

M1113 ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΧΩΡΟΣ

Εργαστήριο Προβλημάτων 8

Τρίτη, 3/12/2013

Άσκηση 8.1 Βρείτε την ακτίνα και το κέντρο του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $(0, 1)$, $(2, 3)$ και $(3, 5)$.

Υπόδειξη: Το κέντρο του κύκλου περιγεγραμμένου σε τρίγωνο είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων.

Άσκηση 8.2 Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνά από το σημείο αναφοράς και τα σημεία με συντεταγμένες (a, b) και (b, a) . Βρείτε επίσης το μήκος των χορδών που ο κύκλος αυτός αποτέμνει από τους άξονες.

Υπόδειξη: Ο κύκλος είναι περιγεγραμμένος σε ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο. Η μία μεσοκάθετος είναι η ευθεία $x = y$. Μία άλλη είναι κάθετος στην ευθεία με κλίση $\frac{b}{a}$.

Άσκηση 8.3 Εάν $ABCD$ είναι τετράγωνο με πλευρά a , παίρνοντας ως άξονες τις πλευρές AB και AD δείξτε ότι η εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι

$$x^2 + y^2 = a(x + y).$$

Άσκηση 8.4 Δείξτε ότι ο κύκλος με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(0, 1)$ και (s, t) τέμνει τον x -άξονα στα σημεία $(x_1, 0)$ και $(x_2, 0)$ που συμπίπτουν με τις ρίζες του τριωνύμου

$$x^2 - sx + t = 0.$$

Υπόδειξη: Βρίσκουμε την εξίσωση του κύκλου και θέτουμε $y = 0$.

Άσκηση 8.5 Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στον κύκλο με κέντρο στο $(0, 0)$ και ακτίνα 2, που περνάνε από το σημείο με συντεταγμένες $(-4, 1)$.

Χωρίς να επαναλάβετε τον υπολογισμό, βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στον ίδιο κύκλο που περνάνε από το σημείο $(-1, -4)$.

Υπόδειξη: Βρίσκουμε την εξίσωση της πολικής ευθείας του σημείου $X_1 : (-4, 1)$. Αυτή τέμνει τον κύκλο στα σημεία επαφής των εφαπτομένων που περνούν από το σημείο $(-4, 1)$. Βρίσκουμε αυτά τα σημεία και την εξίσωση της εφαπτομένης σε κάθε ένα.

Για το σημείο $X_2 : (-1, -4)$, παρατηρούμε ότι προκύπτει από το πρώτο με περιστροφή κατά $\frac{\pi}{2}$, συνεπώς εάν χρησιμοποιήσουμε το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{j}, -\vec{i})$ οι εξισώσεις των εφαπτομένων στο σημείο X_2 θα είναι ίδιες με τις εξισώσεις των εφαπτομένων από το σημείο

X_1 ως προς το αρχικό σύστημα αναφοράς. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών βρίσκουμε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στο X_2 ως προς το αρχικό σύστημα αναφοράς.

Άσκηση 8.6 Δείξτε ότι ένα ελλειπτικό κάτοπτρο έχει την ιδιότητα να εστιάζει το φως από μία πηγή που βρίσκεται στην μία εστία της έλλειψης στην άλλη εστία. Δηλαδή δείξτε ότι η κάθετος στην εφαπτομένη στην έλλειψη στο σημείο X_1 διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζει το X_1 με τις δύο εστίες της έλλειψης.

Υπόδειξη: Θεωρούμε το διάνυσμα \vec{n} που είναι κάθετο στην εφαπτομένη στο σημείο $X_1 : (x_1, y_1)$, και τα διανύσματα $\vec{X_1F_1}$ και $\vec{X_1F_2}$. Χρησιμοποιούμε το εσωτερικό γινόμενο για να δείξουμε ότι τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζονται είναι ίσα.