ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΣ ΣΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Η ευθεία που είναι παράλληλη στο διάνυσμα με συντεταγμένες $(a,\, b)$ και διέρχεται από το σημείο με συντεταγμένες $(c,\, d)$ αποτελείται από όλα τα σημεία με συντεταγμένες της μορφής $(x,\, y) = (c,\, d) + t(a,\, b)$ για $t \in \mathbb{R}$. Από αυτή την σχέση παίρνουμε, με απαλοιφή του t, την εξίσωση που ικανοποιούν οι συντεταγμένες $(x,\, y)$ των σημείων της ευθείας:

$$b(x-c) = (a(y-d) \quad \text{ή} \quad bx - ay = cb - da\,.$$

Μπορούμε να εκφράσουμε την εξίσωση της ευθείας χρησιμοποιώντας μιγαδικούς αριθμούς. Εάν $\alpha = a + \mathrm{i}b$ και $\gamma = c + \mathrm{i}d$, το γενικό σημείο $z = x + \mathrm{i}y$ της ευθείας που διέρχεται από το γ και είναι παράλληλη προς την ευθεία που διέρχεται από το 0 και το α ικανοποιεί τη σχέση $z = \gamma + t\alpha$ για $t \in \mathbb{R}$. Για να απαλείψουμε το t από τις σχέσεις $z = \gamma + t\alpha$ και $\bar{z} = \bar{\gamma} + t\bar{\alpha}$ πολλαπλασιάζουμε την πρώτη με $\bar{\alpha}$ και τη δεύτερη με α και παίρνουμε

$$\bar{\alpha}z - \bar{\alpha}\gamma = t\bar{\alpha}\alpha = \alpha\bar{z} - \alpha\bar{\gamma}\,.$$

Έτσι καταλήγουμε στην εξίσωση που ικανοποιούν τα σημεία z της ευθείας,

$$\bar{\alpha}(z-\gamma) - \alpha(\bar{z} - \bar{\gamma}) = 0\,. \tag{1}$$

Ο κύκλος με κέντρο το σημείο με συντεταγμένες $(c,\, d)$ και ακτίνα $r > 0$ αποτελείται από όλα τα σημεία με συντεταγμένες $(x,\, y)$ που απέχουν r από το σημείο $(c,\, d)$, δηλαδή που ικανοποιούν την εξίσωση

$$(x-c)^2 + (y-d)^2 = r^2\,.$$

Στο μιγαδικό επίπεδο ο κύκλος με κέντρο $\kappa = c + \mathrm{i}d$ και ακτίνα $r > 0$ αποτελείται από τα σημεία $z = x + \mathrm{i}y$ που ικανοποιούν την εξίσωση $|z - \kappa| = r$, δηλαδή

$$(z-\kappa)(\bar{z} - \bar{\kappa}) = r^2\,. \tag{2}$$

ΟΙ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Στην πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ η απεικόνιση αντιστροφής $t \mapsto 1/t$ διατηρεί σταθερά τα σημεία 1 και -1 και απεικονίζει τα σημεία του διαστήματος $(0,\, 1)$ στο διάστημα $(1,\, \infty)$ και τα σημεία του διαστήματος $(-1,\, 0)$ στο διάστημα $(-\infty,\, -1)$, και αντίστροφα τα σημεία του διαστήματος $(1,\, \infty)$ στο διάστημα $(0,\, 1)$ και τα σημεία του διαστήματος $(-\infty,\, -1)$ στο διάστημα $(-1,\, 0)$. Η απεικόνιση αντιστροφής δεν ορίζεται στο 0.

Στο μιγαδικό επίπεδο θα θεωρήσουμε δύο απεικονίσεις αντιστροφής, την $z \mapsto 1/z$, την οποία θα ονομάσουμε **αναλυτική αντιστροφή**, και την $z \mapsto 1/\bar{z}$, την οποία θα ονομάσουμε **γεωμετρική αντιστροφή**. Και οι δύο αυτές απεικονίσεις ορίζονται σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από το 0.

Η αναλυτική αντιστροφή απεικονίζει το $z = re^{\mathrm{i}\vartheta} = r(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)$ στο $z^{-1} = r^{-1}e^{-\mathrm{i}\vartheta} = r^{-1}(\cos\vartheta - \mathrm{i}\sin\vartheta)$, δηλαδή στο σημείο του οποίου το μέτρο είναι το αντίστροφο του μέτρου του z, και το όρισμα είναι το αντίθετο του ορίσματος του z.

Η γεωμετρική αντιστροφή απεικονίζει το $z = re^{\mathrm{i}\vartheta} = r(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)$ στο $\bar{z}^{-1} = r^{-1}e^{-(-\mathrm{i}\vartheta)} = r^{-1}(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)$, δηλαδή στο σημείο του οποίου το μέτρο είναι το αντίστροφο του μέτρου του z, και το όρισμα είναι ίσο με το όρισμα του z. Η γεωμετρική αντιστροφή διατηρεί σταθερά τα σημεία στο μοναδιαίο κύκλο S^1 με κέντρο στο 0, για τα οποία $|z| = 1$ και στέλνει τα σημεία στο εσωτερικό του S^1 σε σημεία στο εξωτερικό του S^1.

Θεωρούμε ένα κύκλο με κέντρο κ και ακτίνα r, του οποίου τα σημεία ικανοποιούν την εξίσωση $|z-\kappa| = r$. Θέλουμε να προσδιορίσουμε την εικόνα του κύκλου από την απεικόνιση $f(z) = 1/z$, δηλαδή το σύνολο

$$\left\{w \in \mathbb{C} \,:\, w = \frac{1}{z},\, |z-\kappa| = r\right\} = \left\{w \in \mathbb{C} \,:\, \left|\frac{1}{w} - \kappa\right| = r\right\}.$$

Από την εξίσωση του κύκλου έχουμε

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{w} - \kappa\right)\left(\frac{1}{\bar{w}} - \bar{\kappa}\right) &= r^2 \\
\frac{1}{w\bar{w}} - \frac{\bar{\kappa}}{w} - \frac{\kappa}{\bar{w}} + \kappa\bar{\kappa} &= r^2 \\
\frac{1 - \bar{\kappa}\bar{w} - \kappa w}{w\bar{w}} &= r^2 - \kappa\bar{\kappa}\,.
\end{aligned}$$

Εάν $r^2 - \kappa\bar{\kappa} \neq 0$, η εξίσωση γίνεται

$$w\bar{w} = \frac{r^2 - \kappa\bar{\kappa}}{(r^2 - \kappa\bar{\kappa})^2} - \frac{\bar{\kappa}\bar{w} + \kappa w}{r^2 - \kappa\bar{\kappa}}$$

$$\begin{aligned}
w\bar{w} + \frac{\bar{\kappa}\bar{w}}{r^2 - \kappa\bar{\kappa}} + \frac{\kappa w}{r^2 - \kappa\bar{\kappa}} + \frac{\kappa\bar{\kappa}}{(r^2 - \kappa\bar{\kappa})^2} &= \frac{r^2}{(r^2 - \kappa\bar{\kappa})^2} \\
\left(w - \frac{\bar{\kappa}}{\kappa\bar{\kappa} - r^2}\right)\left(\bar{w} - \frac{\kappa}{\kappa\bar{\kappa} - r^2}\right) &= \frac{r^2}{(\kappa\bar{\kappa} - r^2)^2} \\
\left|w - \frac{\bar{\kappa}}{\kappa\bar{\kappa} - r^2}\right| &= \frac{r}{|\kappa\bar{\kappa} - r^2|}\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Δηλαδή το σημείο w βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο $\frac{\bar{\kappa}}{\kappa\bar{\kappa} - r^2}$ και ακτίνα $\frac{r}{|\kappa\bar{\kappa} - r^2|}$.

Εάν $r^2 - \kappa\bar{\kappa} = 0$, η εξίσωση γίνεται

$$\kappa w + \bar{\kappa}\bar{w} = 1 \tag{4}$$

που είναι η εξίσωση μίας ευθείας.

Συνοψίζοντας, η αναλυτική αντιστροφή $z \mapsto 1/z$ απεικονίζει τον κύκλο C

- σε κύκλο, εάν $0 \notin C$
- σε ευθεία, εάν $0 \in C$,

και απεικονίζει την ευθεία ε

- σε κύκλο, εάν $0 \notin \varepsilon$
- σε ευθεία, εάν $0 \in \varepsilon$,

Άσκηση 4.1 Δείξτε οτι η ευθεία με εξίσωση (4) περνάει από το σημείο $\frac{1}{2\kappa}$ και είναι κάθετη προς την ευθεία που διέρχεται από το 0 και το $\bar{\kappa}$.