

M1113 ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΧΩΡΟΣ

Εργαστήριο Προβλημάτων 9

Τρίτη, 10/12/2013

Άσκηση 9.1 Σχεδιάστε ένα πρόχειρο (δηλαδή χωρίς να χρησιμοποιήσετε υποχρεωτικά χάρακα και υποδεκάμετρο) αλλά προσεκτικά σχεδιασμένο σχήμα (δηλαδή οι θέσεις των σημείων και οι κλίσεις των ευθειών να είναι σωστές στα όρια ακριβείας του σχήματος) της έλλειψης με εξίσωση

$$x^2 + 4y^2 = 4.$$

Βρείτε τις εστίες της έλλειψης και σημειώστε τις στο σχήμα.

Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία της έλλειψης για τα οποία $x = 1$ και σχεδιάστε τις στο σχήμα.

Άσκηση 9.2 Δείξτε ότι $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y = -4$ είναι εξίσωση έλλειψης, και βρείτε τις εστίες της έλλειψης και την εξίσωση των εφαπτομένων από το σημείο $(1, 2)$.

Υπόδειξη: Συμπληρώνοντας τα τετράγωνα βρίσκουμε το κέντρο της έλλειψης. Εάν λάβουμε το κέντρο ως νέο σημείο αναφοράς, η εξίσωση της έλλειψης είναι η ίδια με αυτή της Άσκησης 9.1. Συνεχίζοντας με το νέο σύστημα αναφοράς και συντεταγμένες x', y' , η συνθήκη $M^2 - LN = 0$ δίδει την εξίσωση του ζεύγους των εφαπτομένων από το σημείο X_1 . Από το σχήμα είναι προφανής η μία εφαπτομένη, και μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε για να βρούμε και την άλλη. Τέλος ξαναγράφουμε τις εξισώσεις ως προς το αρχικό σύστημα αναφοράς.

Άσκηση 9.3 Βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής με εξίσωση $x + \frac{1}{2}y^2 = 2$ και σχεδιάστε την παραβολή.

Βρείτε την εφαπτομένη στην παραβολή που είναι παράλληλη στην ευθεία $x - 2y = 0$.

Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι το σημείο αναφοράς δεν είναι η κορυφή της παραβολής, και χρησιμοποιούμε τη μεταβλητή $x' = x - 2$ αντί της κανονικής μορφής των εξισώσεων για την παραβολή και την εφαπτομένη της παραβολής σε σημείο X_1 .

Συγκρίνοντας την εξίσωση της εφαπτομένης σε σημείο X_1 με την εξίσωση $x - 2y = c$, βρίσκουμε το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη με την ευθεία $x - 2y = 0$.

Άσκηση 9.4 Βρείτε τις εξισώσεις των υπερβολών που έχουν ασύμπτωτες τις ευθείες $\varepsilon_1 : 4y = x$ και $\varepsilon_2 : -4y = x$.

Υπόδειξη: Η κλίση των ασυμπτώτων δίδει το λόγο των δύο παραμέτρων a και b της υπερβολής. Μην ξεχάσετε και τις συζυγείς υπερβολές, που έχουν τις ίδιες ασύμπτωτες. Έτσι έχουμε δύο άπειρες οικογένειες υπερβολών.

Άσκηση 9.5 Για να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο αλλά προσεκτικά σχεδιασμένο σχήμα της

υπερβολής με εξίσωση

$$x^2 - 2y^2 = 4,$$

πρώτα βρείτε τις εστίες της υπερβολής και σημειώστε τις στο σχήμα.

Κατόπιν βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων προς την υπερβολή, και σχεδιάστε τις στο σχήμα.

Τώρα σχεδιάστε τους δύο κλάδους της υπερβολής.

Βρείτε την εξίσωση των εφαπτομένων στην υπερβολή από το σημείο $(-1, 2)$. Κατόπιν βρείτε την εξίσωση κάθε μίας από τις δύο εφαπτόμενες από το (x_1, y_1) και σχεδιάστε τις στο σχήμα.

Το ίδιο για το σημείο $(x_2, y_2) = (1, \frac{1}{2})$.

Υπόδειξη: Έγινε στη διάλεξη.