ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2011-12
Διδάσκων: Χ.Κουρουνιώτης

Μ2822 ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Φυλλάδιο 11

Ακολουθίες Cauchy.

Ορισμός Ακολουθίες Cauchy

Μια ακολουθία (a_n) είναι ακολουθία Cauchy εάν, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε $|a_n - a_m| < \varepsilon$ όταν $n,\ m > N$.

Αυτή η ιδιότητα σημαίνει οτι για κάθε $\varepsilon > 0$, οσοδήποτε μικρό, μπορουμε να βρούμε ένα σημείο (ένα όρο) στην ακολουθία, πέρα από το οποίο κάθε δύο όροι της ακολουθίας απέχουν λιγότερο από ε.

Πρόβλημα 11.1 Δείξτε οτι η ακολουθία $\left(\frac{1}{n}\right)$ είναι ακολουθία Cauchy.

Πρόβλημα 11.2 Δείξτε οτι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι ακολουθία Cauchy.
Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα οτι $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a|$.

Η σημασία της ιδιότητας Cauchy οφείλεται στο οτι ισχύει και το αντίστροφο: η ιδιότητα Cauchy εξασφαλίζει τη σύγκλιση μιας ακολουθίας χωρίς να χρειάζεται να γνωρίζουμε το συγκεκριμένο όριο.

Θεώρημα Κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει.

Πρόβλημα 11.3 Θα αποδείξουμε το Θεώρημα.

α΄. Δείξτε οτι κάθε ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη.

β΄. Δείξτε οτι κάθε ακολουθία Cauchy έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(a_{n_i}) \to a$.

γ΄. Χρησιμοποιήστε την τριγωνική ανισότητα για να δείξετε οτι $(a_n) \to a$.

Ελάχιστο άνω φράγμα και μέγιστο κάτω φράγμα

Ορισμός Ενα μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών A είναι

- **άνω φραγμένο** εάν υπάρχει αριθμός U τέτοιος ώστε $a \leq U$ για κάθε $a \in A$. U είναι **άνω φράγμα** του A.
- **κάτω φραγμένο** εάν υπάρχει αριθμός L τέτοιο ώστε $a \geq L$ για κάθε $a \in A$. L είναι **κάτω φράγμα** του A.
- **φραγμένο** εάν είναι άνω φραγμένο και κάτω φραγμένο.

Παράδειγμα Το σύνολο $\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο εφόσον $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ για κάθε n.

Ορισμός
Ελάχιστο άνω φράγμα
Μέγιστο κάτω φράγμα

Ενας αριθμός u είναι **ελάχιστο άνω φράγμα** του A εάν
1) u είναι άνω φράγμα του A
και 2) εάν U είναι άνω φράγμα του A, τότε $u \leq U$.

Ενας αριθμός ℓ είναι **μέγιστο κάτω φράγμα** του A εάν
1) ℓ είναι κάτω φράγμα του A
και 2) εάν L είναι κάτω φράγμα του A, τότε $\ell \geq L$.

Πρόβλημα 11.4 Δείξτε οτι ένα σύνολο A δεν μπορεί να έχει περισσότερα από ένα ελάχιστο άνω φράγμα και ένα μέγιστο κάτω φράγμα.

Συμβολισμός Το ελάχιστο άνω φράγμα ενός συνόλου A το συμβολίζουμε $\sup A$.
Το μέγιστο κάτω φράγμα ενός συνόλου A το συμβολίζουμε $\inf A$.

Πρόβλημα 11.5 Ελέγξτε ότι 0 είναι κάτω φράγμα, και 2 είναι άνω φράγμα για κάθε ένα από τα σύνολα

α΄. $\{x \mid 0 \le x \le 1\}$

β΄. $\{x \mid 0 < x < 1\}$

γ΄. $\{1 + 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$

δ΄. $\{2 - 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$

ε΄. $\{1 + (-1)^n/n \mid n \in \mathbb{N}\}$

ϛ΄. $\{q \mid q^2 < 2, q \in \mathbb{Q}^+\}$.

Για ποιά από τα σύνολα μπορείτε να βρείτε ένα κάτω φράγμα μεγαλύτερο από το 0 και/ή ένα άνω φράγμα μικρότερο από το 2;
Βρείτε το μεγαλύτερο κάτω φράγμα και το μικρότερο άνω φράγμα για το κάθε σύνολο.
Μπορεί το μικρότερο άνω φράγμα ή το μεγαλύτερο κάτω φράγμα ενός συνόλου A να ανήκει στο σύνολο;
Πρέπει υποχρεωτικά να ανήκει στο σύνολο A το μικρότερο άνω φράγμα και το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του A;

Πρόβλημα 11.6 1) Υποθέστε οτι το σύνολο A έχει μέγιστο κάτω φράγμα. Δείξτε οτι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $\inf A \le a < \inf A + \varepsilon$.
Τί συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε από αυτό το αποτέλεσμα;
2) Εάν ℓ είναι κάτω φράγμα του συνόλου A, και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $\ell \le a < \ell + \varepsilon$, δείξτε οτι $\ell = \inf A$.

Θεώρημα Κάθε μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών που είναι κάτω φραγμένο έχει ένα μέγιστο κάτω φράγμα.

Πρόβλημα 11.7 Συμπληρώστε τα κενά στην παρακάτω απόδειξη του Θεωρήματος. Υποθέστε οτι A είναι ένα μη κενό, κάτω φραγμένο σύνολο, και οτι x_1 είναι ένα κάτω φράγμα του A. Εστω a ένα στοιχείο του A.

α΄. Βρείτε έναν αριθμό y_1 που δεν είναι κάτω φράγμα του A.

Ορίστε αναδρομικά δύο ακολουθίες (x_n) και (y_n), με το ακόλουθο τρόπο. Για κάθε n, ορίζουμε $h_n = \frac{x_n+y_n}{2}$. Τότε

$$x_{n+1} = \begin{cases} h_n & \text{εάν } h_n \text{ είναι κάτω φράγμα του } A \\ x_n & \text{εάν } h_n \text{ δέν είναι κάτω φράγμα του } A \end{cases}$$

$$y_{n+1} = \begin{cases} y_n & \text{εάν } h_n \text{ είναι κάτω φράγμα του } A \\ h_n & \text{εάν } h_n \text{ δεν είναι κάτω φράγμα του } A \end{cases}$$

Εξ ορισμού, κάθε x_n είναι κάτω φράγμα του A και κανένα y_n δεν είναι κάτω φράγμα του A.

β΄. Δείξτε οτι $y_n - x_n = \frac{y_1-x_1}{2^{n-1}} > 0$.

γ΄. Δείξτε οτι η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα και οτι η (y_n) είναι φθίνουσα.

δ΄. Δείξτε οτι και οι δύο ακολουθίες είναι φραγμένες.

Επεται από το αξίωμα της πληρότητας οτι οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν.

ε΄. Δείξτε οτι οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν στο ίδιο όριο.

ϛ΄. Δείξτε οτι ℓ είναι κάτω φράγμα του A.

ζ΄. Δείξτε οτι εάν L είναι είναι κάτω φράγμα του A, τότε $L \leq \ell$.

Συμπεραίνουμε οτι $\ell = L$.

Πρόβλημα 11.8 Υποθέτουμε οτι A είναι μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών, που έχει μέγιστο κάτω φράγμα $\inf A$. Ορίζουμε το σύνολο $-A = \{-a \ : \ a \in A\}$. Δείξτε οτι $-A$ είναι ενα μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών, που έχει ελάχιστο άνω φράγμα, και οτι $\sup(-A) = -\inf A$.

Θεώρημα Κάθε μή κενό σύνολο πραγματικών αριθμών που είναι άνω φραγμένο έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα.