράλληλη με τον y-άξονα και περνάει από το σημείο με συντεταγμένες $(-1, 1, 2)$