

M2822 ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Φυλλάδιο 10

Το Αξίωμα της Πληρότητας των Πραγματικών

Είδαμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι το όριο μιας δεκαδικής ακολουθίας, και ότι ένας πραγματικός αριθμός είναι ρητός εάν και μόνον εάν είναι το όριο μιας αναδρομικής δεκαδικής ακολουθίας. Έπεται ότι οι άρρητοι αριθμοί είναι ακριβώς τα όρια μη αναδρομικών δεκαδικών ακολουθιών.

Πρόβλημα 10.1 Ο άπειρος δεκαδικός $0.101001000100001\dots$ έχει 1 στις $\frac{1}{2}n(n+1)$ -οστές θέσεις, και 0 στις υπόλοιπες. Μπορεί το όριό του να είναι ρητός αριθμός;

Γνωρίζουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι το όριο μιας δεκαδικής ακολουθίας, η οποία είναι μοναδική εκτός εάν ο αριθμός είναι δεκαδικός, οπότε υπάρχουν δύο δεκαδικές ακολουθίες με το ίδιο όριο. Δεν γνωρίζουμε όμως εάν κάθε δεκαδική ακολουθία συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό. Αυτό μας το εξασφαλίζει το τελευταίο αξίωμα των πραγματικών αριθμών, το Αξίωμα της Πληρότητας.

Αξίωμα Πληρότητας Κάθε αύξουσα και φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει σε ένα πραγματικό αριθμό.

Παράδειγμα Η ακολουθία $(-\frac{1}{n})$ είναι φραγμένη και αύξουσα. Συγκλίνει με όριο 0.

Σε αυτό το παράδειγμα γνωρίζουμε ήδη το όριο της ακολουθίας. Αλλά η ισχύς του Αξιώματος Πληρότητας είναι ότι εάν μπορούμε να δείξουμε ότι μια ακολουθία είναι αύξουσα και φραγμένη, τότε γνωρίζουμε ότι η ακολουθία συγκλίνει, ακόμα και εάν δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε το όριό της.

Πρόβλημα 10.2 Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) που ορίζεται αναδρομικά

$$a_1 = 1 \text{ και } a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$$

1. Δείξτε με επαγωγή ότι $1 \leq a_n \leq 2$.
2. Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $a_n^2 - a_n - 2 = (a_n - 2)(a_n + 1)$, για να δείξετε ότι η ακολουθία είναι αύξουσα.

Συμπεραίνουμε από το Αξίωμα Πληρότητας ότι η ακολουθία (a_n) συγκλίνει.

Πρόβλημα 10.3 Εάν (a_n) είναι αύξουσα ακολουθία που δεν είναι άνω φραγμένη, δείξτε ότι $(a_n) \rightarrow \infty$.

Ορισμός Πληρότητα Ένα υποσύνολο X των πραγματικών αριθμών ονομάζεται πλήρες εάν κάθε αύξουσα και φραγμένη ακολουθία της οποίας οι όροι είναι στοιχεία του X συγκλίνει σε ένα σημείο στο X .

Το Αξίωμα Πληρότητας λέει ότι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών είναι πλήρες.

Πρόβλημα 10.4 Χρησιμοποιήστε τον άρρητο αριθμό $\sqrt{2}$ για να κατασκευάσετε ακολουθίες ώστε να δείξετε ότι:

1. Το σύνολο των αρρήτων αριθμών δεν είναι πλήρες.
2. Το σύνολο των ρητών αριθμών δεν είναι πλήρες.

Πρόβλημα 10.5 Θεωρήστε ρητούς αριθμούς a και b , με $a < b$. Δείξτε ότι $(a + b\sqrt{2})/(1 + \sqrt{2})$ δεν είναι ρητός. Δείξτε επίσης ότι $a < (a + b\sqrt{2})/(1 + \sqrt{2}) < b$. Συμπεράνατε ότι υπάρχει ένας άρρητος αριθμός μεταξύ κάθε δύο διαφορετικών ρητών.

Θεώρημα Κάθε φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.

Πρόβλημα 10.6 Χρησιμοποιήστε το Αξίωμα Πληρότητας για να αποδείξετε το Θεώρημα.

Στην Ασκήση 9.5 δείξαμε ότι κάθε δεκαδική ακολουθία είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Αφού κάθε αύξουσα ακολουθία είναι κάτω φραγμένη, έπεται ότι κάθε δεκαδική ακολουθία είναι αύξουσα και φραγμένη, και συνεπώς συγκλίνει.

Θεώρημα Κάθε δεκαδική ακολουθία συγκλίνει.

Συνέπειες της Πληρότητας

Φραγμένες ακολουθίες

Ασκηση 10.7 Βρείτε ένα άνω φράγμα και ένα κάτω φράγμα για τις ακολουθίες

$$1. a_n = (-1)^n$$

$$2. b_n = (-1)^n(1 + 1/n)$$

Συγκλίνει κάποια από αυτές τις ακολουθίες; Σε κάθε περίπτωση βρείτε μια συγκλίνουσα υπακολουθία. Είναι η συγκλίνουσα υπακολουθία μονότονη;

Ξανακοιτάξτε την απόδειξή σας ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη, (Ασκηση 6.2). Ισχύει το αντίστροφο, ότι κάθε φραγμένη ακολουθία συγκλίνει;

Θεώρημα Bolzano–Weierstrass

Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (ή κάθε μη-πεπερασμένο και φραγμένο υποσύνολο E του \mathbb{R} έχει ένα τουλάχιστον οριακό σημείο).

Ασκηση 10.8 Αποδείξτε το Θεώρημα. (Τί γνωρίζουμε για την ύπαρξη μονότονων υπακολουθιών;)

Πρόβλημα

Θέλουμε να δείξουμε ότι οι ρητοί αριθμοί καταλαμβάνουν ένα πολύ μικρό μέρος της ευθείας των πραγματικών. Για την ακρίβεια, θα δείξουμε ότι μπορούμε να βρούμε ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, που αποτελείται από ανοικτά διαστήματα, με συνολικό μήκος μικρότερο από οποιονδήποτε δοθέντα θετικό αριθμό, που περιέχει όλους τους ρητούς. Θυμηθείτε ότι οι ρητοί είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο. Συνεπώς μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία (a_n) της οποίας οι όροι περιέχουν όλους τους ρητούς αριθμούς.

Εάν ε είναι ένας θετικός αριθμός, θεωρούμε για κάθε n το διάστημα $(a_n - \varepsilon/2^n, a_n + \varepsilon/2^n)$. Πόσο μήκος έχει αυτό το διάστημα; Εάν πάρουμε την ένωση όλων αυτών των διαστημάτων, για όλα τα n , το συνολικό μήκος του συνόλου δεν θα είναι μικρότερο από το άθροισμα των μηκών των διαστημάτων; Πόσο είναι αυτό το άθροισμα; Πόσο μέρος της ευθείας καταλαμβάνουν οι ρητοί αριθμοί; Εάν διαλέξουμε έναν (πραγματικά) τυχαίο πραγματικό αριθμό, τι πιθανότητα έχουμε να είναι αυτός ρητός;