ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2011-12
Διδάσκων: Χ.Κουρουνιώτης

Μ2822 ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Φυλλάδιο 1

Ανισότητες

Οι πραγματικοί αριθμοί είναι *διατεταγμένοι*. Ενισχύουμε αυτήν την ιδέα με το να τους θεωρούμε πάνω σε μια ευθεία, στην οποία ένας μεγαλύτερος αριθμός βρίσκεται στα δεξιά ενός μικρότερου. Αυτή η *γραμμική* διάταξη εκφράζεται στον κανόνα τριχοτομίας

Κανόνας Τριχοτομίας Για κάθε δύο αριθμούς x και y, ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα

$$x < y \quad \text{ή} \quad x = y \quad \text{ή} \quad y < x.$$

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ Ας αποσαφηνίσουμε κάποια πράγματα

Γράφουμε ...	**Λέμε ...**
$x < y$ *είναι ισοδύναμο με* $y > x$	x *είναι μικρότερο από το* y *και* y *είναι μεγαλύτερο από το* x
$x \le y$ *σημαίνει* $x < y$ *ή* $x = y$	x *είναι μικρότερο από ή ίσο με το* y
$x \ge y$ *σημαίνει* $x > y$ *ή* $x = y$	x *είναι μεγαλύτερο από ή ίσο με το* y
$x \le y$ *είναι ισοδύναμο με* $y \ge x$	
$x < y < z$ *σημαίνει* $x < y$ *και* $y < z$	

Πρόβλημα 1.1 Είναι η ακόλουθη πρόταση σωστή; Εάν $x < y$ τότε $x \le y$.
Η ακόλουθη; Εάν $x \le y$ τότε $x < y$.

Ιδιότητες Ανισοτήτων

Στην Ανάλυση χρειάζεται επιδεξιότητα στο χειρισμό των ανισοτήτων, άν και είναι αλήθεια οτι προκαλούν δυσκολίες όχι μόνο στους φοιτητές, αλλά σε όλους τους μαθηματικούς. Ολα όσα χρειάζεστε για να χειρίζεστε ανισότητες, προκύπτουν από τον Κανόνα Τριχοτομίας και τις ακόλουθες τρείς ιδιότητες.

Για κάθε πραγματικούς αριθμούς $x, \ y, \ z$

Κανόνας 1 Εάν $x < y$ και $y < z$ τότε $x < z$, (Μεταβατικότητα)
Κανόνας 2 Εάν $x < y$ τότε $x + z < y + z$
Κανόνας 3 Εάν $x < y$ και $z > 0$ τότε $xz < yz$.

Παραδείγματα Εάν $x < -1$ τότε $x < 5$. (Κανόνας 1)
Εάν $\frac{3}{x^2+2} > 1$ τότε $x^2 + 2 < 3$ (Κανόνας 3), και τότε $x^2 < 1$ (Κανόνας 2).

Πρόβλημα 1.2 Εάν $a > b = c > d = e \geq f$, τί μπορείτε να πείτε για το a και το f ; Ποιούς κανόνες χρησιμοποιείτε για να απαντήσετε;
Εάν $a > b = c < d = e \geq f$, τι μπορείτε να πείτε για το a και το f ;

Προσοχή Είναι λάθος να γράφουμε $1 < x < -1$, που σημαίνει $1 < x$ **και** $x < -1$, και συνεπώς αντιβαίνει στον κανόνα της μεταβατικότητας. Αν εννοείτε $1 < x$ **ή** $x < -1$ πρέπει να το γράψετε έτσι. Δεν υπάρχει συντομότερος τρόπος.

Κοιτάξτε ξανά τους Κανόνες 2 και 3. Μας λένε οτι η διάταξη διατηρείται από την πρόσθεση, και από πολλαπλασιασμό με θετικό αριθμό. Μην ξεχνάτε οτι πολλαπλασιασμός με *αρνητικό* αριθμό *αντιστρέφει* τη διάταξη.

Κανόνας 4 Εάν $x < y$ και $z < 0$ τότε $zx > zy$.

Παράδειγμα Εάν $x < -\frac{1}{2}$ τότε $-2x > 1$.
Εάν $x/y < 1$ τότε $x < y$ εάν $y > 0$, αλλά $x > y$ εάν $y < 0$.

Πρόβλημα 1.3 Αποδείξτε οτι ο Κανόνας 4 είναι συνέπεια των Κανόνων 1, 2 και 3 στην προηγούμενη σελίδα. (Γράψτε την απόδειξη στο ακόλουθο κουτί.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Και άλλοι χρήσιμοι κανόνες προκύπτουν από τους τρείς πρώτους.

Γιά κάθε πραγματικούς αριθμούς x, y, a και b:

Κανόνας 5 Εάν $x < y$ και $a < b$ τότε $x + a < y + b$ (Προσθετικότητα)
Κανόνας 6 Εάν $x < y$ και $a < b$ τότε $x - b < y - a$
Κανόνας 7 Εάν $0 < x < y$ και $0 < a < b$ τότε $0 < x \cdot a < y \cdot b$
Κανόνας 8 Εάν $x > 0$ τότε $\frac{1}{x} > 0$, εάν $x < 0$ τότε $\frac{1}{x} < 0$

Κανόνας 9 Εάν $0 < x < y$ τότε $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

Πρόβλημα 1.4

1. Αντικαταστείστε μερικούς αριθμούς σε κάθε έναν από τους παραπάνω κανόνες, και βεβαιωθείτε οτι ικανοποιούνται.
2. Βεβαιωθείτε οτι κάθε ένας είναι συνέπεια των Κανόνων 1, 2 και 3.
3. Δείξτε οτι εάν $x < y$ και $a < b$ τότε δεν είναι απαραίτητο να ισχύει $x \cdot a < y \cdot b$. Συνεπώς, ο περιορισμός σε θετικούς αριθμούς στον Κανόνα 7 είναι απαραίτητος.
4. Βρείτε μια παραλλαγή του Κανόνα 9 που ισχύει όταν $x < y < 0$.

Πρόβλημα 1.5

1. Υποθέστε οτι $x < -2$. Δείξτε οτι $\frac{1}{x} > -\frac{1}{2}$. Ποιόν από τους παραπάνω κανόνες χρησιμοποιείτε σε κάθε βήμα.
2. Δείξτε οτι $0 < x < 3 \Rightarrow -1 \leq x^2 - 2x < 3$.

Επίλυση Ανισοτήτων

Λέμε οτι λύσαμε μια ανισότητα που περιέχει μεταβλητές, όταν βρούμε όλες τις τιμές αυτών των μεταβλητών για τις οποίες η ανισότητα είναι αληθής. Δεν έχουν όλες οι ανισότητες λύσεις, και μερικές λύσεις είναι πολύ δύσκολο ή και αδύνατο να τις βρούμε ...

Πρόβλημα 1.6

1. Δείξτε οτι $x = 0$ είναι μια λύση της $\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-3)} < 0$.
2. Λύστε τις ανισότητες
   - $x^2 > 1$
   - $x - 4 \leq 3 + x$
   - $-3 < 5 - 2x < 3$
3. Γράψτε μια ανισότητα που δεν έχει λύση.

Χρησιμοποιώντας Γραφήματα

Συχνά ένα γράφημα βοηθάει να βρούμε αμέσως τις λύσεις μίας ανισότητας.

Πρόβλημα 1.7 Χρησιμοποιείστε γραφήματα για να λύσετε τις παρακάτω ανισότητες.

- $x^2 - 2x - 3 \geq 0$
- $x^3 < x$
- $1/x < x < 1$

Στην τελευταία περίπτωση πρέπει να σχεδιάσετε τα γραφήματα των $y = 1/x,\ y = x$ και $y = 1$.

Ανάλυση Περιπτώσεων

Οταν λύνουμε ανισότητες που περιέχουν γινόμενα, πηλίκα και απόλυτες τιμές, συχνά χρειάζεται να εξετάσουμε διαφορες περιπτώσεις: σε κάθε περίπτωση περιορίζουμε τους παράγοντες να είναι ή θετικοί ή αρνητικοί. Πρέπει να διαλέξετε τις περιπτώσεις ανάλογα με το πρόβλημα. Κοιτάξτε προσεκτικά τα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 1 Λύστε την ανισότητα $x^2 < 1$.

Γινόμενα
Το γινόμενο xy δύο αριθμών είναι θετικό εάν και μόνον εάν οι x και y είναι ή και οι δύο θετικοί, ή και οι δύο αρνητικοί. Το γινόμενο είναι αρνητικό εάν και μόνον εάν έχουν διαφορετικό πρόσημο.

Πρώτα παρατηρούμε οτι $x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) < 0$. Βλέπουμε οτι υπάρχουν δύο δυνατές περιπτώσεις:
Περίπτωση 1: $x+1 > 0$ και $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x > -1$ και $x < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.
Περίπτωση 2: $x+1 < 0$ και $x-1 > 0 \Leftrightarrow x < -1$ και $x > 1$. Αδύνατο!
Συμπεραίνουμε οτι η λύση είναι $-1 < x < 1$.

Προσοχή στη Λογική Πρέπει να χρησιμοποιούμε με πολύ προσοχή τα σύμβολα συνεπαγωγής $\Rightarrow$ και ισοδυναμίας $\Leftrightarrow$.
Υποθέστε οτι P και Q είναι δύο προτάσεις.
$P \Rightarrow Q$ σημαίνει οτι *εάν* η P είναι αληθής, τότε η Q είναι αληθής. Δεν σημαίνει οτι η P ή η Q είναι αληθής.
Η ακόλουθη συνεπαγωγή είναι αληθής, παρ'ολο που το συμπέρασμα δεν είναι: $x + 1 < x - 2 \Rightarrow 1 < -2$.
Προσοχή: Εάν η πρόταση P συνεπάγεται την Q και η Q είναι αληθής, δεν ισχύει υποχρεωτικά οτι η P είναι αληθής.
Οπως θα δούμε στα Θεμέλια των Μαθηματικών, εάν η υπόθεση μίας συνεπαγωγής είναι ψευδής, η συνεπαγωγή είναι αληθής, ανεξάρτητα από την αλήθεια του συμπεράσματος.
Η ισοδυναμία $P \Leftrightarrow Q$ σημαίνει οτι P είναι αληθής εάν και μόνον εάν Q είναι αληθής.

Παράδειγμα 2 Λύστε την ανισότητα $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > 0$.

Στην επίλυση ανισοτήτων, χρησιμοποιούμε συχνά το σύμβολο της ισοδυναμίας, αφού θέλουμε να προσδιορίσουμε ακριβώς το σύνολο των λύσεων, και όχι ένα μεγαλύτερο σύνολο που το περιέχει.
Είναι αληθές ότι $2x < -1 \Rightarrow 2x < 0$, αλλά προφανώς δεν ισχύει $2x < 0 \Rightarrow 2x < -1$.

Είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε οτι $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$. Αρκεί να εξετάσουμε περιπτώσεις ανάλογα με το πρόσημο του αριθμητή και του παρονομαστή.
Περίπτωση 1:
$2x + 1 > 0$ και $x(x+1) > 0 \Leftrightarrow$
$x > -\frac{1}{2}$ και $((x > 0$ και $x > -1)$ ή $(x < 0$ και $x < -1)) \Leftrightarrow$
$x > 0$.
Περίπτωση 2:
$2x + 1 < 0$ και $x(x+1) < 0 \Leftrightarrow$
$x < -\frac{1}{2}$ και $((x > 0$ και $x < -1)$ ή $(x < 0$ και $x > -1)) \Leftrightarrow$
$-1 < x < -\frac{1}{2}$.

Πρόβλημα 1.8 Λύστε την ανισότητα $1/x < x < 1$ εξετάζοντας διαφορετικές περιπτώσεις.

Πρόβλημα 1.9 Εξετάστε το ακόλουθο επιχείρημα.
$1/x < x < 1$, άρα $1 < x^2$, άρα $1 < x$.
Αλλά $x < 1$, άρα δεν υπάρχει λύση.

Πόσα λάθη μπορείτε να βρείτε; Υποθέστε οτι είστε καθηγητής, και σχολιάστε αυτό το επιχείρημα που έγραψε ένας φοιτητής σας.

Δυνάμεις

Πρόβλημα 1.10

1. Είναι η ακόλουθη πρόταση αληθής; *Εάν $x < y$ τότε $x^2 < y^2$.* Η ακόλουθη; *Εάν $x^2 < y^2$ τότε $x < y$.*
2. Αποδείξτε οτι εάν x και y είναι και οι δύο θετικοί, τότε
$$x < y \Rightarrow x^2 < y^2 \ \text{ και } \ x^2 < y^2 \Rightarrow x < y \ .$$

Θα διατυπώσουμε τον κανόνα οτι, εάν x και y είναι και οι δύο θετικοί, τότε η πρόταση $x < y$ είναι ισοδύναμη με την πρόταση $x^n < y^n$ για κάθε φυσικό αριθμό n.

Κανόνας Δυνάμεων Εάν x και y είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τότε, για κάθε φυσικό αριθμό n,
$$x < y \ \text{ εάν και μόνον εάν } \ x^n < y^n$$

Θα θέλαμε να αποδείξουμε αυτόν το χρήσιμο κανόνα. Πρέπει να δείξουμε οτι $x < y \Rightarrow x^n < y^n$ *και* οτι $x^n < y^n \Rightarrow x < y$. Προσέξτε οτι αυτές είναι δύο διαφορετικές προτάσεις.

Πρόβλημα 1.11 1. Χρησιμοποιείστε μαθηματική επαγωγή, για να δείξετε οτι εάν x και y είναι και οι δύο θετικοί, τότε ισχύει η συνεπαγωγή $x < y \Rightarrow x^n < y^n$. (Σημειώστε ποιούς κανόνες για τις ανισότητες χρησιμοποιείτε).

2. Τώρα προσπαθείστε να δείξετε οτι εάν x και y είναι και οι δύο θετικοί, τότε ισχύει η *αντίστροφη* συνεπαγωγή, $x^n < y^n \Rightarrow x < y$.
(Εάν δεν ισχύει $x < y$, τί μπορούμε να συμπεράνουμε για το x^n και το y^n;)

Παιχνίδι Παιχνίδι για δύο παίκτες: Εχετε μια ορθογώνια πλάκα σοκολάτα, χαραγμένη σε τετραγωνάκια. Ενα τετραγωνάκι, σε μία από τις γωνίες του ορθογωνίου, είναι δαγκωμένο. Ο ένας παίκτης κόβει την πλάκα στα δύο, κατά μήκος των οριζόντιων ή των κάθετων χαρακιών, και δίνει στον άλλο παίκτη το κομμάτι που περιέχει το δαγκωμένο τετραγωνάκι. Ο άλλος παίκτης κάνει με τη σειρά του το ίδιο. Χάνει ο παίκτης που θα πάρει το δαγκωμένο τετραγωνάκι.
Σε ποιές περιπτώσεις μπορεί να εξασφαλίσει τη νίκη ο πρώτος παίκτης, και σε ποιές ο δεύτερος;